SCHAUM'S outlines

全美经典 学习指导系列

微积分

〔美〕M. R. 施皮格尔 著

施建兵　朱卓宇　冯玉英　孙越泓 译

- 涵盖课程的基本内容，是任一教材的补充
- 925道详细解答的习题和几百道练习题
- 理想的自学读物
- 取得好成绩的帮手

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

O·1531.0101
责任编辑：鄢德平

SCHAUM'S ouTlines

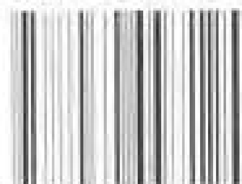
全球销量
超越3000万的
"全美经典学习指导系列"
是您的最佳
学习伴侣！

10年来最畅销的教辅系列
全美著名高校资深教授倾力之作
国内重点高校任课教师全力推荐并担当翻译
简明高效的学习辅导，全面详细的习题解答
迄今为止国内最全面的教辅系列
覆盖大学理工科专业

全美经典学习指导系列

工程力学
流体动力学
物理学基础
材料力学
工程热力学
数值分析
量子力学
有机化学习题精解
大学化学习题精解
电路
电气工程基础
工程电磁场基础
数字信号处理
数字系统导论
电机与机电学
基本电路分析
信号与系统
微生物学
生物化学
生物学
分子和细胞生物学
人体解剖与生理学

ISBN 7-03-009712-2



McGraw Hill

ISBN 7-03-009712-2/O · 1531
定价：30.00元

全美经典学习指导系列

微 积 分

〔美〕M.R.施皮格尔 著

施建兵 朱卓宇 冯玉英 孙越泓 译

科 学 出 版 社

麦格劳-希尔教育出版集团

2 0 0 2

内 容 简 介

本书在美国是最受欢迎的微积分教辅读物之一.

本书内容涵盖了一元和多元函数的微积分及其应用,并包括了无穷级数、广义积分、Γ函数、B函数、傅里叶积分、椭圆积分和复变函数等.

全书每章均先给出了相关的定义、原理和定理,然后分类给出了例题和补充习题.例题主要是针对学生的疑点和难点设计的,是对理论的解释和扩充.补充习题有助于学生对每章的内容进行系统地复习.

本书可供高等院校、理工科学生参考.

Murray R. Spiegel: Schaum's Outline of Theory and Problems of Advanced Calculus

ISBN:0-07-060229-8

图字:0-2001-1772 号

图书在版编目(CIP)数据

微积分/(美)施皮格尔(Spiegel, M. R.)著;施建兵等译.—北京:科学出版社,2002

(全美经典学习指导系列)

ISBN 7-03-009712-2

Ⅰ.微… Ⅱ.①施…②施… Ⅲ.微积分 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 064979 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

丙德印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年1月第一版 开本:A4 (890×1240)

2002年1月第一次印刷 印张:22

印数:1—5 000 字数:633 000

定价:30.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈北燕〉)

前　　言

对于通常称为"高等微积分"的教材,不同的人往往会有不同的要求.某些人会认为,该教材应从高等的观点,即用严谨的语言、严格的定理证明来阐述初等微积分.而另外一些人则会认为,该教材应讲述若干个专门的高等课题,这些课题既是重要的,又是初等微积分所没有涉及到的.

本书力图在这些截然不同的观点之间选取一个合理的折衷方案,以便具有广泛的适用性.本书前面几章对初等微积分中提过的基本概念作了回顾和拓展,这对那些先前学过微积分但现在有些遗忘并需要有点新鲜感的人来说是非常有价值的.它也为学过各类初等微积分课程的学生提供了一个共同的框架.本书后面几章介绍了几个专门的高等课题,这将为那些努力成为各自领域内的专家——科学家、工程师和数学家的人打下坚实的基础.

本书既可以作为当前标准教材的参考书,也可以作为高等微积分课程的正式教材.事实也证明,本教材对在物理、工程及其他众多使用高等数学方法的领域内选读课程的学生来说,也是十分有用的.

本书每一章都首先清楚地给出相关的定义、原理和定理以及例证和其他的说明,再分类给出习题解答和补充习题.习题解答主要是为了解决学生的疑问和困惑,因而既有对理论的解释和扩充,又有对至关重要的基本原理的复述.这类习题还包含了许多定理的证明和基本结论的推导.大量的补充习题及答案有助于学生对每一章的内容进行系统的复习.

本书内容包括一元和多元函数的微分学和积分学及其应用.本书还尽早引入并使用了向量方法,该方法既方便了简单记号的采用,也容易作出物理和几何的解释.专门课题包括线、面积分及其积分定理、无穷级数、广义积分、Γ函数和B函数、傅里叶级数等.附加的特色内容有傅里叶积分、椭圆积分和复变函数,这些内容在高等工程学、物理学和数学的研究中都是极为有用的.

本书包含了比其他大多数教材多得多的内容.这样使得本书使用起来更为灵活,也为读者提供了一本更为有用的参考书,同时还将激发读者更多的兴趣.

我要借此机会感谢 Schaum 出版公司的工作人员,感谢他们的热忱合作及无尽的努力,使本书得以完美出版.

M.R.施皮格尔

目　录

第一章　数

集合

集合的概念是数学的基础,集合是具有特定性质的事物的全体.比如全体的大学教授组成一个集合,所有的英文字母 $A,B,C,D,\cdots,Z$ 组成一个集合等等.集合中的每个个体称为集合的成员或元素,集合的任一部分称为这个集合的子集,如 A,B,C 是 $A,B,C,D,\cdots,Z$ 这个集合的子集.不包含任何元素的集合称为空集或零集.

实数

对学生来说,下面提到的数的类型都是熟悉的.

1. 自然数 1,2,3,4,…也称为正整数,常用来数一个集的元素.不同时代记号各不相同,如罗马人用Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,….任何两个自然数 a 和 b 的和 $a+b$ 及积 $a\cdot b$ 或 ab 也是自然数.为此我们常说自然数集合在加法和乘法运算下是封闭的,或说自然数集合关于这些运算具有封闭性.
2. 负整数和零分别用 −1, −2, −3,…和 0 表示.它们产生了 $x+b=a$ 这类方程的可能的解,其中 a 和 b 是任何的自然数.由此引出了减法运算,即加法的逆运算,我们把它记为 $x=a-b$.

   正整数,负整数和零组成的集合称为整数集.
3. 有理数或分数如 $\frac{2}{3},-\frac{5}{4},\cdots$,是由 $bx=a$ 这类方程的可能的解产生的.其中 a,b 是整数,$b\neq0$.由此引出了除法运算即乘法的逆运算,我们将它记为 $x=\frac{a}{b}$ 或 $a\div b$,其中 a 为分子,b 为分母.

   整数集是有理数集的子集,因为整数相应于分母 $b=1$ 的有理数.
4. 无理数如 $\sqrt{2}$ 和 π 是不属于有理数的那类数,即不能表示成 $\frac{a}{b}$(称为 a 和 b 的商),其中 a,b 是整数,$b\neq0$.

   有理数和无理数组成的集合称为实数集.

实数的小数表示

任何实数都可用十进制小数形式表示,比如 $\frac{17}{10}=1.7,\frac{9}{100}=0.09,\frac{1}{6}=0.16666\cdots$.在有理数情形,小数展开式或是有限位的,或是展开式中一个或一组数字最终将不断重复,永无止境,例如 $\frac{1}{7}=0.1428571428571428\cdots$.在无理数中如 $\sqrt{2}=1.41423\cdots$ 或 $\pi=3.14159\cdots$ 不会出现这种重复.我们总是把十进制小数展开式看成是无限位的,如 1.375 与 1.375000…或 1.374999…是相同的.为了表明循环小数,我们有时在循环重复的数字上方加上点,如 $\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$,$\frac{19}{6}=3.1\dot{6}$.

十进制使用 10 个数字 0,1,2,…,9,但也可能用更少或更多的数字设计数系,如二进制仅用 2 个数字 0 和 1(见习题 32 和习题 33).

实数的几何表示

实数看作是一直线上点的几何表示是众所周知的,我们称这条直线为实轴,如图 1-1 所示.对每一个实数在直线上有且仅有一个点与它对应,反之亦然,即实数集与直线上的点集之间存在一一对应.由于这个原因我们常能互换地使用点和数.

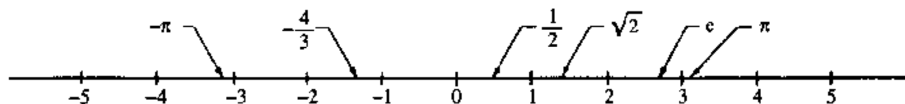


图 1-1

零右边的实数集称为正数集,零左边的实数集称为负数集,而零本身既不是正数也不是负数.

直线上任何两个有理数(或无理数)之间有无穷多个有理数(和无理数),故我们称有理数集(或无理数集)是处处稠密集.

实数的运算

如果 a,b,c 属于实数集 R,那么,

1. $a+b$ 和 ab 属于 R,　封闭律
2. $a+b=b+a$,　加法交换律
3. $a+(b+c)=(a+b)+c$,　加法结合律
4. $ab=ba$,　乘法交换律
5. $a(bc)=(ab)c$,　乘法结合律
6. $a(b+c)=ab+ac$,　分配律
7. $a+0=0+a=a, 1\cdot a=a\cdot 1=a$.
   0 称为关于加法的单位元,1 称为关于乘法的单位元.
8. 对任一实数 a,存在 R 中一个实数 x,满足 $x+a=0$.
   x 称为 a 关于加法的逆,记为 $-a$.
9. 对任一 $a\neq 0$,存在 R 中的一个数 x,满足 $ax=1$.
   x 称为 a 的倒数或 a 关于乘法的逆,记为 a^{-1} 或 $1/a$.

根据这些代数的一般规则我们就可以进行运算了.一般地,任何一个集合(比如 R),如果其元素满足上述运算性质,则称为一个域.

不等式

如果 $a-b$ 是一个非负数,那么我们称 a 大于或等于 b 或称 b 小于或等于 a,记为 $a\geqslant b$ 或 $b\leqslant a$.如果 $a=b$ 不可能成立,则我们记为 $a>b$ 或 $b<a$.几何上,如果在实轴上对应于 a 的点位于对应于 b 的点的右边,则 $a>b$.

例:$3<5$ 或 $5>3$;$-2<-1$ 或 $-1>-2$;$x\leqslant 3$ 指的是 x 为 3 或小于 3 的实数.

若 a,b,c 是任意给定的实数,则

1. 或是 $a>b$,或是 $a=b$,或是 $a<b$,　三分律
2. 若 $a>b, b>c$,则 $a>c$,　传递律
3. 若 $a>b$,则 $a+c>b+c$,
4. 若 $a>b, c>0$,则 $ac>bc$,
5. 若 $a>b, c<0$,则 $ac<bc$.

实数的绝对值

实数 a 的绝对值,用 $|a|$ 表示,定义为 a 若 $a>0$; $-a$ 若 $a<0$; 0 若 $a=0$.

例: $|-5|=5$, $|+2|=2$, $\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}$, $|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$, $|0|=0$.

1. $|ab|=|a|\cdot|b|$ 或 $|abc\cdots m|=|a|\cdot|b|\cdot|c|\cdots|m|$,
2. $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 或 $|a+b+c+\cdots+m|\leqslant|a|+|b|+|c|+\cdots+|m|$,
3. $|a-b|\geqslant|a|-|b|$.

实轴上任何两点(实数) a 和 b 之间的距离是 $|a-b|=|b-a|$.

指数和根

一实数 a 自身相乘 p 次后的积 $a\cdot a\cdots a$ 用 a^p 表示,其中 p 称为指数, a 称为底.下列法则成立:

1. $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$,　　3. $(a^p)^r=a^{pr}$,
2. $\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$,　　4. $\left(\frac{a}{b}\right)^p=\frac{a^p}{b^p}$.

只要分母不为零,上述 p,q,r 可推广到任意实数.特别地利用2,分别取 $p=q$ 和 $p=0$ 得 $a^0=1$, $a^{-q}=1/a^q$.

如果 $a^p=N$,其中 p 是正整数,则我们称 a 为 N 的 p 次根,记为 $\sqrt[p]{N}$, N 的 p 次实根可能不止一个.例如由于 $2^2=4$, $(-2)^2=4$,所以 4 有两个实平方根,2 和 -2,习惯上用 $\sqrt{4}=2$ 表示正的平方根,用 $-\sqrt{4}=-2$ 表示负的平方根.

若 p 和 q 是正整数,我们定义 $a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$.

对数

如果 $a^p=N$,则称 p 为以 a 为底的 N 的对数,记为 $p=\log_a N$.如果 a 和 N 是正的且 $a\neq1$,那么 p 仅有一个实值.对数具有下列运算规则:

1. $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$,　　2. $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$,
3. $\log_a M^r=r\log_a M$.

实际中常用 2 个数作为底.常用对数用底 $a=10$,纳皮尔系统(自然对数)用自然底 $a=e=2.71828\cdots$.

实数系的公理化基础

合乎逻辑地构建数系,能够开始于一组公理或来自于经验的"自明"的事实.例如第 4 页上的 1~9 条.

如果我们假定已知自然数及加法和乘法运算(尽管它甚至可能远早于集概念的出现),我们发现将 R 换成自然数时第 4 页上第 7~9 条不成立,但 1~6 条仍成立.

选取 7 和 8 条作为附加要求,我们引入数 $-1,-2,-3,\cdots$ 和 0,然后利用第 9 条,我们引入了有理数.

利用公理 1~6 条可定义关于这些新得到数的运算,其中 R 现在是整数集.这样就得到了像 $(-2)(-3)=6$, $-(-4)=4$, $(0)(5)=0$ 等在小学数学中认为是理所当然这样陈述的证明.

我们对整数也能引入序或不等式的概念,从而推广到有理数的不等式问题.例如若 a,b,c,d 是正整数,我们定义 $a/b>c/d$ 当且仅当 $ad>bc$.对负整数可作类似的推广.

一旦我们有了有理数集和关于它们的不等式规则,我们就能够在几何上作为实轴上的点

把它们排序,正如前面已指出的那样.然后我们可以证明在这条直线上存在着不能表示为有理数的点(如$\sqrt{2}$,π 等等).这些无理数可用各种不同方式定义,其中之一利用了戴德金(Dedekind)分割的思想(见习题 34),从这一点可说明关于无理数怎样应用代数的一般规则.关于实数就不作进一步的说明了.

点集,区间

位于实轴上的点(实数)集称为一维点集.

满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的 x 点集称为闭区间,用$[a,b]$表示;$a<x<b$ 集合称为开区间,用(a,b)表示;集合 $a<x\leqslant b$ 和 $a\leqslant x<b$,分别用$(a,b]$和$[a,b)$表示,称为半开半闭区间.

能表示一个集合中的任何数或任何点的记号 x 称为变量.给定的数 a 或 b 称为常量.

例:满足 $|x|<4$ 即 $-4<x<4$ 的全体 x 组成的集合表示为$(-4,4)$,是一个开区间.

集合 $x>a$ 也能表示成 $a<x<\infty$,这样的一个集合称为无穷或无界区间,类似地 $-\infty<x<+\infty$ 表示所有的实数 x.

可数性

一个集合称为是可数的,如果这个集合的元素与自然数构成 1-1 对应的关系.

例:偶自然数 2,4,6,8,…是可数集,因为有如下的 1-1 对应:

已知集	2	4	6	8	…
	↕	↕	↕	↕	
自然数	1	2	3	4	…

一个集合是无限的,如果它与它的一个子集构成 1-1 对应的关系.一个可数的无限集称为可数无限的.

有理数集是可数无限的,而无理数集或全体实数不是可数无限的(见习题 17~20).

集合中元素的个数称为它的基数.可数无限集的基数指定为$\aleph_0$(希伯来字母阿列夫零),实数集(或与实数集 1-1 对应的任何集)的基数定为 C,C 称为连续统的基数.

邻域

所有满足$|x-a|<\delta$ 的点 x 组成的集合称为 a 的一个 δ 邻域,其中 $\delta>0$.所有满足 $0<|x-a|<\delta$ 的点组成的集合称为 a 的一个去心 δ 邻域.这里 $x=a$ 点除去了.

极限点

若一数 l 的每一个去心 δ 邻域中都包含某一集合中的元素,则称 l 为这个集合的极限点或聚点.换句话说即对任何 $\delta>0$,无论 δ 多么小,总能找到这个集中不同于 l 的点 x,满足 $|x-l|<\delta$.考虑到越来越小的 δ 值,我们看到必有无穷多个这样的 x 值.

一有限集不可能有极限点,无限集可能有也可能没有极限点.自然数集没有极限点,而有理数集有无限多个极限点.

包含所有极限点的集合称为闭集.有理数集不是闭集,因为像极限点$\sqrt{2}$就不是这个集合的元素(见习题 5),但集合 $0\leqslant x\leqslant 1$ 是闭集.

界

如果对一个集合中的所有数 x,存在一个数 M,满足 $x\leqslant M$,则称这个集是上有界的,M 为它的一个上界.类似地,若 $x\geqslant M$,则这个集是下有界的,m 称为它的一个下界.如果对所有的 x 有 $m\leqslant x\leqslant M$,则称这个集是有界的.

如果数$\underline{M}$ 满足:这个集中没有一个元素比它大,但对每个 $\epsilon>0$,至少有一个元素超过 $\underline{M}-\epsilon$,则称$\underline{M}$ 为这个集的上确界(l.u.b).类似地如果这个集中没有一个元素比 $\overline{M}$ 小,但对

每个 $\varepsilon>0$,至少存在一个元素小于 $\overline{M}+\varepsilon$,则称 $\overline{M}$ 是这个集的下确界(g.l.b).

魏尔斯特拉斯-波尔察诺(Weierstrass-Bolzano)定理

魏尔斯特拉斯-波尔察诺定理:每个有界的无限集至少有一个极限点.这个定理的证明在第二章习题 23 中给出.

代数数和超越数

考虑方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0, \qquad (1)$$

其中 $a_0\neq0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是整数,n 为正整数,则称(1)式为整系数多项式方程.n 称为方程的次数.若一个数 x 是某个整系数多项式方程的解,则称这个数为代数数,不能成为一个整系数多项式方程的解的数称为超越数.

例:$\frac{2}{3}$ 和 $\sqrt{2}$ 分别是方程 $3x-2=0$ 和 $x^2-2=0$ 的解,因而它们都是代数数.

可以证明,数 π 和 e 是超越数.但我们还不能确定像 $e\pi$ 或 $e+\pi$ 这样的数是代数数还是超越数.

代数数的集合是一个可数的无限集(见习题 23),但超越数的集合是一个不可数的无限集.

复数系

由于没有一个实数 x 满足多项式方程 $x^2+1=0$ 或相类似的方程,所以引入了复数集.

我们可以把复数看作具有 $a+bi$ 这种形式,其中 a、b 是实数,分别称为这个数的实部和虚部,$i=\sqrt{-1}$ 称为虚数单位.两个复数 $a+bi$ 和 $c+id$ 是相等的当且仅当 $a=c,b=d$.只要在复数 $a+bi$ 中令 $b=0$ 即得实数,故我们可以把实数集看成是复数集的子集.复数 $0+0i$ 相当于实数.

$a+bi$ 的绝对值或模定义为 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.$a+bi$ 的共轭复数定义为 $a-bi$,复数 z 的共轭复数常用 $\bar{z}$ 或 z^* 表示.

复数集满足第 4 页上 1～9 条规则,因此构成一个域.在用复数进行运算时,我们可以像在实数代数中的运算一样进行运算,只要在 i^2 出现时用 -1 代替.复数的不等式没有定义.

从复数公理基础的观点来看,把一个复数处理成具有某种运算规则的实数 a 和 b 的序对 (a,b) 是合乎需要的,当然这些规则应该是等同于上面提到的那些规则.例如我们规定 $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$,$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$,$m(a,b)=(ma,mb)$,等等.我们发现 $(a,b)=a(1,0)+b(0,1)$,把这与 $a+bi$ 联系起来,i 相当于记号 $(0,1)$.

复数的极式

若在两条相互垂直的轴 $X'OX$ 和 $Y'OY$(x 轴和 y 轴)上选定了刻度,如图 1-2,我们可通过序对 (x,y),在这些线决定的平面上标出任何点的位置.称 (x,y) 为这个点的直角坐标.例如在图 2-1 中 P、Q、R、S、T 标明了这些点的位置.

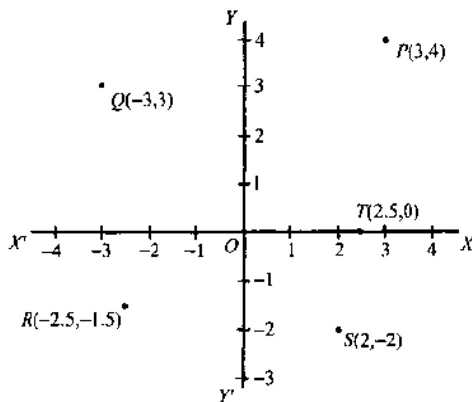


图 1-2

由于复数 $x+iy$ 可看成一个序对 (x,y),所以我们可以用 xy 平面上的点表示这种数,这种平面我们称为复平面.参照图 1-3,我们看到 $x=$

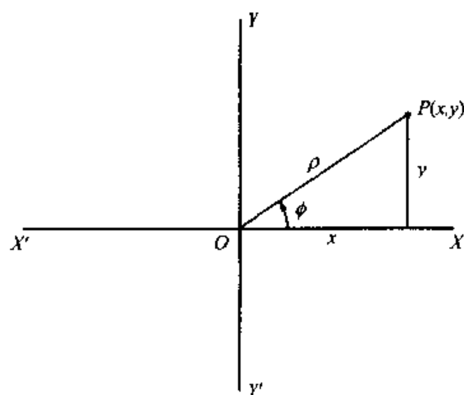


图 1-3

$\rho\cos\phi$, $y=\rho\sin\phi$,其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=|x+iy|$. ϕ 称为辐角,是指直线 OP 与轴 OX 正向构成的夹角,于是有

$$z = x + iy = \rho(\cos\phi + i\sin\phi), \tag{2}$$

称这种形式为复数的极式,其中 ρ 和 ϕ 称为极坐标.有时为方便起见将 $\cos\phi+i\sin\phi$ 记为 $\text{cis}\phi$.

如果 $z_1=x_1+iy_1=\rho_1(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)$, $z_2=x_2+iy_2=\rho_2(\cos\phi_2+i\sin\phi_2)$,那么有

$$z_1z_2 = \rho_1\rho_2\{\cos(\phi_1+\phi_2)+i\sin(\phi_1+\phi_2)\}, \tag{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\{\cos(\phi_1-\phi_2)+i\sin(\phi_1-\phi_2)\}, \tag{4}$$

$$z^n = \{\rho(\cos\phi+i\sin\phi)\}^n = \rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi), \tag{5}$$

其中 n 是任一实数,方程(5)有时称为棣莫弗(De-Moivre)定理.我们可利用这一式子确定复数的根.例如若 n 是一个正整数,则

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{n}} &= \{\rho(\cos\phi+i\sin\phi)\}^{1/n} \\ &= \rho^{1/n}\left\{\cos\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)\right\}, k=0,1,2,3,\cdots,n-1. \end{aligned} \tag{6}$$

由此可见,一般地 $z^{\frac{1}{n}}$ 有 n 个不同的值.后面(第十一章)将指出 $e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi$,其中 $e=2.71818\cdots$,称这为欧拉公式.

数学归纳法

数学归纳法原理是正整数的一个重要性质.在证明一个涉及所有正整数的命题时,例如当 $n=1,2,3$ 时已知命题是正确的,而对所有的整数猜测命题也是成立时,数学归纳法尤其有用.证明方法包含以下几步:

1. 证明 $n=1$(或 n 为其他某个正整数)时命题成立.
2. 假定 $n=k$ 时命题成立,其中 k 是任何正整数.
3. 从 2 中的假定出发证明 $n=k+1$ 时命题一定是成立的
   这是建立归纳的证明部分,或许是困难的或许是不可能的.
4. 由于 $n=1$ 时命题是正确的(从第 1 步).所以从第 3 步对 $n=1+1=2$ 命题一定是正确的,从这可得到 $n=2+1=3$ 时命题是正确的,等等,故对所有的正整数命题是正确的.

习题与解答

数的运算

1. 假定 $x=4$, $y=15$, $z=-3$, $p=\frac{2}{3}$, $q=-\frac{1}{6}$, $r=\frac{3}{4}$,计算(a) $x+(y+z)$,(b) $(x+y)+z$,(c) $p(qr)$,(d) $(pq)r$,(e) $x(p+q)$.

解 ☞ (a) $x+(y+z)=4+[15+(-3)]=4+12=16$.

(b) $(x+y)+z=(4+15)+(-3)=19-3=16$.

(a)与(b)相等这一个事实阐明了加法的结合律.

(c) $p(qr)=\frac{2}{3}\left\{\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\right\}=\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{24}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{2}{24}=-\frac{1}{12}$.

(d) $(pq)r=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)\right\}\left(\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{2}{18}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{1}{9}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{36}=-\frac{1}{12}$.

(c)与(d)相等这一事实阐明了乘法结合律.

(e) $x(p+q)=4\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)=4\left(\frac{4}{6}-\frac{1}{6}\right)=4\cdot\left(\frac{3}{6}\right)=\frac{12}{6}=2$.

另一解法: $x(p+q)=xp+xq=(4)\left(\frac{2}{3}\right)+(4)\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{8}{3}-\frac{4}{6}$

$$=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2\text{(利用乘法分配律)}.$$

2. 解释为什么不能把(a) $\frac{0}{0}$,(b) $\frac{1}{0}$看作是数?

解 ☞ (a) 如果我们把满足 $bx=a$ 的那个数(假定它是存在的)定义为$\frac{a}{b}$,那么 0/0 就是满足 $0\cdot x=0$ 的那个数 x,但是这对所有数都是成立的.由于没有惟一的一个数来表示 0/0,所以我们认为它不能定义为数.

(b) 正如(a)中一样,如果我们把 1/0 设为数 x(假定它存在),则需满足 $0\cdot x=1$,可见没有这样的数存在.

由于这些原因,我们必须把除以零看成是无意义的.

3. 化简$\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$.

解 ☞ 假定可约因子$(x-3)$不为零,即 $x\neq3$,则有$\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}=\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+1)}=\frac{x-2}{x+1}$;当 $x=3$ 时,已知分式是没有定义的.

有理数和无理数

4. 证明奇整数的平方是奇数.

证明 ☞ 任何奇整数可表为 $2m+1$ 形式,因$(2m+1)^2=4m^2+4m+1$ 比偶整数 $4m^2+4m=2(2m^2+2m)$多 1,故结果成立.

5. 证明任一有理数的平方均不会是 2.

证明 ☞ 设 p/q 是一有理数,它的平方为 2.其中 p/q 是最简式,即 p 和 q 除 ±1 外无其他的公共整数因子(有时我们称这样的整数是互素的),则$(p/q)^2=2$,$p^2=2q^2$,p^2 是偶数,由习题 4 得 p 是偶数,因为若 p 为奇数则p^2 也是奇数,从而 $p=2m$.

将 $p=2m$ 代入$p^2=2q^2$ 中得到 $q^2=2m^2$,于是 q^2 是偶数,从而 q 也是偶数.

这样 p 和 q 有公共的因子 2,与原假设矛盾.从而可得任一有理数的平方都不是 2.

6. 说出如何找一有理数,使它的平方任意地逼近于 2.

解 ☞ 我们限制在正有理数中进行讨论.由于$(1)^2=1$,$(2)^2=4$,所以我们可选择 1 和 2 之间的有理数,即 1.1,1.2,1.3,…,1.9.

由于$(1.4)^2=1.96$,$(1.5)^2=2.25$,所以我们可考虑 1.4 和 1.5 之间的有理数,即1.41,1.42,…,1.49.

继续使用这种方法,我们可得到越来越逼近的有理数近似值,即$(1.414213562)^2$ 比 2 小,而$(1.414213563)^2$比 2 大.

7. 已知方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$,其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是整数,a_0 和 a_n 不为 0,证明如果此方程有有理根 p/q,则 p 一定整除a_n,q 一定整除a_0.

证明 ☞ 由于 p/q 是方程的一个根,故我们可将其代入方程中,并用 q^n 乘等式两边,得

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}q+a_2p^{n-2}q+\cdots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0, \tag{1}$$

再用 p 除两边,得

$$a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}q+\cdots+a_{n-1}q^{n-1}=-\frac{a_nq^n}{p}. \tag{2}$$

因(2)式的左边是一个整数,故(2)式的右边也必须是一个整数,那么由 p 和 q 是互素的,p 不能整除 q^n,得 p 必须整除 a_n.

类似地,移动(1)式的第一项,并用 q 除等式两边,同理可说明 q 一定整除 a_0.

8. 证明$\sqrt{2}+\sqrt{3}$不是有理数

证明 ☞　若 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$,则 $x^2=5+2\sqrt{6}$, $x^2-5=2\sqrt{6}$,平方得 $x^4-10x^2+1=0$,由习题7知这个方程的有理根只可能是 ±1,而 ±1 不能满足方程,这就推出满足方程的根$\sqrt{2}+\sqrt{3}$不是有理数.

9. 证明任意两个有理数之间定有另一个有理数.

证明 ☞　若 a,b 是有理数,则$\frac{a+b}{2}$是介于 a 和 b 之间的有理数.

为了证明这一点,假定 $a<b$,两边同加上 a,得 $2a<a+b$, $a<\frac{a+b}{2}$.

类似地两边加 b,得 $a+b<2b$, $\frac{a+b}{2}<b$.

于是有 $a<\frac{a+b}{2}<b$.

为了证明$\frac{a+b}{2}$是有理数,设 $a=\frac{p}{q}$, $b=\frac{r}{s}$,其中 p,q,r,s 是整数,且 $q\neq0$, $s\neq0$,则$\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{ps}{qs}+\frac{qr}{qs}\right)=\frac{ps+qr}{2qs}$是有理数.

不等式

10. x 取什么值时不等式 $x+3(2-x)\geqslant4-x$ 成立?

解 ☞　要使不等式 $x+3(2-x)\geqslant4-x$ 成立,只要满足 $x+6-3x\geqslant4-x$, $6-2x\geqslant4-x$, $6-4\geqslant2x-x$, $2\geqslant x$,即 $x\leqslant2$.

11. x 取什么值时,不等式 $x^2-3x-2<10-2x$ 成立?

解 ☞　要使这个不等式成立,只要满足 $x^2-3x-2-10-2x<0$, $x^2-x-12<0$,或$(x-4)(x+3)<0$.

这最后的不等式仅在下列情形成立:

情形1:$x-4>0$ 且 $x+3>0$,即 $x>4$ 且 $x<-3$.这是不可能的,因为 x 不能既比4大,又比-3小.

情形2:$x-4<0$ 且 $x+3<0$,即 $x<4$ 且 $x>-3$,当$-3<x<4$时这是可以的.

因此对满足$-3<x<4$的点 x,此不等式成立.

12. 若 $a\geqslant0$, $b\geqslant0$,证明$\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab}$.

证明 ☞　常用的一种证法是通过假定要证的结果是成立的,由此进行正确的运算得出一个已知的结论,然后再逆推这些步骤(假定这是可行的),结论就得到了.

在这题中,由结论出发,随后得到 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$, $(a+b)^2\geqslant4ab$, $a^2-2ab+b^2\geqslant0$.即$(a-b)^2\geqslant0$.这是正确的.逆推这些步骤.即得要证的结果.

另一证法:由于$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant0$,所以有 $a-2\sqrt{ab}+b\geqslant0$,即$\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab}$.

这个结论可推广为$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是非负数,左、右两边分别称为数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的算术平均和几何平均.

13. 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是任意实数,证明施瓦茨(Schwarz)不等式

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).$$

证明 ☞　对任一实数 λ,有

$$(a_1\lambda+b_1)^2+(a_2\lambda+b_2)^2+\cdots+(a_n\lambda+b_n)^2\geqslant0,$$

展开,合并得到

$$A^2\lambda^2+2C\lambda+B^2\geqslant0, \tag{1}$$

其中

$$A=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2,B=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2,C=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n. \qquad (2)$$

现将(1)式写成

$$\lambda^2+\frac{2C}{A^2}\lambda+\frac{B^2}{A^2}\geqslant 0 \text{ 或 } \left(\lambda+\frac{C}{A^2}\right)^2+\frac{B^2}{A^2}-\frac{C^2}{A^4}\geqslant 0. \qquad (3)$$

但这最后一个不等式对所有实数 λ 成立当且仅当$\frac{B^2}{A^2}-\frac{C^2}{A^4}\geqslant 0$ 或 $C^2\leqslant A^2B^2$，利用(2)式，就得出了所要证的不等式.

14. 证明：对所有大于 1 的正整数 n，$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<1$.

证明 ☞　设 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$，则有$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}$，两式相减，$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}$，从而有 $S_n=1-\frac{1}{2^{n-1}}<1$.

指数，根和对数

15. 计算下列各式：

(a) $\frac{3^4\cdot 3^8}{3^{14}}=\frac{3^{4+8}}{3^{14}}=3^{4+8-14}=3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$

(b) $\sqrt{\frac{(5\cdot 10^{-6})(4\cdot 10^2)}{8\cdot 10^5}}=\sqrt{\frac{5\cdot 4}{8}\cdot\frac{10^{-6}\cdot 10^2}{10^5}}=\sqrt{2.5\cdot 10^{-9}}=\sqrt{25\cdot 10^{-10}}=5\cdot 10^{-5}$，即 0.00005.

(c) $\log_{2/3}\left(\frac{27}{8}\right)=x$，则$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{27}{8}=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$，即 $x=-3$.

(d) $(\log_a b)(\log_b a)=u$，令 $\log_a b=x$，$\log_b a=y$，假定 a、$b>0$，且 a、$b\neq 0$，则有

$$a^x=b,\ b^y=a \text{ 和 } u=xy.$$

因$(a^x)^y=a^{xy}=b^y=a$，所以有 $a^{xy}=a^1$，即 $xy=1$，这就是所要求的值.

16. 若 $M>0,N>0,a>0$，但 $a\neq 1$，证明 $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$.

证明 ☞　设 $\log_a M=x,\log_a N=y$，则有 $a^x=M,a^y=N$，因此

$$\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}\text{，即 }\log_a\frac{M}{N}=x-y=\log_a M-\log_a N.$$

可数性

17. 证明在 0 和 1 之间且包含 0 和 1 的所有有理数组成的集合是可数的.

证明 ☞　先写出分母是 2 的所有分式，然后写出分母是 3 的分式，…，像$\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6}$，…这种相等的分式仅写一次.那么与自然数之间有如下的 1-1 对应.

有理数	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$…
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
自然数	1	2	3	4	5	6	7	8	9…

因此在 0 和 1 之间(包含 0 和 1)的所有有理数组成的集合是可数的，且有基数$\aleph_0$ (见p.4).

18. 若 A 和 B 是两个可数集，证明 A 和 B 中所有元素组成的集合也是可数的.

证明 ☞　由于 A 是可数的，所以在 A 中的元素与自然数之间存在 1－1 对应，因此我们可用 a_1、a_2、a_3，…表示这些元素.

类似地，我们可用 b_1,b_2,b_3，…表示 B 中的元素.

情形 1　假若 A 中的元素均不同于 B 中的元素，我们可建立如下的 1－1 对应：

A 或B	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	…
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
自然数	1	2	3	4	5	6…	

因此由 A 和 B 中所有元素组成的集合也是可数的.

情形 2 若 A 中的一些元素与 B 中的一些元素相同,如习题 17 那样这些元素仅数一次,则属于 A 或 B 中的元素组成的集合是可数的.

由属于 A 或 B(或两者)中的所有元素组成的集合常称为 A 和 B 的并,用 $A\cup B$ 或 $A+B$ 表示.

由包含在 A 和 B 中的元素组成的集合称为 A 和 B 的交,记为 $A\cap B$ 或 AB. 若 A 与 B 是可数的,则 $A\cap B$ 也是可数的.

由在 A 中但不在 B 中的元素组成的集合记为 $A-B$. 若 $\bar{B}$ 表示不在 B 中的元素组成的集合,则我们也可记 $A-B=A\bar{B}$. 若 A 和 B 是可数的,则 $A-B$ 也是可数的.

19. 证明所有的正有理数集是可数的.

证明 ☞ 考虑所有 $x>1$ 的有理数,对每一个这样的有理数,我们可与 $(0,1)$ 上一个且仅有一个 $\frac{1}{x}$ 对应起来,即在大于 1 的所有有理数与 $(0,1)$ 上的所有有理数之间存在着一个 1－1 对应,由习题 17,后一个集合是可数的,从而所有大于 1 的有理数集也是可数的.

于是由习题 18 可推出由所有正有理数组成的集合是可数的(因为这是由两个可数集组成的,一个是在 0 和 1 之间的有理数集,一个是大于等于 1 的有理数集).

由此可见有理数集是可数的(见习题 59).

20. 证明 $[0,1]$ 上所有实数组成的集合是不可数的.

证明 ☞ $[0,1]$ 上的每一个实数有一个小数展开式 $0.a_1a_2a_3\cdots$,其中 $a_1,a_2,\cdots$ 是 $0,1,2,\cdots,9$ 中任一数,假定有限位小数如 0.7324 写成 0.732400…和 0.7323999…是相同的.

如果 $[0,1]$ 上的所有实数是可数的,那么这个集合与自然数之间可以建立如下的 1－1 对应.

$1\leftrightarrow 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots$

$2\leftrightarrow 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots$

$3\leftrightarrow 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots$

…

现在我们构造一数 $0.b_1b_2b_3b_4\cdots$,其中 $b_1\neq a_{11},b_2\neq a_{22},b_3\neq a_{33},b_4\neq a_{44},\cdots$,且在某个位置后的所有 b_i 不都是 9.

这个数,在 $[0,1]$ 中,且不同于上面列出的所有数,因此不在此列中,这与包含 $[0,1]$ 中的所有数的假设相矛盾.

由这矛盾推出 $[0,1]$ 上所有实数与自然数不能建立 1－1 对应,即 $[0,1]$ 上的实数集是不可数的.

极限点,界,魏尔斯特拉斯-波尔察诺定理

21. (a)证明数 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$ 组成的无限集是有界的.

(b)确定这个集的上确界(l.u.b)和下确界(g.l.b).

(c)证明 0 是这个集的极限点. (d)这个集是闭集吗? (e)这集是如何阐明魏尔斯特拉斯-波尔察诺定理?

解 ☞ (a)由于这个集合中的所有元素都小于 2,大于 -1,故这个集合是有界的,2 是它的一个上界,-1 是它的一个下界.

我们可找到更小的上界(如 $\frac{3}{2}$)和更大的下界(如 $-\frac{1}{2}$).

(b)由于这个集合中没有元素比 1 大,且对每一正数 ϵ,至少存在一个元素(也就是 1)超过 $1-\epsilon$,故 1 是这个集的上确界.

由于这个集中没有元素比 0 小,且对任一正数 ϵ,至少存在一个元素小于 $0+\epsilon$(为了达到这个目的,我们总能选到这样的数 $\frac{1}{n}$,其中 n 是大于 $\frac{1}{\epsilon}$ 的正整数). 故 0 是这个集的下确界.

(c)设 x 是这个集的任一元素,对任一正数 δ,由于我们总能找到满足 $0<|x|<\delta$ 的元素 x,(即我们总能选 x 为数 $\frac{1}{n}$,其中 n 是大于 $\frac{1}{\delta}$ 的正整数),故 0 是这个集的极限点,换句话说就是不管 $\delta>0$ 取得多

小,0 的去心 δ 邻域中总包含这个集中的元素.

(d)这个集不是闭集,因为极限点 0 不属于这个集合.

(e)由于这个集是有界和无限的,据魏尔斯特拉斯-波尔察诺定理它至少有一个极限点.我们发现这个集合确实属于这种情况,因而说明了这个定理.

代数数和超越数

22. 证明$\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$是代数数.

证明 ☞　设 $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$,则 $x-\sqrt{3}=\sqrt[3]{2}$,两边立方、化简得　$x^3+9x-2=3\sqrt{3}(x^2+1)$,然后两边平方、化简得 $x^6-9x^4-4x^3+27x^2+36x-23=0$.

由于这是一个整系数的多项式方程,所以它的一个解$\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$是代数数.

23. 证明所有的代数数组成的集合是一个可数集.

证明 ☞　代数数是形如 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 这样的多项式方程的解,其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是整数.

设 $P=|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_n|+n$,对任意给定的 P 值,仅可能有有限个多项式方程,于是仅可能有有限个代数数.

为避免重复,相应于 $P=1,2,3,4,\cdots$记下所有的代数数,这样所有的代数数与自然数之间可以构成 1-1 对应,因而它是可数的.

复数

24. 计算下列各式:

(a) $(4-2i)+(-6+5i)=4-2i-6+5i=4-6+(-2+5)i=-2+3i$.

(b) $(-7+3i)-(2-4i)=-7+3i-2+4i=-9+7i$.

(c) $(3-2i)(1+3i)=3(1+3i)-2i(1+3i)=3+9i-2i-6i^2$

$=3+9i-2i+6=9+7i$.

(d) $\dfrac{-5+5i}{4-3i}=\dfrac{-5+5i}{4-3i}\cdot\dfrac{4+3i}{4+3i}=\dfrac{(-5+5i)(4+3i)}{16-9i^2}=\dfrac{-20-15i+20i+15i^2}{16+9}$

$=\dfrac{-35+5i}{25}=\dfrac{5(-7+i)}{25}=-\dfrac{7}{5}+\dfrac{1}{5}i$.

(e) $\dfrac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i}=\dfrac{i-1+(i)^2(i)+(i^2)^2+(i^2)^2\cdot i}{1+i}=\dfrac{i-1-i+1-i}{1+i}$

$=\dfrac{i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}=\dfrac{i-i^2}{1-i^2}=\dfrac{i+1}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

(f) $|3-4i||4+3i|=\sqrt{(3)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{(4)^2+(3)^2}=(5)(5)=25$.

(g) $\left|\dfrac{1}{1+3i}-\dfrac{1}{1-3i}\right|=\left|\dfrac{1-3i}{1-9i^2}-\dfrac{1+3i}{1-9i^2}\right|=\left|\dfrac{-6i}{10}\right|=\sqrt{(0)^2+\left(-\dfrac{6}{10}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$.

25. 若 z_1,z_2 是两复数,证明$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$.

证明 ☞　设 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$.则

$$|z_1z_2|=|(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)|=|x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)|$$

$$=\sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}=\sqrt{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2}$$

$$=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}=|x_1+iy_1|\cdot|x_2+iy_2|$$

$$=|z_1|\cdot|z_2|.$$

26. 解方程 $x^3-2x-4=0$.

证明 ☞　利用习题 7,可能的有理根是 ±1、±2、±4,通过代入方程试验发现 $x=2$ 是方程的根,那么给定方程可以写成$(x-2)(x^2+2x+2)=0$.而二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解是$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,对 $a=1,b=2,c=2$,得 $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\dfrac{-2\pm2i}{2}=-1\pm i$.

故方程的解集是 $2, -1+i, -1-i$.

复数的极式

27. 用极式表示下列复数:(a) $3+3i$, (b) $-1+\sqrt{3}i$, (c) -1, (d) $-2-2\sqrt{3}i$.

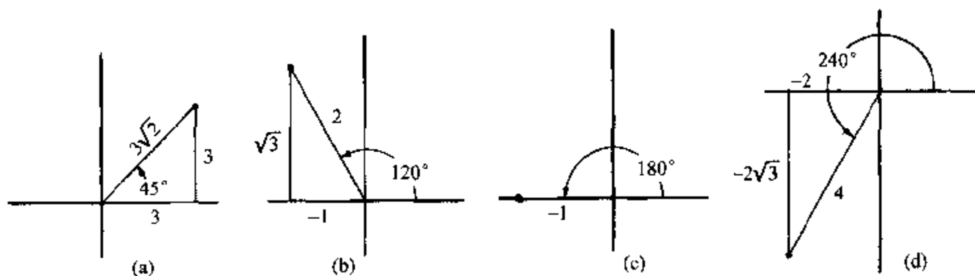


图 1-4

解 ☞ (a) 辐角 $\phi=45°=\frac{\pi}{4}$弧度,模 $\rho=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$,则

$$3+3i=\rho(\cos\phi+i\sin\phi)=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}=3\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}.$$

(b) 辐角 $\phi=120°=\frac{2\pi}{3}$弧度,模 $\rho=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{4}=2$,则

$$-1+3i=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}=2e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

(c) 辐角 $\phi=180°=\pi$ 弧度,模 $\rho=\sqrt{(-1)^2+(0)^2}=1$,则

$$-1=1(\cos\pi+i\sin\pi)=\operatorname{cis}\pi=e^{\pi i}.$$

(d) 辐角 $\phi=240°=\frac{4\pi}{3}$弧度,模 $\rho=\sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2}=4$,则

$$-2-2\sqrt{3}i=4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=4\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}=4e^{\frac{4\pi i}{3}}.$$

28. 计算:(a) $(-1+\sqrt{3}i)^{10}$, (b) $(-1+i)^{\frac{1}{3}}$.

解 ☞ (a) 由习题 27(b)和棣莫弗定理,

$$(-1+\sqrt{3}i)^{10}=\left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10}=2^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{3}+i\sin\frac{20\pi}{3}\right)$$

$$=1024\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}+6\pi\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+6\pi\right)\right]=1024\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=1024\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)=-512+512\sqrt{3}i.$$

(b) $-1+i=\sqrt{2}(\cos 135°+i\sin 135°)=\sqrt{2}[\cos(135°+k\cdot 360°)+i\sin(135°+k\cdot 360°)]$则$(-1+i)^{\frac{1}{3}}=(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\left[\cos\left(\frac{135°+k\cdot 360°}{3}\right)+i\sin\left(\frac{135°+k\cdot 360°}{3}\right)\right]$.

当 $k=0,1,2$ 时,结果是

$$\sqrt[6]{2}(\cos 45°+i\sin 45°),$$

$$\sqrt[6]{2}(\cos 165°+i\sin 165°),$$

$$\sqrt[6]{2}(\cos 285°+i\sin 285°).$$

对 $k=3,4,5,6,7\cdots$,结果与上面这些结果相重.在图 1-5 中的复平面上,圆周上的点 P_1,P_2,P_3 几何地表示了这些复根.

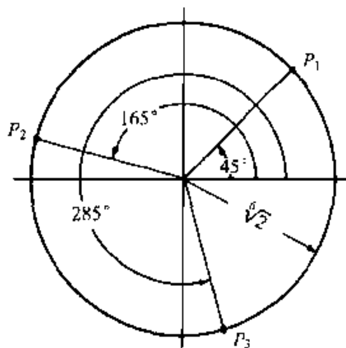


图 1-5

数学归纳法

29. 证明 $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

证明 ☞ 因 $1^2=\frac{1}{6}(1)(1+2)(2\cdot1+1)=1$,故 $n=1$ 时命题成立.

假设 $n=k$ 时命题是正确的,那么

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1).$$

两边加上$(k+1)^2$ 得

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\&=(k+1)\left[\frac{1}{6}k(2k+1)+k+1\right]\\&=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3).\end{aligned}$$

这表明当 $n=k$ 时命题是正确的,那么当 $n=k+1$ 时命题也是正确的,但由于 $n=1$ 时命题是正确的,所以对 $n=1+1=2$,对 $n=2+1=3,\cdots$,命题也是正确的,即对所有的正整数 n,它是正确的.

30. 证明对所有正整数 n,x^n-y^n 含有 $x-y$ 因子.

证明 ☞ 因 $x^1-y^1=x-y$,所以 $n=1$ 时命题是真的.

假定 $n=k$ 时命题是真的,即假定 x^k-y^k 中含有因子 $x-y$,考虑

$$\begin{aligned}x^{k+1}-y^{k+1}&=x^{k+1}-x^ky+x^ky-y^{k+1}\\&=x^k(x-y)+y(x^k-y^k),\end{aligned}$$

右边的第一项有 $x-y$ 因子,由上面的假设,右边的第二项也有 $x-y$ 因子,从而 $x^{k+1}-y^{k+1}$ 也含有 $x-y$ 因子.

那么由 x^1-y^1 有 $x-y$ 因子,有 x^2-y^2 含有 $x-y$ 因子。x^3-y^3 含有 $x-y$ 因子,等等,故结论成立.

31. 如果 $x>-1,x\neq0$,证明伯努利(Bernoulli)不等式$(1+l)^n>1+nx,n=2,3,\cdots$.

证明 ☞ 由于$(1+x)^2=1+2x+x^2>1+2x$,所以 $n=2$ 时命题成立

假定 $n=k$ 时命题成立,即$(1+x)^k>1+kx$.

两边同乘 $1+x$(因 $x>-1$,故 $1+x$ 是正的),那么有

$$(1+x)^{k+1}>(1+x)(1+kx)=1+(k+1)x+kx^2>1+(k+1)x.$$

于是若 $n=k$ 时命题成立,则 $n=k+1$ 时命题也成立.

但由于 $n=2$ 时命题成立,故 $n=2+1=3$ 命题一定成立,…,因此对所有大于等于 2 的正整数命题成立.

注意 $n=1$ 时这个结论不成立,但结论改成$(1+x)^n\geqslant1+nx$,对 $n=1,2,3,\cdots$都成立.

杂题

32. 证明每一个整数 P 可惟一地表示成

$P=a_0\cdot2^n+a_1\cdot2^{n-1}+a_22^{n-2}+\cdots+a_n$ 这种形式,其中 a_i 或是 1 或是 0,$i=0,1,2,\cdots,n$.

证明 ☞ 用 2 除 P,有 $P/2=a_0\cdot2^{n-1}+a_1\cdot2^{n-2}+\cdots+a_{n-1}+a_n/2$.那么 a_n 就是当P 被 2 除时得到的余数 0 或 1,且它是惟一的.

设 P_1 是$\frac{P}{2}$的整数部分,则 $P_1=a_02^{n-1}+a_1\cdot2^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$,用 2 除 P_1,我们看到 a_{n-1}就是当 P_1

被 2 除时得到的余数 0 或 1，且也是惟一的.

继续使用这种方法可得所有的 a_i 或是 0 或是 1，且都是惟一的.

33. 用习题 32 中的形式表示数 23.

解 ☞ 系数可以按如下方式确定：

```
2 )23
2 )11  余 1
 2 )5  余 1
 2 )2  余 1
 2 )1  余 0
    0  余 1
```

于是系数为 10111，检验，得 $23=1\cdot2^4+0\cdot2^3+1\cdot2^2+1\cdot2+1$ 成立.

在二进制中数 10111 就表示 23.

34. 戴德金在有理数当中定义了一种分割，它将所有的有理数分成两类——L 类（左手类）和 R 类（右手类），这两类具有以下的性质：

Ⅰ. 这两类是非重的（即每一类中至少有一个数）.

Ⅱ. 每个有理数只在其中的一个类中.

Ⅲ. L 中的每个数小于 R 中的每个数.

证明下列命题：

(a) 不可能出现这种情况：L 中有最大数，而 R 中有最小数.

(b) 若 L 中有最大数，而 R 中没有最小数，则在这种情形下此种分割定义什么类型的数？

(c) 若 L 中没有最大数，而 R 中有一最小数，则在这种情形下这种分割定义什么类型的数？

(d) 若 L 中没有最大数，而 R 中没有最小数，则这种分割又定义什么类型的数？

证明 ☞ (a) 设 a 是 L 中最大的有理数，b 为 R 中最小的有理数，则或者 $a=b$ 或者 $a<b$.

由分割的定义 L 中的每个数小于 R 中的每一个数，所以 $a=b$ 是不可能的.

又若 $a<b$，则由习题 9，$\frac{1}{2}(a+b)$ 是比 a 大（因此一定在 R 中），但比 b 小（因此一定在 L 中）的一个有理数，由定义，一个有理数不能同时属于 L 和 R 中，所以 $a<b$ 也是不可能的.

(b) 为了说明这种可能性. 不妨设 L 包含数 $\frac{2}{3}$ 和比 $\frac{2}{3}$ 小的所有有理数，而 R 包含所有比 $\frac{2}{3}$ 大的有理数，在这种情况下，这种分割定义了有理数 $\frac{2}{3}$. 用任何其他的有理数取代 $\frac{2}{3}$，同理可证明这种类型的分割定义一个有理数.

(c) 为了说明这种可能性，不妨设 L 包含所有比 $\frac{2}{3}$ 小的有理数，而 R 包含所有比 $\frac{2}{3}$ 大的有理数，这种分割也定义这个有理数 $\frac{2}{3}$，同理可证这种类型的分割定义一个有理数.

(d) 为了说明这种可能性，不妨设 L 是由所有平方小于 2 的正、负有理数组成的，而 R 是由所有平方大于 2 的正有理数组成. 我们可以证明如果 a 是 L 类中任一数，则总有 L 类中更大的一个数，而如果 b 是 R 类中的任一数，则总有 R 类中更小的数（见习题 106），这种类型的分割定义了一个无理数.

从(b)、(c)、(d)中可得出在有理数当中每一种分割（称为戴德金分割）定义了或是一个有理数或是一个无理数，利用戴德金分割我们可定义无理数的运算（比如加法、乘法等）.

补 充 习 题

数的运算

35. 已知 $x=-3, y=2, z=5, a=\frac{3}{2}, b=-\frac{1}{4}$，计算：

(a) $(2x-y)(3y+z)(5x-2z)$, (b) $\frac{xy-2z^2}{2ab-1}$, (c) $\frac{3a^2b+ab^2}{2a^2b^2+1}$,

(d) $\frac{(ax+by)^2+(ay-bx)^2}{(ay+bx)^2+(ax-by)^2}$.

36. 找出使下列各方程成立的 x 值,并证明所有的步骤是正确的:

(a) $4\{(x-2)+3(2x-1)+2(2x+1)\}=12(x+2)-2$,

(b) $\frac{1}{8-x}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{4}$,

(c) $\sqrt{x^2+8x+7}-\sqrt{2x+2}=x+1$,

(d) $\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+5}}=\frac{3}{5}$.

37. 证明$\frac{x}{(z-x)(x-y)}+\frac{y}{(x-y)(y-z)}+\frac{z}{(y-z)(z-x)}=0$并给出限制条件.

有理数和无理数

38. 求小数展开式(a) $\frac{3}{7}$, (b) $\sqrt{5}$.

39. 证明一个分母为 17,分子为 1,2,3,…,16 的分数在小数展开式的重复部分中有 16 个数字.在这些展开式中数字的顺序之间有关系吗?

40. 证明(a) $\sqrt{3}$, (b) $\sqrt[3]{2}$是无理数.

41. 证明(a) $\sqrt[3]{5}-\sqrt[4]{3}$, (b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$是无理数.

42. 确定一个正有理数,它的平方与 7 之差的绝对值不超过 0.000001.

43. 证明每个有理数可以表示成一个循环小数.

44. 求出满足下列方程的 x 值:

(a) $2x^3-5x^2-9x+18=0$, (b) $3x^3+4x^2-35x+8=0$, (c) $x^4-21x^2-4=0$.

45. 若 a,b,c,d 是有理数,m 不是一个完全平方,证明:$a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m}$当且仅当$a=c,b=d$.

46. 证明$\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{5}-2\sqrt{15}+14\sqrt{3}-7}{11}$.

不等式

47. 求出使下列各不等式成立的 x 值:

(a) $\frac{1}{x}+\frac{3}{2x}\geqslant 5$, (b) $x(x+2)\leqslant 24$, (c) $|x+2|<|x-5|$,

(d) $\frac{x}{x+2}>\frac{x+3}{3x+1}$.

48. 证明:(a) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$,(b) $|x+y+z|\leqslant|x|+|y|+|z|$,

(c) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$.

49. 证明:对所有的实数 x、y、z,$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+xz$.

50. 若 $a^2+b^2=1$,$c^2+d^2=1$,证明 $ac+bd\leqslant 1$.

51. 若 $x>0$,证明 $x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}>x^n+\frac{1}{x^n}$,其中 n 为任意正整数.

52. 证明对所有的实数 $a\neq 0$, $\left|a+\frac{1}{a}\right|\geqslant 2$.

53. 证明在施瓦兹(Schwarz)不等式(习题 13)中等式成立当且仅当 $a_p=kb_p$, $p=1,2,3,\cdots,n$,其中 k 为任意常数.

54. 若 a_1,a_2,a_3 是正的,证明$\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)\geqslant\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$.

指数,根和对数

55. 计算(a) $4^{\log_2 8}$, (b) $\frac{3}{4}\log_{1/8}\left(\frac{1}{128}\right)$, (c) $\sqrt{\frac{(0.00004)(25000)}{(0.02)^5(0.125)}}$,

(d) $3^{-2\log_3 5}$, (e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4/3}-(-27)^{-2/3}$.

56. 指明限制条件并证明(a) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$, (b) $\log_a M^r=r\log_a M$.

57. 给出限制条件并证明 $b^{\log_b a}=a$.

可数性

58. (a) 证明区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的点与区间 $-5\leqslant x\leqslant -3$ 上的点之间存在 1-1 对应. (b) 这些集的基数是什么?

59. (a)证明有理数集是可数的, (b) 这个集的基数是什么?

60. 证明(a) 实数集,(b) 无理数集是不可数的.

61. 两个集 A 和 B 的交集是同属于 A 和 B 的所有元素组成的集合.用 $A\cap B$ 或 AB 表示.证明若 A 和 B 是可数的,则它们的交集也是可数的.

62. 证明可数个可数集组成的集合是可数的.

63. 证明在一个正方形内的点集的基数等于在(a) 一边, (b) 四边上点集的基数. (c) 这种情形下基数是什么? (d) 对一个立方体相应的结果成立吗?

极限点,界,魏尔斯特拉斯-波尔察诺定理

64. 已知数集 1,1.1,0.9,1.01,0.99,1.001,0.999,…,(a) 这集有界吗? (b) 这集有上确界和下确界吗? 若有,确定它们. (c) 这集有极限点吗? 若有,确定它们. (d) 这集是闭集吗?

65. 已知集为 −0.9,0.9,−0.99,0.99,−0.999,0.999,…,回答 64 题中的问题.

66. 举出满足下列条件的集合例子:

(a) 有 3 个极限点, (b) 没有极限点.

67. (a) 证明区间 $0<x<1$ 上的每一点都是极限点.

(b) 有不属于这个集合的极限点吗? 证明你的答案.

68. 设 S 是(0,1)中分母为 2^n($n=1,2,3,\cdots$)的所有有理数的集合,(a) S 有极限点吗? (b) S 是闭集吗?

69. (a) 列举一个有极限点但无界的集合例子.

(b) 这与魏尔斯特拉斯-波尔察诺定理矛盾吗? 请解释.

代数数和超越数

70. 证明(a) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, (b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$是代数数.

71. 证明(0,1)中超越数组成的集合是不可数的.

72. 证明每个有理数都是代数数,但一个无理数不一定是代数数.

复数,极式

73. 计算:

(a) $2(5-3i)-3(-2+i)+5(i-3)$, (b) $(3-2i)^3$, (c) $\dfrac{5}{3-4i}+\dfrac{10}{4+3i}$,

(d) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{10}$, (e) $\left|\dfrac{2-4i}{5+7i}\right|^2$, (f) $\dfrac{(1+i)(2+3i)(4-2i)}{(1+2i)^2(1-i)}$.

74. 若 z_1 和 z_2 是复数,证明:(a) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, (b) $|z_1|^2=|z_1^2|$.并给出等式成立的条件.

75. 证明:(a) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$, (b) $|z_1+z_2+z_3|\leqslant|z_1|+|z_2|+|z_3|$,

(c) $|z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|$.

76. 求出方程 $2x^4-3x^3-7x^2-8x+6=0$ 的所有解.

77. 在复平面上点 P_1,P_2 分别表示 z_1,z_2,作线段 OP_1 和 OP_2,其中 O 是原点,说明 z_1+z_2 可用 P_3 点表示,其中 OP_3 是以 OP_1,OP_2 为邻边的平行四边形的对角线,称这为复数加法的平行四边形定律.由于这个性质及其他一些性质,复数可看成是二维向量.

78. 从几何角度解释习题 75 中的不等式.

79. 将下列复数表成极式:

(a) $3\sqrt{3}+3i$, (b) $-2-2i$, (c) $1-\sqrt{3}i$, (d) 5, (e) $-5i$.

80. 计算:(a) $[2(\cos 25°+i\sin 25°)][5(\cos 110°+i\sin 110°)]$,

(b) $\dfrac{12\operatorname{cis}16°}{(3\operatorname{cis}44°)(2\operatorname{cis}62°)}$.

81. 确定所有的根,并在图上表示出来:

(a) $(4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i)^{1/3}$, (b) $(-1)^{1/5}$, (c) $(\sqrt{3}-i)^{1/3}$, (d) $i^{1/4}$.

82. 证明 $-1+3i$ 是代数数.

83. 若 $z_1=\rho_1\operatorname{cis}\phi_1$,$z_2=\rho_2\operatorname{cis}\phi_2$,证明:(a) $z_1z_2=\rho_1\rho_2\operatorname{cis}(\phi_1+\phi_2)$, (b) $z_1/z_2=(\rho_1/\rho_2)\operatorname{cis}(\phi_1-\phi_2)$,并解释

几何意义.

数学归纳法

证明下列命题:

84. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

85. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

86. $a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+[a+(n-1)d]=\frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$.

87. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

88. $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}, r\neq1$.

89. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

90. $1(5)+2\cdot(5)^2+3\cdot(5)^3+\cdots+n(5)^{n-1}=\frac{5+(4n-1)5^{n-1}}{16}$.

91. $x^{2n-1}+y^{2n-1}$可以被 $x+y$ 整除,$n=1,2,3,\cdots$.

92. $(\cos\phi+i\sin\phi)^n=\cos n\phi+i\sin n\phi$. 如果 n 为有理数,这个等式可以证明吗?

93. $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}, x\neq0,\pm2\pi,\pm4\pi,\cdots$.

94. $\sin x-\sin 2x+\cdots-\sin nx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}, x\neq0,\pm2\pi,\pm4\pi,\cdots$.

95. $(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_{n-1}^nab^{n-1}+b^n$,

其中 $C_n^r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!\ (n-r)!}=C_n^{n-r}$,这里 $p!=p(p-1)\cdots1, 0!=1$,称此为二项式定理,系数 $C_n^0=1, C_n^1=n, C_r^2=\frac{n(n-1)}{2!},\cdots,C_n^n=1$ 称为二项式系数. C_n^r 也可记为 $\binom{n}{r}$.

杂题

96. 用指定的记数法表示下列整数(十进制记数法),并验证答案.

(a) 87(2),(b) 64(3),(c) 1736(9).

97. 如果一个数在五进制记数法中是 144,则在(a) 二进制,(b) 八进制记数法中这个数是多少?

98. 证明在 0 和 1 之间的有理数 p/q 可以表成

$$\frac{p}{q}=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}+\cdots,$$

其中 a_i 可以被惟一地确定为 0 或 1.这个过程不一定可以终止.将这种表示 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$称为这个有理数的二进制形式.[提示:两边连续用 2 乘,考虑余数.]

99. 分别在(a) 二进制,(b) 三进制,(c) 八进制,(d) 十进制记数法中表示$\frac{2}{3}$.

100. 在二进制记数法中一个数是 11.01001,则在十进制下这个数是多少?

101. 在什么记数法中有 3+4=12?

102. 在十二进制记数法中,二个增加的记号 t 和 e 用来特指数字 10 和 11.用这些记号在十二进制记数法中表示整数 5110(十进制记数法).

103. 求一有理数,它的小数展开式是 1.636363⋯.

104. 在十进制记数法中一个数是由 6 个数字组成的,如果把最后一个数字放到第一个数字的前面,这个新的数是原来的 1/3,求出原来的数.

105. 证明有理数形成一个域.

106. 将第 4 页上 1~9 式作为公理,证明:

(a) $(-3)(0)=0$, (b) $(-2)(+3)=-6$, (c) $(-2)(-3)=6$.

107. (a) 如果 x 是一个平方小于 2 的有理数,证明 $x+(2-x^2)/10$ 是一个更大的有理数.(b) 如果 x 是一个平方大于 2 的有理数,根据 x 找一个更小的有理数,它的平方大于 2.

108. 说明你将怎样利用戴德金分割定义:

(a) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$, (b) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, (c) $(\sqrt{3})(\sqrt{2})$, (d) $\sqrt{2}/\sqrt{3}$.

第二章　函数，极限与连续

函数

函数是两个集合之间建立的一种对应规则.现在我们仅考虑实数集,若假定 x 变量的每一个值都与 y 变量的一个或多个值相对应,则称 y 为 x 的函数,记为 $y=f(x)$, $y=G(x)$, $\cdots$, 字母 f, G, $\cdots$为这个函数的记号,而 $f(a)$, $G(a)$, $\cdots$表示函数在 $x=a$ 的函数值.

x 允许取的值组成的集合称为函数的定义域或简称为函数的域,x 称为自变量,y 称为因变量.

如果定义域中的每一个 x 值仅与一个 y 值相对应,则称这个函数为单值的,如果定义域中存在某个 x 与多个 y 值相对应,则称这个函数是多值的.由于一个多值函数可看成是由一些单值函数组成的,所以无特别指明我们将假定函数是单值的.

例 1:如果对 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 中的每一个值与用 x^2 给定的一个数 y 相对应,则在 x 与 x^2 之间的对应定义了一个单值函数 f.

f 的定义域是 $-1\leqslant x\leqslant 1$.在 x 的函数值用 $y=f(x)=x^2$ 给定.例如 $f(-1)=(-1)^2=1$ 是函数在 $x=-1$处的函数值.

例 2:1800 年后的每个时间 t,我们可联系到美国人口的一个数值 P.这种在 P 和 t 之间建立的一种对应定义了一个单值函数,称为 F,并把它记为 $P=F(t)$.

例 3:若 $y^2=x$,其中 $x>0$,那么对每个 x 对应两个 y 值,因此 y 是 x 的二值函数.我们把这个函数考虑成两个单值函数 f 和 g,其中 $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=-\sqrt{x}$.

注意尽管一个函数常像例 1 和例 3 那样利用一个公式定义的,但不一定都是这样的,正如在例 2 中看到的那样.

为方便起见,我们常将函数 f 在 x 处的值 $f(x)$ 而不是 f 说成是函数,但这种区别应该记住.

函数的图像

用 $y=f(x)$ 定义的函数图像是函数的一种图形表示,它可以在直角坐标系下通过描出用数对 (x,y) 或 $(x,f(x))$ 确定的点而得到.

有界函数

若存在一个常数 M,对一个区间(或其他一个数集)上的所有 x 有 $f(x)\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在这个区间(这个集合)上是上有界的,称 M 为这个函数的一个上界.

若存在一个常数 m,对一个区间上的所有 x 有 $f(x)\geqslant m$,则称 $f(x)$ 在这个区间上是下有界的,称 m 为这个函数的一个下界.

若在一个区间上有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$,则称 $f(x)$ 是有界的.当我们要指明一个函数有界时,我们常将它记为 $|f(x)|<P$.

例 1:$f(x)=3+x$ 在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上是有界的,上界是 4(或大于 4 的任何数),下界是 2(或小于 2 的任何数).

例 2:$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $0<x<4$ 是无界的,因为可通过选择充分接近于 0 的 x,使 $f(x)$ 达到我们期望的任意大的值,故不存在上界,然而下界是 $\dfrac{1}{4}$(或比 $\dfrac{1}{4}$ 小的任何数).

若 $f(x)$ 有一个上界,则它有一个上确界(l. u. b.);若它有一个下界,则它有一个下确界(g. l. b.).(看第一章中有关的这些定义.)

单调函数

设 $f(x)$是定义在某一区间上的函数,若对这个区间上的任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$在这个区间上是单调递增的.若 $f(x_1)<f(x_2)$,则称这个函数为严格单调递增的.

类似地,若当 $x_1<x_2$ 时,$f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$是单调递减的,而若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$是严格递减的.

反函数,主值

如果 y 是x 的函数,用 $f(x)$表示,那么 x 是y 的函数,用 $x=f^{-1}(y)$表示,称为这个函数的反函数.互换 x 和y 的位置则得到$y=f^{-1}(x)$.

如果 $f(x)$是单值的,$f^{-1}(x)$是多值的,在这种情况下它可以看成是多个单值函数的合成,每个单值函数称为它的一个分支.为方便讨论常选择这些分支中的一个分支,称其为主值分支并用 $f^{-1}(x)$表示,此时这个反函数的值称为主值.

例:由函数 $y=\sin x$ 引出了 $y=\arcsin x$,它是一个多值函数,由于它对 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 中的每个 x,有许多的 y 值相对应.若将 $\arcsin x$ 限制在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$上,则函数变成单值函数,在这种情况下$\arcsin\left(\frac{-1}{2}\right)$的主值为 $-\frac{\pi}{6}$.

最大值和最小值

设 x_0 是一个区间上的一点,x 是这个区间上的其他点,若满足 $f(x)<f(x_0)$[或 $f(x)>f(x_0)$],则称 $f(x)$在这个区间有最大值(或最小值)$f(x_0)$.若对 x_0 的去心 δ 邻域中的x[即对满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的x]有 $f(x)<f(x_0)$[或 $f(x)>f(x_0)$],则称$f(x)$在 x_0 处有极大值(或极小值).

函数类型

1. 多项式函数具有形式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,\tag{1}$$

其中 $a_0,\cdots,a_n$ 是常数,n 是正整数.若 $a_0\neq0$,则 n 称为这个多项式的次数.

代数基本定理表明每个多项式方程 $f(x)=0$ 至少有一根.由此可证明如果多项式次数是 n,则这个方程恰有 n 个根(重数为 r 的重根按r 个根计数).

2. 代数函数是满足如下形式方程

$$P_0(x)y^n+P_1(x)y^{n-1}+\cdots+P_{n-1}(x)y+P_n(x)=0\tag{2}$$

的函数 $y=f(x)$,其中 $P_0(x),\cdots,P_n(x)$是关于 x 的多项式.

如果这个函数可表示成两个多项式的商,即 $P(x)/Q(x)$,其中 $P(x)$,$Q(x)$是多项式,则称它为有理代数函数,否则称它为无理代数函数.

3. 超越函数就是不是代数函数的那些函数,即不满足方程(2)形式的那些函数.

注意与实数类比,多项式相应于整数,有理函数相应于有理数,等等.

特殊的超越函数

有时称下列函数为初等超越函数:

1. 指数函数:$f(x)=a^x$,$a>0$,$a\neq1$,有关它的性质参看 p.3.

2. 对数函数:$f(x)=\log_a x$,$a>0$,$a\neq1$.此函数与指数函数互为反函数.如果

$a=e=2.71828\cdots$,则称这个函数为 x 的自然对数,记为 $f(x)=\log_e x=\ln x$,e 称为对数的自然底.关于它的性质参看 p.3.

3. 三角函数:

$$\sin x,\cos x,\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\csc x=\frac{1}{\sin x},\sec x=\frac{1}{\cos x},\cot x=\frac{1}{\tan x}=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

变量 x 一般用弧度表示(π 弧度 $=180°$).

对于实数 x,$\sin x$ 和 $\cos x$ 在$[-1,1]$内.

下面是这些函数的一些性质:

$\sin^2 x+\cos^2 x=1,1+\tan^2 x=\sec^2 x,1+\cot^2 x=\csc^2 x$,

$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y,\sin(-x)=-\sin x$,

$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y,\cos(-x)=\cos x$,

$\tan(x\pm y)=\dfrac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\cdot\tan y},\tan(-x)=-\tan x$.

4. 反三角函数:下面列出的是反三角函数和它们的主值:

(a) $y=\arcsin x,\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$,　(b) $y=\arccos x,(0\leqslant y\leqslant\pi)$,

(c) $y=\arctan x,\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$,　(d) $y=\operatorname{arccsc} x=\arcsin\dfrac{1}{x},\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$,

(e) $y=\operatorname{arcsec} x=\arccos\dfrac{1}{x},(0\leqslant y\leqslant\pi)$,(f) $y=\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}-\arctan x,(0<y<\pi)$.

5. 双曲函数:依据指数函数定义如下:

(a) $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$,　(b) $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,

(c) $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$,(d) $\operatorname{csch} x=\dfrac{1}{\sinh x}=\dfrac{2}{e^x-e^{-x}}$,

(e) $\operatorname{sech} x=\dfrac{1}{\cosh x}=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$,(f) $\coth x=\dfrac{\cosh x}{\sinh x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

这些函数具有以下性质:

$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1,1-\tanh^2 x=\operatorname{sech}^2 x,\coth^2 x-1=\operatorname{csch}^2 x$,

$\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y,\sinh(-x)=-\sinh x$,

$\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y,\cosh(-x)=\cosh x$,

$\tanh(x\pm y)=\dfrac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm\tanh x\tanh y}$,　$\tanh(-x)=-\tanh x$.

6. 反双曲函数:若 $x=\sinh y$,则 $y=\operatorname{arsinh} x$ 是 x 的反双曲正弦.下面依据自然对数及所取的实数值范围列出了这些反双曲函数的主值:

(a) $\operatorname{arsinh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,　(b) $\operatorname{arcosh} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),x\geqslant1$,

(c) $\operatorname{artanh} x=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right),|x|<1$,　(d) $\operatorname{arcsch} x=\ln\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right),x\neq0$,

(e) $\operatorname{arsech} x=\ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x},0<x\leqslant1$,(f) $\operatorname{arcoth} x=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right),|x|>1$.

函数的极限

设 $f(x)$在 x_0 附近(除 x_0 以外)(即在 x_0 的去心 δ 邻域中)有定义,并且是单值函数,若对任意正数 ε(无论多小),都可以找到某个正数 δ(通常依赖于 ε),当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-l|<\varepsilon$,则称 l 为$f(x)$当 x 趋近x_0 时的极限,记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$.此时,我们也称当 x 趋近x_0 时 $f(x)$趋近 l,记为当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to l$.

换句话说这实际上指的是我们可通过选择充分接近 x_0 的 x，即选择使 x 与 x_0 的差的绝对值足够地小(但不是 0，即排除 $x=x_0$)，使 $f(x)$ 与 l 差的绝对值任意地小.

例：设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 若\ x\neq 2,\\ 0, & 若\ x=2,\end{cases}$ 那么当 x 越来越接近 2 时(即 x 趋近 2)，$f(x)$ 越来越接近 4，于是我们猜测 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$. 为证明这一点，我们必须看它是否满足上面的极限定义($l=4$). 关于这个问题的证明(见习题 10).

注意由定义 $f(2)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)\neq f(2)$，即当 $x\to 2$ 时 $f(x)$ 的极限与 $x=2$ 处的函数值不相同. 事实上即使 $f(x)$ 在 $x=2$ 处无定义，函数极限仍为 4.

当函数极限存在时，它是惟一的，即它仅有一个(见习题 17).

右极限和左极限

在极限的定义中有关 x 怎样趋近 x_0 没有作出任何限制，但是有时限制这种趋近是有利的. 将 x 和 x_0 作为实轴上的点来考虑，其中 x_0 是固定点. x 是动点，那么 x 可以从右侧或左侧趋近 x_0，我们用记号 $x\to x_0^+$ 和 $x\to x_0^-$ 分别表示这两种趋近.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=l_1$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=l_2$，则称 l_1 和 l_2 分别为 $f(x)$ 在 x_0 的右极限和左极限，分别表示为 $f(x_0+)$ 或 $f(x_0+0)$ 和 $f(x_0-)$ 或 $f(x_0-0)$. 当 $x\to x_0^+$ 或 $x\to x_0^-$ 时 $f(x)$ 极限的 ϵ-δ 定义，除了 x 值分别限制为 $x>x_0$ 或 $x<x_0$ 外其余与 $x\to x_0$ 时的极限定义是相同的.

于是我们有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=l$.

极限的定理

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A+B$，
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)-\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A-B$，
3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=(\lim\limits_{x\to x_0}f(x))(\lim\limits_{x\to x_0}g(x))=AB$，
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$ (若 $B\neq 0$).

有关右极限和左极限，类似的结果也成立.

无穷大

有时会出现这种情况，当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 无限地增大或减小，此时我们习惯地记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$. 记号 $+\infty$(也记为 ∞)和 $-\infty$ 分别读作正无穷大(无穷大)和负无穷大，但必须强调的是它们不是数.

用精确语言来描述就是：若对每个正数 M，都可找到一正数 δ(一般依赖于 M)，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>M$，则称 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$. 类似地，若对每个正数 M，都可找到一个正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)<-M$，则称 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$. 相仿的记号可应用到 $x\to x_0^+$ 或 $x\to x_0^-$ 中.

当 x 无限增大或无限减少时，习惯上分别记为 $x\to+\infty$(或 ∞)或 $x\to-\infty$，我们常常希望考察函数的变化趋势.

若对任一正数 ϵ，可找到一正数 N(一般依赖于 ϵ)，当 $x>N$ 时满足 $|f(x)-l|<\epsilon$，则称 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$，或称当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to l$. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 可套用类似的定义.

特殊极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$,

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$,

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=1$.

连续

设 $f(x)$在 $x=x_0$ 附近及 $x=x_0$ 处(即在 x_0 的一个 δ 邻域内)有定义且是单值函数,若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续.注意为了使 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续必须满足三个条件:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$ 必须存在,
2. $f(x_0)$必须存在,即 $f(x)$在 x_0 处有定义,
3. $l=f(x_0)$.

若 $f(x)$在 x_0 处连续,我们可建议等同地写成 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$.

例 1:若 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\neq 2\\ 0, \quad x=2\end{cases}$,则由 p.22 的例子,$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$,但 $f(2)=0$,因此 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)\neq f(2)$,从而函数在 $x=2$ 处不连续.

例 2:若对所有的 x,$f(x)=x^2$,则 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)=4$,并且 $f(x)$在 $x=2$ 处连续.

使 $f(x)$不连续的那些点称为 $f(x)$的间断点,称 $f(x)$在这些点处间断.

在画一个连续函数的图形时,铅笔不需要离开纸,而对一个不连续函数来说,一般地由于有一个跳跃发生,因此画的时候情形就不同了.当然这仅仅是连续或不连续的一个特性而不是一种定义.

用 ϵ 和 δ 的定义替换上面连续的定义,可这样叙述:若对任意 $\epsilon>0$,都可找到一个 $\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时满足 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$,则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续.注意简单地说就是在极限定义中令 $l=f(x_0)$,并且将 $x\neq x_0$ 的限制条件去掉.

右连续和左连续

若 $f(x)$仅在 $x\geqslant x_0$ 处有定义,则上面的定义不能应用.此时,如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,即 $f(x_0^+)=f(x_0)$,那么称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处右连续.类似地,若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,即 $f(x_0^-)=f(x_0)$,则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处左连续.可用 ϵ-δ 语言给出上述定义.

区间上的连续性

一个函数称为在一个区间上是连续的,如果它在这个区间上的所有点处连续.特别地,如果 $f(x)$定义在一个闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 或$[a,b]$上,则 $f(x)$在这个区间上连续当且仅当对 $a<x_0<b$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$.

连续性定理

定理 1 若 $f(x)$和 $g(x)$在 $x=x_0$ 处连续,则函数 $f(x)+g(x)$,$f(x)-g(x)$,$f(x)\cdot g(x)$和$\frac{f(x)}{g(x)}$也在 $x=x_0$ 处连续,最后一个$\frac{f(x)}{g(x)}$要求 $g(x_0)\neq 0$,在一个区间上连续有类似

的结论.

定理 2 下列函数在每个有限区间上是连续的:(a) 所有的多项式;(b) $\sin x$ 和 $\cos x$;(c) $a^x, a>0$.

定理 3 如果 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处连续,$z=g(y)$在 $y=y_0$ 处连续,$y_0=f(x_0)$,那么这个函数 $z=g[f(x)]$(称为复合函数)在 $x=x_0$ 处连续.有时简单地陈述为:两个连续函数的复合函数是连续的.

定理 4 若 $f(x)$在一闭区间上连续,则它在这个区间上有界.

定理 5 若 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续,且 $f(x_0)>0$(或 $f(x_0)<0$),则存在一个关于 x_0 的区间,在这个区间内有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

定理 6 若 $f(x)$在一区间上连续,且或者是严格递增或者是严格递减,则反函数$f^{-1}(x)$是单值、连续,且或者是严格递增或者是严格递减.

定理 7 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续,$f(a)=A$,$f(b)=B$,则相应于 A 与 B 之间的任一数 C,在$[a,b]$上至少存在一数 c,使得$f(c)=C$.有时称这个定理为介值定理.

定理 8 若 $f(x)$在$[a,b]$上是连续的,且 $f(a)$与 $f(b)$异号,则至少存在一点 c,使得 $f(c)=0$,其中 $a<c<b$.这与定理 7 有关.

定理 9 如果 $f(x)$在一闭区间上是连续的,那么 $f(x)$在这个区间上至少有一点取得最大值 M,至少有一点取得最小值 m.进一步可推得 $f(x)$在这个区间的一点或多点处取得介于 m 和M 之间的任一值.

定理 10 若 $f(x)$在一闭区间上是连续的,M 和 m 分别是$f(x)$的上确界和下确界,则在这个区间上至少存在一点使得 $f(x)=M$ 或$f(x)=m$.这与定理 9 相关.

分段连续

设一个函数在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有定义,如果这个区间可分成有限个子区间,而在每个子区间内函数是连续的,在区间端点有有限的右极限和左极限,则称这函数在这个区间上是分段连续的.这样的函数仅有有限个不连续点.在图 2-1 中列举了一个 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的分段连续函数的例子,这个函数在 x_1,x_2,x_3 和 x_4 处间断.

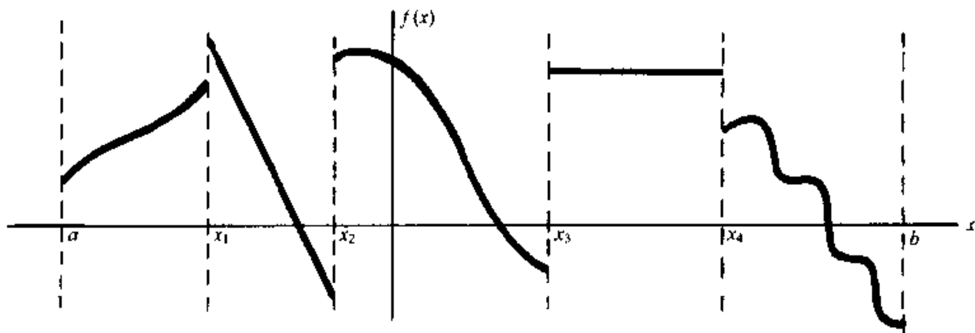


图 2-1

一致连续

设 $f(x)$在一区间上是连续的,那么由定义对这个区间上的每个 x_0 及任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$(一般 δ 依赖于ε 和特定的点x_0),当$|x-x_0|<\delta$ 时有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立.如果对每个 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对区间上所有的点上面的式子均成立(即如果 δ 仅依赖于ε,而不依赖于 x_0),则称 $f(x)$在这个区间上是一致连续的.

也可以这么说,如果对任意的 $\varepsilon>0$,可找到 $\delta>0$,当$|x_1-x_2|<\delta$ 时有$|f(x_1)-f(x_2)|$

$<\varepsilon$ 成立,其中 x_1 和 x_2 是这区间上的任两点,则 $f(x)$在这个区间上是一致连续的.

定理　如果 $f(x)$在一闭区间上是连续的,则它在这个区间上是一致连续的.

习题与解答

函数

1. 设 $f(x)=(x-2)(8-x),2\leqslant x\leqslant 8$,(a) 求 $f(6)$和 $f(-1)$, (b) 求 $f(x)$的定义域, (c) 求 $f(1-2t)$及它的定义域, (d) 求 $f[f(3)],f[f(5)]$, (e) 画出 $f(x)$的图形.

解 ☞　(a) $f(6)=(6-2)(8-6)=4\cdot 2=8$.

由于 $f(x)$仅对 $2\leqslant x\leqslant 8$ 给出定义,故 $f(-1)$没有定义.

(b) 定义域为 $2\leqslant x\leqslant 8$.

(c) $f(1-2t)=\{(1-2t)-2\}\{8-(1-2t)\}=-(1+2t)(7+2t)$,其中 t 满足 $2\leqslant 1-2t\leqslant 8$,即 $-\frac{2}{7}\leqslant t\leqslant -\frac{1}{2}$.

(d) $f(3)=(3-2)(8-3)=5,f[f(3)]=f(5)=(5-2)(8-5)=9$.

因 $f(5)=9$,故 $f[f(5)]=f(9)$没有定义.

(e) 下表为 x 取不同值时的函数值

x	2	3	4	5	6	7	8	2.5	7.5
$f(x)$	0	5	8	9	8	5	0	2.75	2.75

描出点(2,0),(3,5),(4,8),(5,9),(6,8),(7,5),(8,0),(2.5,2.75),(7.5,2.75).

这些点在图 2-2 中标出,是所画图形上的无穷多个点中的几个点.所有这些点确定一条曲线,它是一抛物线的一部分.

2. 已知 $g(x)=(x-2)(8-x),2<x<8$,(a) 讨论 $g(x)$的图形与习题 1 中 $f(x)$的图形的不同之处.(b) $g(x)$的上确界和下确界是什么? (c) 在定义域内 $g(x)$能达到上确界和下确界吗? (d) 对习题 1 中的 $f(x)$回答问题(b)和(c).

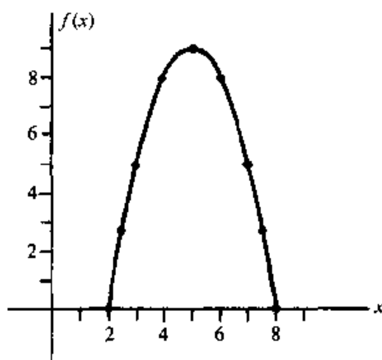


图 2-2

解 ☞　(a) 由于 $g(x)$在 $x=2$ 和 $x=8$ 处没有定义,所以 $g(x)$的图形除了将习题 1 中 $f(x)$图形上的两点(2,0)和(8,0)去掉外其余都相同.

(b) $g(x)$的上确界是 9,下确界是 0.

(c) $g(x)$在 $x=5$ 处达到上确界.因为在定义域中没有值 x 满足$g(x)=0$,所以 $g(x)$不能达到下确界.

(d) $f(x)$的上确界是 9,下确界是 0. $f(x)$在 $x=5$ 处达到上确界,在 $x=2$ 和 $x=8$ 处达到下确界.

注意一个在闭区间上连续的函数(如 $f(x)$)在这个区间的某些点处能达到它的上确界和下确界,但是一个在闭区间上不连续的函数(如 $g(x)$)就不一定能达到它的上确界和下确界,见习题 34.

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}1,若\ x\ 是有理数,\\0,若\ x\ 是无理数,\end{cases}$ (a) 求 $f\left(\frac{2}{3}\right),f(-5),f(1.41423),f(\sqrt{2})$, (b) 画出 $f(x)$的图形并解释为什么它自身会引起误导.

解 ☞　(a) 因$\frac{2}{3}$是一有理数,故 $f\left(\frac{2}{3}\right)=1$.

因 -5 是一有理数,故 $f(-5)=1$.

因 1.414123 是一有理数,故 $f(1.414123)=1$.

因$\sqrt{2}$是一无理数,故 $f(\sqrt{2})=0$.

(b) 在图 2-3 中画出了这个函数的图形. 从它的表面看, 相应于每个 x 值都有两个函数值 0 和 1, 即 $f(x)$ 是多值函数, 而实际上它是单值函数.

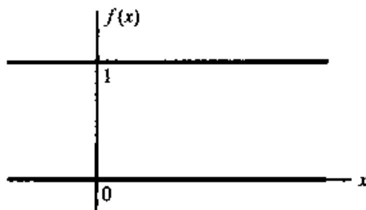


图 2-3

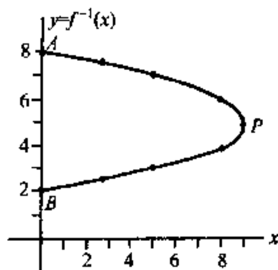


图 2-4

4. 关于习题 1, (a) 作出 $f^{-1}(x)$ 的图形, (b) 求出 $f^{-1}(x)$ 的表达式并说明 $f^{-1}(x)$ 不是单值函数.

解☞ (a) 函数 $y=f(x)$ 或 $x=f^{-1}(y)$ 的图形已在习题 1(e) 中的图 2-2 中表出. 为了得到 $y=f^{-1}(x)$ 的图形, 我们仅需交换 x 轴和 y 轴, 用通常的方式确定轴的方向后就得到了图 2-4 中显示的这个图.

(b) 我们有 $y=(x-2)(8-x)$ 或 $x^2-10x+16+y=0$.

用二次求根公式

$$x=f^{-1}(y)=\frac{10\pm\sqrt{100-4(16+y)}}{2}=5\pm\sqrt{9-y}.$$

于是, $y=f^{-1}(x)=5\pm\sqrt{9-x}$.

在图中, AP 表示 $y=5+\sqrt{9-x}$, BP 表示 $y=5-\sqrt{9-x}$, 因此对 $0\leqslant x\leqslant 9$ 中的每一值 x, $f^{-1}(x)$ 有两个值. 几何上可看到位于 P 的左侧、AB 的右侧的每一垂线与这图形交于两点.

函数 $5+\sqrt{9-x}$ 和 $5-\sqrt{9-x}$ 代表 $f^{-1}(x)$ 的两支, 两支相交的点(或有相同值的点)有时称为支点. 在这题中支点为 $x=9, y=5$.

5. (a) 证明 $g(x)=5+\sqrt{9-x}$ 在 $0\leqslant x\leqslant 9$ 上是严格递减的.

(b) 在这个区间上它是单调减少的吗? (c) $g(x)$ 有一单值反函数吗?

解☞ (a) 如果当 $x_1<x_2$ 时有 $g(x_1)>g(x_2)$, 则 $g(x)$ 是严格递减的. 现设 $x_1<x_2$, 那么 $9-x_1>9-x_2$, $\sqrt{9-x_1}>\sqrt{9-x_2}$, $5+\sqrt{9-x_1}>5+\sqrt{9-x_2}$, 这表明 $g(x)$ 是严格递减的.

(b) 是的, 任何严格递减函数也是单调递减的, 因为如果 $g(x_1)>g(x_2)$, 则必有 $g(x_1)\geqslant g(x_2)$. 但是如果 $g(x)$ 是单调递减的, 则它不一定是严格递减的.

(c) 如果 $y=5+\sqrt{9-x}$, 那么 $y-5=\sqrt{9-x}$, 两边平方得 $x=-16+10y-y^2=(y-2)(8-y)$, x 是 y 的单值函数, 即 $g(x)$ 的反函数是单值函数.

一般地, 任何严格递减(或递增)的函数有一个单值的反函数(见 p.24 定理 6).

几何上可用习题 4 的图形来解释这个问题的结论.

6. 作出函数图形: (a) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$

(b) $f(x)=[x]=$ 小于等于 x 的最大整数.

解☞ (a) 在图 2-5 中表出了所需的图形. 由于 $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x|$, 因此这个图介于 $y=x$ 与 $y=-x$ 之间. 注意当 $\sin\dfrac{1}{x}=0$ 或 $\dfrac{1}{x}=m\pi$, $m=1,2,3,4,\cdots$, 即 $x=\dfrac{1}{\pi},\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{3\pi},\cdots$ 时, $f(x)=0$, 曲线在 $x=\dfrac{1}{\pi}$ 和 $x=0$ 之间无限地振荡.

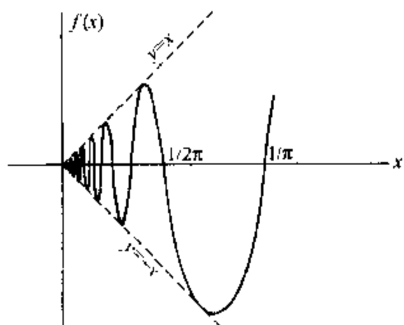


图 2-5

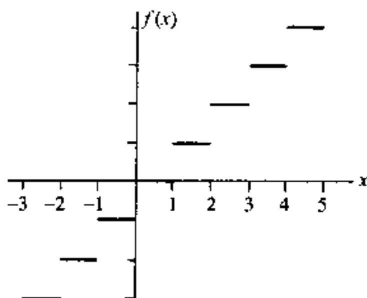


图 2-6

(b) 在图 2-6 中表出了所要的图形. 如果 $1\leqslant x<2$ 则 $[x]=1$,于是有 $[1.8]=1,[\sqrt{2}]=1,[1.99999]=1$,然而 $[2]=2$. 类似地对 $2\leqslant x<3,[x]=3$ 等等,从而函数在整数处有一跳跃. 这样的函数有时称为阶梯函数.

7. (a) 作出 $f(x)=\tan x$ 的图形,(b) 作出 $\arctan x$ 的图形,(c) 几何上说明为什么 $\arctan x$ 是多值函数,(d) 为 $\arctan x$ 指出可能的主值,(e) 用你的选择计算 $\arctan(-1)$.

解 ☞　(a) $f(x)=\tan x$ 的图表示在图 2-7 中.

(b) 若 $y=f(x)=\tan x$,则 $x=f^{-1}(y)=\arctan y$,于是通过(a)中的图形交换 x 轴与 y 轴得到 $f^{-1}(x)=\tan^{-1}(x)$ 的图形. 像通常一样给 x 轴、y 轴确定方向,其结果显示在图 2-8 中.

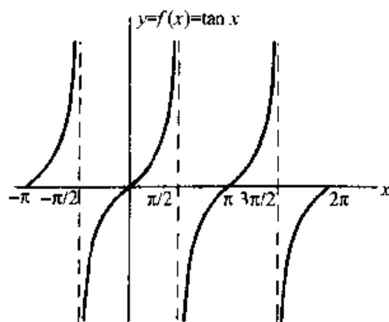


图 2-7

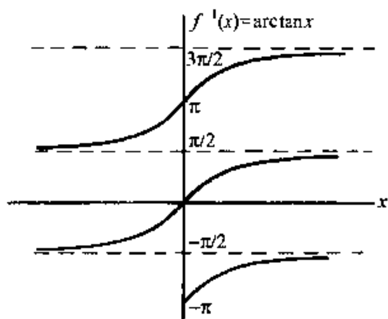


图 2-8

(c) 在(b)题的图 2-8 中,任何垂直线交图形于无穷多个点. 因此 $\arctan x$ 是具有无穷多个分支的多值函数.

(d) 为了将 $\arctan x$ 定义成单值函数,从图上看很显然只要将它的值限制在下列范围中的任何一个就可以了: $-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{3\pi}{2}$,等等. 我们将选第一个定义它的主值.

注意在任何一支上, $\arctan x$ 都是具有单值反函数的严格递增函数.

(e) $\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$ 是介于 $-\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 之间仅有的值,即根据(d)中的选择. 它就是主值.

8. 证明 $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{x+1}(x\neq-1)$ 是一个无理代数函数.

证明 ☞　如果 $y=\frac{\sqrt{x}+1}{x+1}$,那么 $(x+1)y-1=\sqrt{x}$,平方得 $(x+1)^2y^2-2(x+1)y+1-x=0$,一个关于 y 的多项式方程,它的系数都是关于 x 的多项式,因此 $f(x)$ 是一个代数函数. 但是它不是两个多项式的商,因此它是一个无理代数函数.

9. 若 $f(x)=\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$,证明我们可选 $\operatorname{arcosh} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),x\geqslant1$ 作为反函数的主值.

证明 ☞ 如果 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，$e^{2x}-2ye^x+1=0$，那么用二次求根公式，

$$e^x=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2-4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2-1}，于是有\ x=\ln(y\pm\sqrt{y^2-1})$$

由于 $y-\sqrt{y^2-1}=(y-\sqrt{y^2-1})\left(\frac{y+\sqrt{y^2-1}}{y+\sqrt{y^2-1}}\right)=\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}$．因此也可写成 $x=\pm\ln(y+\sqrt{y^2-1})$ 或 $\operatorname{arcosh}y=\pm\ln(y+\sqrt{y^2-1})$．

选正号来定义主值，并用 x 取代 y，则 $\operatorname{arcosh}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$．要求 $x\geqslant1$ 是为了确保反函数是实值的．

极限

10． 若(a) $f(x)=x^2$，(b) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq2,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 证明 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=4$．

证明 ☞ (a) 要证的是对任给的 $\varepsilon>0$，能找到 $\delta>0$（一般依赖于 ε），当 $0<|x-2|<\delta$ 时有 $|x^2-4|<\varepsilon$ 成立．

选择 $\delta\leqslant1$，这样 $0<|x-2|<1$ 或 $1<x<3$，$x\neq2$ 那么 $|x^2-4|=|(x-2)(x+2)|=|x-2||x+2|<\delta\ x+2\ <5\delta$

取 δ 为 1 和 $\varepsilon/5$ 中小的一个，那么当 $0<|x-2|<\delta$ 时，$|x^2-4|<\varepsilon$ 成立．从而证明了所需结论．

考察某些数据是有趣的．例如我们希望 $|x^2-4|<0.05$，则我们可选择 $\delta=\varepsilon/5=0.05/5=0.01$．为了看出确是这样的，注意如果 $0<|x-2|<0.01$，那么 $1.99<x<2.01(x\neq2)$，因此 $3.9601<x^2<4.0401$，$-0.0399<x^2-4<0.0401$，当然有 $|x^2-4|<0.05(x^2\neq4)$．这些不等式在 $x=2$ 处成立仅仅是一种巧合．

如果希望 $|x^2-4|<6$ 成立，那么可选择 $\delta=1$，这个不等式将成立．

(b) 这种情形的证明与(a)题没什么区别，因为这两种情形都排除了 $x=2$ 这一点．

11． 证明：$\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}=8$．

证明 ☞ 要证的是对任意 $\varepsilon>0$，可找到 $\delta>0$，使得 $0<|x-1|<\delta$ 时有 $\left|\frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}-(-8)\right|<\varepsilon$．由于 $x\neq1$，所以我们可写成 $\frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}=\frac{(2x^3-4x^2-3x-3)(x-1)}{x-1}=2x^3-4x^2-3x-3$，约去了公因子 $x-1\neq0$

于是我们要证的是对任意 $\varepsilon>0$，可找到 $\delta>0$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时有 $|2x^3-4x^2-3x+5|<\varepsilon$ 成立．选 $\delta\leqslant1$，我们有 $0<x<1$，$x\neq1$．

现 $|2x^3-4x^2-3x+5|=\ x-1\ |2x^2-2x-5|<\delta|2x^2-2x-5|<\delta(|2x^2|+|2x|+5)<(8+4+5)\delta=17\delta$，取 δ 为 1 和 $\varepsilon/17$ 中小的一个，就证得了结果．

12． 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{|x-3|}{x-3}, & x\neq3,\\ 0, & x=3,\end{cases}$ (a) 作出图形，(b) 求 $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)$，(c) 求 $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)$，(d) 求 $\lim\limits_{x\to3}f(x)$．

解 ☞ (a) 对 $x>3$，$\frac{|x-3|}{x-3}=\frac{x-3}{x-3}=1$，

对 $x<3$，$\frac{|x-3|}{x-3}=\frac{-(x-3)}{x-3}=-1$，

那么图 2-9 表示的这个图由直线 $y=1$，$x>3$；$y=-1$，$x<3$ 和点(3,0)组成．

(b) 当 x 从右边趋向于 3 时 $f(x)\to1$，即 $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=1$．从图上看是很明显的．为了证明这一点，我们需证的是对任给的 $\varepsilon>0$，可找到 $\delta>0$，当 $0<x-1<\delta$ 时有 $|f(x)-1|<\varepsilon$ 成立．

现在因 $x>1$ 时，$f(x)=1$，故对任一正数 δ，当 $0<x-1<\delta$ 时，$|1-1|<\varepsilon$ 始终成立，因此结果得证．

(c) 当从左侧 $x\to3$ 时，$f(x)\to-1$，即 $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=-1$．证法和(b)题中的一样．

(d) 因 $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to3^-}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to3}f(x)$ 不存在．

13. 证明$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

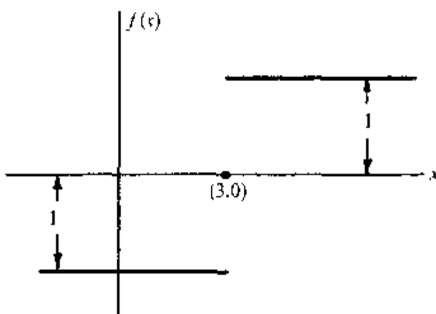


图 2-9

证明 ☞　要证的是对任给的 $\varepsilon>0$,可找到 $\delta>0$,当 $0<|x-0|<\delta$ 时有 $\left|x\sin\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ 成立.

如果 $0<|x|<\delta$,那么 $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|=|x|\cdot\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x|<\delta$,因为对任意的 $x\neq0$,$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$.

令 $\delta=\varepsilon$,当 $0<|x|<\delta$ 时,有 $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|<\varepsilon$,从而完成了证明.

14. 计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{1+e^{-1/x}}$.

解 ☞　当 $x\to0^+$ 时,我们推测$\dfrac{1}{x}$无限增大,$e^{\frac{1}{x}}$无限增大,$e^{-\frac{1}{x}}$趋近于 0,$1+e^{-\frac{1}{x}}$趋近于 1,从而所求极限为 2.

为了证明这个推测,我们要证的是对给定的 $\varepsilon>0$,可找到 $\delta>0$,当 $0<|x|<\delta$ 时有 $\left|\dfrac{2}{1+e^{-\frac{1}{x}}}-2\right|<\varepsilon$ 成立.

现在 $\left|\dfrac{2}{1+e^{-\frac{1}{x}}}-2\right|=\left|\dfrac{2-2-2e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{1}{x}}}\right|=\dfrac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

由于对所有的 x,右边的函数比 1 小,所以当 $\varepsilon\geqslant1$ 时,任何的 δ 都能使上述不等式成立.如果 $0<\varepsilon<1$,那么当$\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{2}>\dfrac{1}{\varepsilon}$,$e^{\frac{1}{x}}>\dfrac{2}{\varepsilon}-1$,$\dfrac{1}{x}>\ln\left(\dfrac{2}{\varepsilon}-1\right)$,即 $0<x<\dfrac{1}{\ln(2/\varepsilon-1)}=\delta$ 时,有$\dfrac{2}{e^{\frac{1}{x}}+1}<\varepsilon$ 成立.

15. 精确地解释$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(x-1)^4}=\infty$指的是什么意思,并证明这个式子是正确的.

解 ☞　这个式子指的是对任何正数 M,可找到一正数 δ(一般依赖于 M),当 $0<|x-1|<\delta$ 时有 $\dfrac{1}{(x-1)^4}>M$ 成立.

为了证明这一点,注意到 $0<(x-1)^4<\dfrac{1}{M}$或

$$0<|x-1|<\frac{1}{\sqrt[4]{M}}\ 时有\ \frac{1}{(x-1)^4}>M.$$

取 $\delta=1/\sqrt[4]{M}$,所要结果成立.

16. 给出$\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ 的一个几何证明.

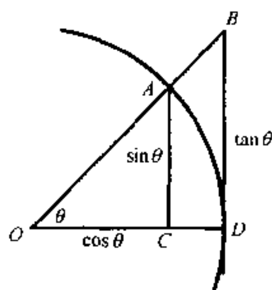


图 2-10

证明 ☞　作一个圆,圆心在 O 点,半径 $OA=OD=1$,如图 2-10.在 OA 的延长线上取一点 B,OD 上取一点 C,使得 BD 和 AC 垂直于 OD.

几何上明显有

三角形 OAC 的面积<扇形 OAD 的面积<三角形 OBD 的面积.

即　$$\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta<\frac{1}{2}\theta<\frac{1}{2}\tan\theta.$$

用$\dfrac{1}{2}\sin\theta$ 除各式,得

$$\cos\theta<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

或　$$\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<\frac{1}{\cos\theta}.$$

当 $\theta\to0$ 时,$\cos\theta\to1$,则$\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ 成立.

极限的定理

17. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,证明它一定是惟一的.

证明 ☞ 要证的是若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l_1$ 和$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l_2$,则 $l_1=l_2$.由假设,对任给的 $\varepsilon>0$,可找到 $\delta>0$,使得

当$0<|x-x_0|<\delta$时, $|f(x)-l_1|<\varepsilon/2$,

当$0<|x-x_0|<\delta$时, $|f(x)-l_2|<\varepsilon/2$.

那么由 p.3 不等式 2,

$$|l_1-l_2|=|l_1-f(x)+f(x)-l_2|\leqslant|l_1-f(x)|+|f(x)-l_2|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即$|l_1-l_2|$比任何的正数 ε(无论多小)都小,因此它必须为 0,从而 $l_1=l_2$.

18. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B\neq 0$,证明存在 $\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时有$|g(x)|>\frac{1}{2}|B|$成立.

证明 ☞ 由于$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则我们可找到 $\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时有$|g(x)-B|<\frac{1}{2}|B|$.

记 $B=B-g(x)+g(x)$,我们有

$$|B|\leqslant|B-g(x)|+|g(x)|<\frac{1}{2}|B|+|g(x)|,$$

即$|B|<\frac{1}{2}|B|+|g(x)|$,由此得$|g(x)|>\frac{1}{2}|B|$.

19. 已知$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,证明(a) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=A+B$,

(b) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=AB$, (c) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{B}$,若 $B\neq 0$,

(d) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$,若 $B\neq 0$.

证明 ☞ (a) 要证的是对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,有$|[f(x)+g(x)]-(A+B)|<\varepsilon$.

利用 p.3 的不等式 2,我们有

$$|[f(x)+g(x)]-(A+B)|=|[f(x)-A]+[g(x)-B]|\leqslant|f(x)-A|+|g(x)-B|. \tag{1}$$

由假设,给定 $\varepsilon>0$,可找到 $\delta_1>0$ 和 $\delta_2>0$,使得

当$0<|x-x_0|<\delta_1$时, $|f(x)-A|<\varepsilon/2$, (2)

当$0<|x-x_0|<\delta_2$时, $|g(x)-B|<\varepsilon/2$. (3)

取 δ 为δ_1,δ_2 中小的一个,那么由(1),(2),(3)式有

$$|[f(x)+g(x)]-(A+B)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

(b)
$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-AB|&=|f(x)[g(x)-B]+B[f(x)-A]|\\&\leqslant|f(x)||g(x)-B|+|B||f(x)-A|\\&\leqslant|f(x)||g(x)-B|+(|B|+1)|f(x)-A|.\end{aligned} \tag{4}$$

因$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,故存在 $\delta_1>0$,当$0<|x-x_0|<\delta_1$时,$|f(x)-A|<1$,即 $A-1<f(x)<A+1$,因此 $f(x)$是有界的,即$|f(x)|<P$,其中 P 是一个正常数.

因$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,故给定 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_2>0$,当$0<|x-x_0|<\delta_2$时,$|g(x)-B|<\varepsilon/2P$.

由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,给定 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_3>0$,当$0<|x-x_0|<\delta_3$时,$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}$.

将这些式子用到(4)式中,我们有当$0<|x-x_0|<\delta$时,

$$|f(x)g(x)-AB|<P\cdot\frac{\varepsilon}{2P}+(|B|+1)\cdot\frac{\varepsilon}{|B|+1}=\varepsilon,$$

其中 δ 为 δ_1, δ_2 和 δ_3 中最小的一个,从而完成了证明.

(c) 要证的是对任意的 $\epsilon>0$,可找到 $\delta>0$,当

$$0<|x-x_0|<\delta\text{时,有}\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}\right|=\frac{|g(x)-B|}{|B|\cdot|g(x)|}<\epsilon\text{成立}. \tag{5}$$

由假设,给定 $\epsilon>0$,存在 $\delta_1>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时,有 $|g(x)-B|<\frac{1}{2}B^2\epsilon$.

由习题 18,因 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B\neq0$,则存在 $\delta_2>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时,有 $|g(x)|>\frac{1}{2}|B|$.

那么若 δ 比 δ_1 和 δ_2 都小,则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}\right|=\frac{|g(x)-B|}{|B|\cdot|g(x)|}<\frac{\frac{1}{2}B^2\epsilon}{|B|\cdot\frac{1}{2}|B|}=\epsilon$,

从而证明了所要结论.

(d) 由(b)和(c)得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}$$

$$=A\cdot\frac{1}{B}=\frac{A}{B}.$$

这个结论也可直接证明(见习题 69).

在 $x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$ 下也可证明上面的结论.

注意,在(a)的证明中,我们利用结果 $|f(x)-A|<\epsilon/2$ 和 $|g(x)-B|<\epsilon/2$,以便最后得到 $|f(x)+g(x)-(A+B)|<\epsilon$. 当然如果我们用 2ϵ(或其他 ϵ 的正数倍)取代 ϵ,这个证明也是正确的. 对(b),(c)和(d)的证明类似的陈述也成立.

20. 利用极限的定理计算下列各极限:

(a) $\lim\limits_{x\to2}(x^2-6x+4)=\lim\limits_{x\to2}x^2+\lim\limits_{x\to2}(-6x)+\lim\limits_{x\to2}4$

$=(\lim\limits_{x\to2}x)(\lim\limits_{x\to2}x)+(\lim\limits_{x\to2}-6)(\lim\limits_{x\to2}x)+\lim\limits_{x\to2}4$

$=(2)(2)+(-6)(2)+4=-4.$

实际上运算中的这些中间步骤是可省去的.

(b) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+3)(2x-1)}{x^2+3x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to-1}(x+3)\lim\limits_{x\to-1}(2x-1)}{\lim\limits_{x\to-1}(x^2+3x-2)}=\frac{2\cdot(-3)}{(-4)}=\frac{3}{2}.$

(c) 由习题 19, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x^2+1}{6x^4+x^3-3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{6+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}6+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3}{x^3}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

(d) $\lim\limits_{h\to0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}\cdot\frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}=\lim\limits_{h\to0}\frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)}$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$

(e) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=1\cdot0=0.$

注:在(c),(d)和(e)中如果我们不加区别地应用极限的定理,我们得到所谓的未定式 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$,为了避免这种困境,注意在每一种情况下对极限形式作适当的改变. 关于计算极限的其他方法,请参看第四章.

连续

21. 证明 $f(x)=x^2$ 在 $x=2$ 处是连续的.

证法 1 由习题 10，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)=4$，所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处是连续的.

证法 2 要证的是对任意给定的 $\varepsilon>0$，可找到 $\delta>0$（依赖于 ε），当 $|x-2|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(2)|=|x^2-4|<\varepsilon$ 成立.这个证明可模仿习题 10 给出的证明.

22. (a)证明 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 5, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处不连续.

(b) 可以定义一个 $f(0)$ 使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续吗？

证明 ☞ (a) 由习题 13，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ 但这极限不等于 $f(0)=5$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

(b) 重新定义 $f(x)$，使得 $f(0)=0$，则这函数就变成连续函数了.因为是仅通过重新定义一点处的函数值可使函数在这一点连续，故称这点为可去间断点.

23. 函数 $f(x)=\dfrac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}$ 在 $x=1$ 处连续吗？

解 ☞ 因 $f(1)$ 不存在，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续.重新定义 $f(x)$，使 $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-8$（见习题 11），则函数在 $x=1$ 处就变成连续了，即 $x=1$ 是可去间断点.

24. 证明：如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则 (a) $f(x)+g(x)$，(b) $f(x)g(x)$、(c) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$（若 $g(x_0)\neq 0$）也在 $x=x_0$ 处连续.

证明 ☞ 在习题 19 的证明中取 $A=f(x_0)$，$B=g(x_0)$，将 $0<|x-x_0|<\delta$ 改写成 $|x-x_0|<\delta$，即包括 $x=x_0$，立刻得到这些结果.

25. 证明 $f(x)=x$ 在任一点 $x=x_0$ 处都连续.

证明 ☞ 要证的是对任意给定的 $\varepsilon>0$，可找到 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\varepsilon$.选取 $\delta=\varepsilon$，则结论立即得到.

26. 证明 $f(x)=2x^3+x$ 在任何点 $x=x_0$ 处都连续.

证明 ☞ 由于 x 在任何点 $x=x_0$ 处连续（习题 25），利用定理（习题 24）连续函数的和和积是连续的，因此 $x\cdot x=x^2$，$x^2\cdot x=x^3$，$2x^3$ 和最后的 $2x^3+x$ 都是连续的.

27. 证明：如果 $f(x)=\sqrt{x-5}$，$5\leqslant x\leqslant 9$，那么 $f(x)$ 在这个区间上连续.

证明 ☞ 若 x_0 是满足 $5<x_0<9$ 的任一点，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x-5}=\sqrt{x_0-5}=f(x_0)$，同时 $\lim\limits_{x\to 5^+}\sqrt{x-5}=0=f(5)$，$\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{5-x}=2=f(9)$，从而结论成立.

这里我们利用了这个结果：若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}=\sqrt{f(x_0)}$.也可直接用 ε-δ 定义证明.

28. 下列函数在其定义域中关于哪些值是连续的？

(a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$， 答案：除 $x=\pm 1$ 的所有 x（$x=\pm 1$ 时分母为 0）.

(b) $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{3+\sin x}$， 答案：所有 x.

(c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{10+x}}$， 答案：$x>-10$.

(d) $f(x)=10^{-\frac{1}{(x-3)^2}}$， 答案：$x\neq 3$（见习题 55）.

(e) $f(x)=\begin{cases}10^{-\frac{1}{(x-3)^2}}, & x\neq 3,\\ 0, & x=3,\end{cases}$ 答案：所有 x，因为 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=f(3)$.

(f) $f(x)=\dfrac{x-|x|}{x}$.

解 ☞ 若 $x>0$，$f(x)=\dfrac{x-x}{x}=0$；若 $x<0$，$f(x)=\dfrac{x+x}{x}=2$.

在 $x=0$ 处 $f(x)$ 无定义，则除 $x=0$ 外 $f(x)$ 在所有 x 处是连续的.

(g) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-|x|}{x}, & x<0,\\ 2, & x=0.\end{cases}$

解 ☞　正如(f)中一样,$f(x)$在 $x<0$ 时是连续的,那么由 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x+x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}2=2=f(0)$,这就得到了 $f(x)$在 $x=0$(从左侧)是连续的.

因此 $f(x)$对所有 $x\leqslant0$ 即在定义域内是连续的.

(h) $f(x)=x\csc x=\dfrac{x}{\sin x}$. 答案:除 $0,\pm\pi,\pm2\pi,\pm3\pi,\cdots$外的所有 x.

(i) $f(x)=x\csc x$, $f(0)=1$.

解 ☞　因为$\lim\limits_{x\to0}x\csc x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1=f(0)$. 所以 $f(x)$在除 $\pm\pi,\pm2\pi,\pm3\pi,\cdots$外的所有 x 处连续(与(h)比较).

一致连续

29. 证明 $f(x)=x^2$ 在 $0<x<1$ 上是一致连续的.

证法 1　利用定义.

要证的是对任意给定的 $\varepsilon>0$,可找到 $\delta>0$,当$|x-x_0|<\delta$ 时,有$|x^2-x_0^2|<\varepsilon$,其中 δ 仅依赖于 ε,而与 $x_0(0<x_0<1)$无关.

如果 x 和x_0 是 $0<x<1$ 上的任两点,那么

$$|x^2-x_0^2|=|x+x_0||x-x_0|<|1+1||x-x_0|=2|x-x_0|.$$

于是若$|x-x_0|<\delta$,则有$|x^2-x_0^2|<2\delta$,选取 $\delta=\varepsilon/2$,当$|x-x_0|<\delta$ 时有$|x^2-x_0^2|<\varepsilon$,其中 δ 仅与 ε 有关,而与 x_0 无关,因此 $f(x)$在 $0<x<1$ 上是一致连续的.

上面的证法也可用来证明 $f(x)=x^2$ 在 $0\leqslant x\leqslant1$ 上是一致连续的.

证法 2　函数 $f(x)=x^2$ 在闭区间 $0\leqslant x\leqslant1$ 上是连续的,因此由 p25. 上的定理它在 $0\leqslant x\leqslant1$ 上是一致连续的,从而在 $0<x<1$ 上是一致连续的.

30. 证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在 $0<x<1$ 上不是一致连续的.

证法 1　假设 $f(x)$在这个给定区间上是一致连续的,那么对任意 $\varepsilon>0$,我们应该能够找到 $\delta>0$,假定 δ 在 0 和 1 之间,对这个区间上的所有 x 和x_0,当$|x-x_0|<\delta$ 时,有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

设 $x=\delta$, $x_0=\dfrac{\delta}{1+\varepsilon}$,那么$|x-x_0|=\left|\delta-\dfrac{\delta}{1+\varepsilon}\right|=\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\delta<\delta$,但是$\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_0}\right|=\left|\dfrac{1}{\delta}-\dfrac{1+\varepsilon}{\delta}\right|=\dfrac{\varepsilon}{\delta}>\varepsilon$(因为 $0<\delta<1$),从而得出矛盾,因此 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在 $0<x<1$ 上不是一致连续的.

证法 2　设 x_0 和 $x_0+\delta$ 是$(0,1)$上的任意两点,那么可通过选取 x_0 充分地接近 0,使得

$$|f(x_0)-f(x_0+\delta)|=\left|\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0+\delta}\right|=\frac{\delta}{x_0(x_0+\delta)}$$

比任意正数都大,因此这个函数不可能是一致连续的.

杂题

31. 如果 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处连续,$z=g(y)$在 $y=y_0$ 处连续,$y_0=f(x_0)$,证明 $z=g[f(x)]$在 $x=x_0$ 处是连续的.

证明 ☞　设 $h(x)=g[f(x)]$,由假设 $f(x)$和 $g(x)$分别在 x_0 和 y_0 点是连续的,则有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f[\lim_{x\to x_0}x]=f(x_0),$$

$$\lim_{y\to y_0}g(y)=g(\lim_{y\to y_0}y)=g(y_0)=g[f(x_0)],$$

那么

$$\lim_{x\to x_0}h(x)=\lim_{x\to x_0}g[f(x)]=g[\lim_{x\to x_0}f(x)]=g[f(x_0)]=h(x_0).$$

这就证明了 $h(x)=g[f(x)]$在 $x=x_0$ 处是连续的.

32. 证明 p24. 上的定理 8.

证明 ☞　假设 $f(a)<0, f(b)>0$.因为 $f(x)$是连续的,所以一定存在一个区间$(a,a+h)$, $h>0$,在这个区间上 $f(x)<0$.点集$(a,a+h)$有一个上界,故也有一个最小上界,我们称之为 c,那么 $f(c)\leqslant 0$.现在我们证不能有 $f(c)<0$.因为如果 $f(c)$是负的,则我们可找到一个关于 c 的区间(包括比 c 大的值),在这个区间上 $f(x)<0$,但由于 c 是最小上界,所以这是不可能的,故一定有 $f(c)=0$,这正是所要证明的.

如果 $f(a)>0, f(b)<0$,同理可证结论.

33. (a) 已知 $f(x)=2x^3-3x^2+7x-10$,计算 $f(1)$和 $f(2)$.

(b) 证明在 $1<x<2$ 中存在某实数 x 使得$f(x)=0$.

(c) 说明怎样求出(b)中的 x.

解 ☞　(a) $f(1)=2(1)^3-3(1)^2+7(1)-10=-4$, $f(2)=2(2)^3-3(2)^2+7(2)-10=8$.

(b) 如果 $f(x)$在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上是连续的,且 $f(a)$和 $f(b)$异号,那么在 a 和 b 之间有一值 x,满足 $f(x)=0$(32 题)

由于在(a)中已经表明 $f(1)<0, f(2)>0$,因此为了应用这个定理,我们仅需注意到所给的多项式在 $1\leqslant x\leqslant 2$ 上是连续的,于是在 1 和 2 之间存在一数 c,使得 $f(c)=0$ 成立.

(c) $f(1.5)=2(1.5)^3-3(1.5)^2+7(1.5)-10=0.5$,那么再一次应用(b)中定理,得到所求的根位于 1 和 1.5 之间,且最可能离 1.5 更近些,因为 $f(1.5)=0.5$ 比 $f(1)=-4$ 更接近于 0(这不总是正确的,但在实际中这是值得推行的).

因此我们考虑 $x=1.4$,由于 $f(1.4)=2(1.4)^3-3(1.4)^2+7(1.4)-10=-0.592$.得到在 1.4 和 1.5 之间有一根且这根最可能离 1.5 更近些.

连续使用这种方法,如要求精确到 2 位小数,我们找到这个根是 1.46.

34. 证明 p24.的定理 10.

证明 ☞　任意给定 $\varepsilon>0$.由上确界 M 的定义,可找到 x,满足 $M-f(x)<\varepsilon$.

那么$\dfrac{1}{M-f(x)}>\dfrac{1}{\varepsilon}$,因此$\dfrac{1}{M-f(x)}$是无界的,故按照 p.24 定理 4 它不可能是连续的.但是如果我们假定 $f(x)\neq M$,那么由 $M-f(x)$是连续的,则定有$\dfrac{1}{M-f(x)}$也是连续的,矛盾.由此这个区间上至少存在一个 x 使得$f(x)=M$.

同理可证这个区间上存在一 x,使得 $f(x)=m$ 成立(习题 93).

补 充 习 题

函数

35. 给出下列函数的定义域,使其是实的和单值的函数:

(a) $\sqrt{(3-x)(2x+4)}$, (b) $(x-2)/(x^2-4)$, (c) $\sqrt{\sin 3x}$,

(d) $\log_{10}(x^3-3x^2-4x+12)$.

36. 若 $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$, $x\neq 2$.求(a) $\dfrac{5f(-1)-2f(0)+3f(5)}{6}$, (b) $\left\{f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}^2$,

(c) $f(2x-3)$, (d) $f(x)+f\left(\dfrac{4}{x}\right)$, $x\neq 0$,

(e) $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$, $h\neq 0$, (f) $f\{(x)\}$.

37. 若 $f(x)=2x^2$, $0<x\leqslant 2$,求(a) $f(x)$的上确界, (b) $f(x)$的下确界.并确定 $f(x)$是否达到上确界和下确界.

38. 画出下列函数的图形:

(a) $f(x)=|x|$, $-3\leqslant x\leqslant 3$, (b) $f(x)=2-\dfrac{|x|}{x}$, $-2\leqslant x\leqslant 2$,

(c) $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1/2, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ (d) $f(x)=\begin{cases}-x, & -2\leqslant x\leqslant 0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ (e) $f(x)=x^2\sin 1/x$, $x\neq 0$,

(f) $\dfrac{x-[x]}{x}$,其中$[x]$=小于等于 x 的最大整数,

(g) $f(x)=\cosh x$, (h) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$,

(i) $f(x)=\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, (j) $f(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$.

39. 画出下列函数的图形并回答这些函数是单值函数吗?

(a) $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, (b) $x^2/a^2-y^2/b^2=1$, (c) $y^2=2px$, (d) $y=2ax-x^2$.

40. (a) 从 $y=\cos x$ 图形出发画出 $y=\arccos x$ 的图形.

(b) 从几何上说明为什么 $\arccos x$ 是多值函数,并指出 $\arccos x$ 的一个主值的可能选择.

(c) 利用(b)中的选择,求出 $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.这个值依赖于这种选择吗? 请解释.

41. 关于函数(a) $y=\text{arcsec}x$,(b) $y=\text{arccot}x$ 回答习题 40 中的(a)和(b)两部分.

42. 说明怎样由已知的 $y=f(x)$ 图形得到 $y=f(ax-b)$ 的图形,其中 a,b 是已知常数.说出下列函数作图的过程:(a) $y=\cos 3x$, (b) $y=\sin(5x+\pi/3)$, (c) $y=\tan(\pi/0-2x)$.

43. 作出下列函数的图形:

(a) $y=e^{-|x|}$, (b) $y=\ln|x|$, (c) $y=e^{-|x|}\sin x$.

44. 利用 p.21 上的常规主值,计算:

(a) $\arcsin(-\sqrt{3}/2)$,

(b) $\arctan(1)-\arctan(-1)$,

(c) $\text{arccot}(1/\sqrt{3})-\text{arccot}(-1/\sqrt{3})$, (d) $\text{arccosh}\sqrt{2}$,

(e) $e^{-\text{arcoth}(25/7)}$, (f) $\arcsin x+\arccos x$, $-1\leqslant x\leqslant 1$,

(g) $\arcsin(\cos 2x)$, $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, (h) $\arcsin(\cos 2x)$, $\pi/2\leqslant x\leqslant 3\pi/2$,

(i) $\tanh(\text{arcosh}3x)$, $x\neq 0$, (j) $\cos(2\arctan x^2)$.

45. 计算:(a) $\cos|\pi\sinh(\ln 2)|$, (b) $\arccos|\coth(\ln 3)|$.

46. (a) 如果 $\arctan x$ 和 $\text{arccot}x$ 所取的值为 p.21 上的常规主值,证明 $\arctan x+\text{arccot}x=\pi/2$.

(b) $\arctan x+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$ 也成立吗? 请解释.

47. 如果 $f(x)=\arctan x$,证明 $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$,并讨论 $xy=1$ 这种情形.

48. 证明 $\arctan a-\arctan b=\text{arccot}b-\text{arccot}a$.

49. 证明等式:

(a) $1-\tanh^2 x=\text{sech}^2 x$, (b) $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$,

(c) $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$, (d) $\tanh\frac{x}{2}=(\sinh x)/(1+\cosh x)$,

(e) $\ln|\csc x-\cot x|=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$.

50. 求下列函数的极大值、极小值和最大值、最小值,并讨论在 $f(0)$ 没有定义或 $f(0)$ 有定义但不等于 1 的情形:(a) $f(x)=(\sin x)/x$, $f(0)=1$,

(b) $f(x)=(\sin^2 x)/x^2$, $f(0)=1$.

51. 计算下列极限,要求先用极限定义,然后再用极限的定理.

(a) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-3x+2)$, (b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{2x-5}$, (c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{4-x}$, (e) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(2+h)^4-16}{h}$, (f) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

52. 设 $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 2x+5, & x>0,\end{cases}$ (a) 画出 $f(x)$ 的图形.

计算:(b) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$, (c) $\lim\limits_{x\to -3}f(x)$, (d) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$, (f) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$,并证明你的答案.

53. 计算(a) $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0^+)}{h}$, (b) $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0^-)}{h}$,其中 $f(x)$ 是习题 52 中的函数.

54. (a) 如果 $f(x)=x^2\cos 1/x$，计算$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$并证明你的答案.

(b) 如果 $f(x)=x^2\cos 1/x, x\neq 0, f(0)=2$，则与(a)中的答案仍然相同吗？请解释.

55. 用定义证明$\lim\limits_{x\to 3}10^{-1/(x-3)^2}=0$

56. 设 $f(x)=\dfrac{1+10^{-1/x}}{1+10^{1/x}}, x\neq 0; f(0)=\dfrac{1}{2}$，计算下列极限并证明：(a) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，

(b) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，(c) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

57. 求：(a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}$，(b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}$，请从几何上阐明你的结果.

58. 如果 $f(x)$是习题 56 中定义的函数，则$\lim\limits_{x\to 0}f(|x|)$存在吗？请解释.

59. 精确解释下列各式：

(a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2-x}{(x-3)^2}=-\infty$，(b) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-e^{1/x})=-\infty$，(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+5}{3x-2}=\dfrac{2}{3}$.

60. 证明(a) $\lim\limits_{x\to\infty}10^{-x}=0$，(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cos x}{x+\pi}=0$.

61. 解释为什么(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在，(b) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\sin x$ 存在.

62. 如果 $f(x)=\dfrac{3x+|x|}{7x-5|x|}$，计算：(a) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$，(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，(d) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，(e) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

63. 如果$[x]$=小于等于 x 的最大整数，计算：(a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\{x-[x]\}$，(b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\{x-[x]\}$.

64. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，证明：(a) $\lim\limits_{x\to x_0}\{f(x)\}^2=A^2$，(b) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{A}$. 猜测一下，上述的推广情况成立吗？能证明吗？

65. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$. 证明：

(a) $\lim\limits_{x\to x_0}\{f(x)-g(x)\}=A-B$，(b) $\lim\limits_{x\to x_0}\{af(x)+bg(x)\}=aA+bB$，其中 a,b 是任意常数.

66. 如果 $f(x), g(x)$和 $h(x)$的极限分别是 A, B 和 C.

证明：(a) $\lim\limits_{x\to x_0}\{f(x)+g(x)+h(x)\}=A+B+C$，

(b) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)h(x)=ABC$，并推广这些结果.

67. 用极限理论计算下列极限：

(a) $\lim\limits_{x\to 1/2}\left\{\dfrac{2x^2-1}{(3x+2)(5x-3)}-\dfrac{2-3x}{x^2-5x+3}\right\}$，　(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-1)(2x+3)}{(5x-3)(4x+5)}$，

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2x}{x+1}\right)$，　(d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{3x+5}\right)$.

68. 计算$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+h}-2}{h}$(提示：设 $8+h=x^3$).

69. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 和$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B\neq 0$. 直接证明

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}.$$

70. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. 计算：

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$，(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$，(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$，

(d) $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)\csc\pi x$，(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$，(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x-\sin 2x}{2x+3\sin 4x}$，

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2}$，(h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\sin\pi x-\sin 3\pi x}{x^3}$.

71. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$，证明：

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=b-a$，(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}=\ln\dfrac{a}{b}, a,b>0$，

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tanh ax}{x}=a$.

72. 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=l$.

连续

73. 证明 $f(x)=x^2-3x+2$ 在 $x=4$ 点处连续.

74. 证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在(a) $x=2$,(b) 区间 $1\leqslant x\leqslant 2$ 上是连续的.

75. 研究下列函数在指定点处的连续性:

(a) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0; f(0)=0, x=0$, (b) $f(x)=x-|x|, x=0$,

(c) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^2-4}, x\neq 2; f(2)=3, x=2$, (d) $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, 0<x<1,\\ \ln x, 1<x<2,\end{cases}$ $x=1$.

76. 如果 $[x]$ = 小于等于 x 的最小整数,研究 $f(x)=x-[x]$ 在下列区间上的连续性:(a) $1<x<1$, (b) $1\leqslant x\leqslant 2$.

77. 证明 $f(x)=x^3$ 在每个有限区间上是连续的.

78. 如果 $f(x)/g(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处是连续的,证明 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点处一定是连续的.

79. 证明 $f(x)=(\arctan x)/x, f(0)=1$ 在 $x=0$ 处是连续的.

80. 证明一个多项式在每个有限区间上是连续的.

81. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是多项式,证明 $f(x)/g(x)$ 在满足 $g(x_0)\neq 0$ 的点 $x=x_0$ 处是连续的.

82. 求出下列函数的不连续点:

(a) $f(x)=\dfrac{x}{(x-2)(x-4)}$, (b) $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0; f(0)=0$,

(c) $f(x)=\sqrt{(x-3)(6-x)}, 3\leqslant x\leqslant 6$, (d) $f(x)=\dfrac{1}{1+2\sin x}$.

一致连续

83. 证明 $f(x)=x^3$ 在下列区间上是一致连续的:
(a) $0<x<2$, (b) $0\leqslant x\leqslant 2$, (c) 任何有限区间.

84. 证明 $f(x)=x^2$ 在 $0<x<\infty$ 上不是一致连续的.

85. 如果 a 是一常数, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$,证明:(a) 若 $a\geqslant 0$,则 $f(x)$ 在 $a<x<\infty$ 上是连续的,(b) 若 $a>0$,则 $f(x)$ 在 $a<x<\infty$ 上是一致连续的,(c) $f(x)$ 在 $0<x<1$ 上不是一致连续的.

86. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在同一区间上是一致连续的,证明:(a) $f(x)+g(x)$, (b) $f(x)g(x)$ 在这个区间上是一致连续的.叙述并证明关于 $f(x)/g(x)$ 的一个类似的定理.

杂题

87. 给出习题 31 中定理的"ϵ-δ"证明.

88. (a) 证明方程 $\tan x=x$ 在下列各区间中有一个正实根: $\pi/2<x<3\pi/2$, $3\pi/2<x<5\pi/2$, $5\pi/2<x<7\pi/2,\cdots$.
(b) 通过作出 $y=\tan x$ 和 $y=x$ 的图形及它们的交点,从几何上说明(a)中的结果.
(c) 确定 $\tan x=x$ 的最小正根.

89. 证明方程 $\sin x=x$ 的惟一实根是 $x=0$.

90. (a) 证明 $\cos x\cosh x+1=0$ 有无穷多个实根.
(b) 证明对很大的 x 值,方程的根近似于 $\cos x=0$ 的那些相应值.

91. 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}=0$.

92. 假定 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点是连续的,而且 $f(x_0)>0$,证明存在一个区间 (x_0-h, x_0+h),其中 $h>0$,在这个区间上 $f(x)>0$.(见 p.24 页定理 5).[提示:证明我们可使 $|f(x)-f(x_0)|<\dfrac{1}{2}f(x_0)$ 成立,然后证明 $f(x)\geqslant f(x_0)-|f(x)-f(x_0)|>\dfrac{1}{2}f(x_0)>0$].

93. (a) 证明 p.24 上关于下确界 m 的定理 10(见习题 34).
(b) 证明 p.24 上的定理 9 并阐明它与定理 10 的关系.

第三章　序　列

序列的定义

一个正整数变量的函数,记为 $f(n)$或 u_n, $n=1,2,3,\cdots$,称为一个序列,因此一个序列是按一种确定的次序排列的(即与自然数的一种对应)且根据一种确定规则形成的一个数集 u_1, u_2, u_3, $\cdots$. 这个序列中的每一个数称为一项, u_n 称为第 n 项. 序列按照它有有限项或是无限项称其为有限序列或无限序列. 序列 $u_1, u_2, u_3, \cdots$也可简记为$\{u_n\}$.

例 1:数集 $2,7,12,17,\cdots,32$ 是一个有限序列,第 n 项表为 $u_n=f(n)=2+5(n-1)=5n-3$, $n=1,2,\cdots,7$.

例 2:数集 $1,1/3,1/5,1/7,\cdots$是一个无限序列,第 n 项为 $u_n=1/(2n-1)$, $n=1,2,3,\cdots$.

无特别说明,我们将仅考虑无限序列.

序列的极限

设有一无穷序列 $u_1, u_2, u_3, \cdots$,若对任一正数 ϵ,我们可找到与 ϵ 有关的正数N,当整数 $n>N$ 时有$|u_n-l|<\epsilon$ 成立,则称数 l 为这个序列的极限,记为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=l$.

例:若 $u_n=3+1/n=(3n+1)/n$,这个序列是 $4,7/2,10/3,\cdots$,我们可证明$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=3$.

如果一个序列的极限存在,那么称这个序列是收敛的,否则称其是发散的. 一个序列收敛于惟一的极限,即如果极限存在,则它是惟一的,见习题 8.

表述这种极限概念的一种直观但不严格的方法是:若一个序列 $u_1, u_2, u_3, \cdots$逐项逐项地越来越接近于 l,则这个序列有一个极限 l. 这种方法常用来"猜测"序列的极限,然后应用定义判定这个猜测是否真的是正确的.

应该看到函数极限和序列极限之间的相同点和不同点. 在定义$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$ 中,对所有可能方式趋向于无穷大,函数都取得极限 l. 在定义$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=l$ 中,极限 l 存在仅需沿某种方式趋向于无穷大,即沿正整数趋于无穷大. 除此还存在着其他趋向于无穷大的极限情况. 例如在某种情况下重要的是考虑函数 $f(x)$当 x 沿着有理数序列趋向于∞(或任何数 x_0)时的极限.

序列极限的定理

如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 和$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$,那么

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A+B$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A-B$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty}b_n)=AB$,
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{A}{B}$,若$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B\neq0$,

   若 $B=0, A\neq0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$不存在,

   若 $B=0, A=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$可能存在,可能不存在,
5. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^p=(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)^p=A^p$,若 A^p 存在,p 为任一实数,
6. $\lim\limits_{n\to\infty}p^{a_n}=p^{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=p^A$,若 p^A 存在,p 为任一实数.

无穷大

如果对每一正数 M,存在一正数 N(依赖于 M),对所有的 $n>N$ 有 $a_n>M$,那么我们记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.类似地,如果对每一正数 M,存在一正数 N,对所有的 $n>N$ 有 $a_n<-M$,那么我们记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$.应该强调的是$\infty$和$-\infty$不是数,这个序列是不收敛的.用这种术语仅仅指这个序列以某种方式发散.

有界序列,单调序列

若 $u_n\leqslant M$, $n=1,2,3,\cdots$, M 是一个常数(与 n 无关),则我们称这个序列是上有界的,称 M 为它的一个上界.若 $u_n\geqslant m$,则称这个序列是下有界的,称 m 为它的一个下界.

若 $m\leqslant u_n\leqslant M$,则称这个序列是有界的,常用 $|u_n|\leqslant P$ 表示.每个收敛序列是有界的,反之不一定成立.

若 $u_{n+1}\geqslant u_n$,则称这个序列是单调递增的,若 $u_{n+1}>u_n$,则称它为严格递增的.

类似地,若 $u_{n+1}\leqslant u_n$,则称这个序列是单调递减的,而若 $u_{n+1}<u_n$,则称它为严格递减的.

例 1:序列 1,1.1,1.11,1.111,…是有界的和单调递增的,它也是严格递增的.

例 2:序列 $1,-1,1,-1,1,\cdots$是有界的,但不是单调递增或递减的.

例 3:序列 $-1,-1.5,-2,-2.5,-3,\cdots$是单调递减的和无界的,然而它是上有界的.

下面的定理是一基本定理,它与习题 23 中证明的(第一章 p.5)魏尔斯特拉斯-波尔察诺定理有关.

定理:每一个有界单调(递增或递减)序列有极限.

序列的上确界和下确界

设 $\underline{M}$ 是一个数,$\{u_n\}$是一序列,若 $u_n\leqslant\underline{M}$, $n=1,2,3,\cdots$,而对任一 $\varepsilon>0$,至少有一项比 $\underline{M}-\varepsilon$ 大,则称 $\underline{M}$ 为这个序列的上确界.

若 $u_n\geqslant\overline{m}$, $n=1,2,3,\cdots$,而对任一 $\varepsilon>0$,至少有一项比$\overline{m}+\varepsilon$ 小,则称数 $\overline{m}$ 为这个序列的下确界.

请跟一般数集的上确界和下确界(见 p.4)作比较.

上极限,下极限

如果对任一正数 ε,这个序列$\{u_n\}$中有无穷多项比$\bar{l}-\varepsilon$ 大,而仅有有限项比$\bar{l}+\varepsilon$ 大,则称数$\bar{l}$为这个序列的上极限(limsup 或$\overline{\lim}$).

如果对任一正数 ε,序列中有无穷多项比$\underline{l}+\varepsilon$ 小,而仅有有限项比$\underline{l}-\varepsilon$ 小,则称数$\underline{l}$为这个序列的下极限(liminf 或$\underline{\lim}$).

这些与一般数集的最小极限点和最大极限点相对应.

如果序列$\{u_n\}$中有无穷多项超过任一正数 M,则我们定义 $\limsup\{u_n\}=\infty$.如果序列中有无穷多项比 $-M$ 小,M 是任一正数,则我们定义 $\liminf\{u_n\}=-\infty$.

如果$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty$,则我们定义$\limsup\{u_n\}=\liminf\{u_n\}=\infty$.

如果$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=-\infty$,则我们定义$\limsup\{u_n\}=\liminf\{u_n\}=-\infty$.

尽管每一个有界序列不一定收敛,但它总有一个有限上极限(lim sup)和下极限(lim inf).

一个序列$\{u_n\}$收敛当且仅当 $\limsup u_n=\liminf u_n=$有限数.

区间套

考察一个区间集$[a_n,b_n]$, $n=1,2,3,\cdots$,其中每个区间包含在前一个区间中且$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-$

$b_n)=0$,这样的区间集称为区间套.

可以证明区间套的每一个区间含有惟一一个公共的实数.这个结论可用来建立第一章中的魏尔斯特拉斯-波尔察诺定理(见习题22和习题23).

柯西收敛准则

一个序列$\{u_n\}$收敛当且仅当对每一个$\varepsilon>0$,存在一数N,当$p,g>N$时有$|u_p-u_q|<\varepsilon$成立.这个准则的优点是在证明序列收敛时不必知道这个序列的极限l.

无穷级数

设$u_1,u_2,u_3,\cdots$是一已知序列,令$S_1=u_1,S_2=u_1+u_2,S_3=u_1+u_2+u_3,\cdots,S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n,\cdots$构成一个新的序列$S_1,S_2,S_3,\cdots,S_n$是序列$\{u_n\}$的前$n$项之和,称其为$n$项部分和.

用$u_1+u_2+u_3+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$表示这个序列$S_1,S_2,S_3,\cdots$并称其为无穷级数.如果$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$存在,则称这个级数是收敛的,$S$为它的和,否则称这个级数是发散的.

有关无穷级数和与序列相关的其他问题将在第十一章中作进一步讨论.

习题与解答

序列

1. 写出下列序列的前5项:

(a) $\left\{\dfrac{2n-1}{3n+2}\right\}$, (b) $\left\{\dfrac{1-(-1)^n}{n^3}\right\}$, (c) $\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\right\}$,

(d) $\left\{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right\}$, (e) $\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right\}$.

解☞ (a) $\dfrac{1}{5},\dfrac{3}{8},\dfrac{5}{11},\dfrac{7}{14},\dfrac{9}{17}$.

(b) $\dfrac{2}{1^3},0,\dfrac{2}{3^3},0,\dfrac{2}{5^3}$.

(c) $\dfrac{1}{2},\dfrac{-1}{2\cdot4},\dfrac{1}{2\cdot4\cdot6},\dfrac{-1}{2\cdot4\cdot6\cdot8},\dfrac{1}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}$.

(d) $\dfrac{x}{1!},\dfrac{-x^3}{3!},\dfrac{x^5}{5!},\dfrac{-x^7}{7!},\dfrac{x^9}{9!}$.

注意:$n!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots n$,因此$1!=1,3!=1\cdot2\cdot3=6,5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$等等,定义$0!=1$.

2. 要求两学生写出这个序列1,16,81,256,…的第n项和这个序列的第5项.一位学生给出的第n项为$u_n=n^4$,另一位学生没有识别出这种简单的形成规律,写成$u_n=10n^3-35n^2+50n-24$,问哪位学生给出了正确的第5项?

解☞ 如果$u_n=n^2$,那么$u_1=1^4=1,n_2=2^4=16,u_3=3^4=81,u_4=4^4=256$,这和这个序列的前4项是一致的,因此第一位学生给出的第5项为$u_5=5^4=625$.

如果$u_n=10n^3-35n^2+50n-24$,那么$u_1=1,u_2=16,u_3=81,u_4=256$,这也与所给的前四项一致,因此第二位学生给出的第五项为$u_5=601$.

两位学生都是正确.仅给出一个序列的有限项不能确定惟一一个第n项,事实上写出无穷多种第n项也是可能的.

序列极限

3. 已知一个序列的第n项为$u_n=\dfrac{3n-1}{4n-5}$,(a) 用小数形式写出这个序列的第1项,第5项,第10项,第100项,第1000项,第10000项和第100,000项,并就$n\to\infty$时这个序列的极限作

一个猜测.(b) 用极限定义验证在(a)中的猜测确实是正确的.

解 ☞ (a) $n=1$ $n=5$ $n=10$ $n=100$ $n=1000$

0.22222… 0.56000… 0.64444… 0.73827… 0.74881…

$n=10000$ $n=100,000$

0.74988… 0.74998…

合理的猜测是这个极限为 $0.75000\cdots=\frac{3}{4}$.注意只有对足够大的 n,可能的极限才可以变得很明显.

(b) 我们要证的是对任给的 $\varepsilon>0$(不管多小),存在一数 N(依赖于 ε).对所有 $n>N$,有 $\left|u_n-\frac{3}{4}\right|<\varepsilon$ 成立.

现在 $\left|\frac{3n-1}{4n+5}-\frac{3}{4}\right|=\left|\frac{-19}{4(4n+5)}\right|<\varepsilon$,只有当 $\frac{19}{4(4n+5)}<\varepsilon$ 或 $\frac{4(4n+5)}{19}>\frac{1}{\varepsilon}$,$4n+5>\frac{19}{4\varepsilon}$,$n>\frac{1}{4}\left(\frac{19}{4\varepsilon}-5\right)$.

选取 $N=\frac{1}{4}(19/4\varepsilon-5)$,对所有的 $n>N$,我们看到有 $\left|u_n-\frac{3}{4}\right|<\varepsilon$,因此 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\frac{3}{4}$,从而完成了证明.

注意:例如如果 $\varepsilon=0.001$,$N=\frac{1}{4}(19000/4-5)=1186\frac{1}{4}$.这意味着这个序列中超过第 1186 项后的所有项与 $\frac{3}{4}$ 的差的绝对值小于 0.001.

4. 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c}{n^p}=0$,其中 $c\neq0,p>0$ 是常数(与 n 无关).

证明 ☞ 要证的是对任意 $\varepsilon>0$,存在数 N,当 $n>N$ 时,有 $|c/n^p-0|<\varepsilon$.

现在要使 $\left|\frac{c}{n^p}\right|<\varepsilon$,只有当 $\frac{|c|}{n^p}<\varepsilon$,即 $n^p>\frac{|c|}{\varepsilon}$,$n>\left(\frac{|c|}{\varepsilon}\right)^{1/p}$,选取 $N=\left(\frac{|c|}{\varepsilon}\right)^{1/p}$(与 ε 有关),对所有的 $n>N$,有 $|c/n^p|<\varepsilon$,这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}(c/n^p)=0$.

5. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2\cdot10^n}{5+3\cdot10^n}=\frac{2}{3}$.

证明 ☞ 要证的是对任意 $\varepsilon>0$,存在数 N,当 $n>N$ 时,有 $\left|\frac{1+2\cdot10^n}{5+3\cdot10^n}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$.

现在要使 $\left|\frac{1+2\cdot10^n}{5+3\cdot10^n}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{-7}{3(5+3\cdot10^n)}\right|<\varepsilon$,只有当 $\frac{7}{3(5+3\cdot10^n)}<\varepsilon$,即当 $\frac{3}{7}(5+3\cdot10^n)>1/\varepsilon$,$3\cdot10^n>7/3\varepsilon-5$,$10^n>\frac{1}{3}(7/3\varepsilon-5)$,$n>\log_{10}\left\{\frac{1}{3}(7/3\varepsilon-5)\right\}=N$,这就证明了 N 的存在,从而得到了所要的结果.

注意:上述的 N 值是实值仅当 $7/3\varepsilon-5>0$ 即 $0<\varepsilon<\frac{7}{15}$.如果 $\varepsilon\geqslant7/15$,我们看到对所有 $n>0$,都有 $\left|\frac{1+2\cdot10^n}{5+3\cdot10^n}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$.

6. 精确解释下列两式的意思:(a) $\lim\limits_{n\to\infty}3^{2n-1}=\infty$,(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-2n)=-\infty$.

解 ☞ (a) 若对每一正数 M,可找到一正数 N(与 M 有关),当 $n>N$ 时有 $a_n>M$ 成立,那么我们记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

现在 $2n-1$.当 $(2n-1)\log3>\log M$ 即 $n>\frac{1}{2}\left(\frac{\log M}{\log3}+1\right)=N$ 时有 $3^{2n-1}>M$ 成立.

(b) 若对每一正数,可找到一正数 N(与 M 有关),对所有的 $n>N$,有 $a_n<-M$.则我们记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

现在,当 $2n-1>M$ 或 $n>\frac{1}{2}(M+1)=N$ 时,有 $1-2n<-M$ 成立.

应该强调的是记号 ∞ 和 $-\infty$ 用于极限完全不是意味着所给序列收敛,因为 ∞ 和 $-\infty$ 不是数,相反地,这些记号是用来描述这个序列以特定方式发散.

7. 证明若$|x|<1$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$.

证法 1 因为若$x=0$,结果是明显的,故我们限制$x\neq0$,给定$\varepsilon>0$,我们要证的是存在N,对$n>N$有$|x^n|<\varepsilon$.现在要使$|x^n|=|x|^n<\varepsilon$,只要$n\log_{10}|x|<\log_{10}\varepsilon$,用$\log_{10}|x|$除两边,因$\log_{10}|x|$是负的,于是得到$n>\dfrac{\log_{10}\varepsilon}{\log_{10}|x|}=N$.这就证明了所要的结果.

证法 2 设$|x|=\dfrac{1}{(1+p)}$其中$p>0$,由 Bernoulli 不等式(第一章中习题 31),对$n>N$,我们有$|x^n|=|x|^n=\dfrac{1}{(1+p)^n}<\dfrac{1}{1+np}<\varepsilon$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$.

序列的极限理论

8. 证明:若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$存在,则它一定是惟一的.

证明 ☞ 我们要证的是若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=l_1$和$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=l_2$,则$l_1=l_2$.

由假设,任意给定$\varepsilon>0$,可找到N,当$n>N$时,有

$$|u_n-l_1|<\frac{1}{2}\varepsilon,\quad |u_n-l_2|<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

那么 $$|l_1-l_2|=|l_1-u_n+u_n-l_2|\leqslant|l_1-u_n|+|u_n-l_2|<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon.$$

即$|l_1-l_2|$比任一正数ε(无论多小)都小,故它一定为 0,从而$l_1=l_2$.

9. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=A+B$.

证明 ☞ 我们要证的是对任意$\varepsilon>0$,可找到$N>0$,使当$n>N$时,有$|(a_n+b_n)-(A+B)|<\varepsilon$,由 p.3 不等式 2,我们有

$$|(a_n+b_n)-(A+B)|=|(a_n-A)+(b_n-B)|\leqslant|a_n-A|+|b_n-B|. \tag{1}$$

由假设,对任给$\varepsilon>0$,可找到N_1和N_2,使得

当$u>N_1$时有 $$|a_n-A|<\frac{1}{2}\varepsilon, \tag{2}$$

当$n>N_2$时有 $$|b_n-B|<\frac{1}{2}\varepsilon, \tag{3}$$

那么由(1),(2)和(3)式,对$n>N$,有

$$|(a_n+b_n)-(A+B)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

其中N为N_1和N_2中大的一个,从而证明了所要的结论.

10. 证明收敛序列有界.

证明 ☞ 已知$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$.我们要证的是存在一正数$P$,对所有的$n>N$,有$|a_n|<P$成立.现在$|a_n|=|a_n-A+A|\leqslant|a_n-A|+|A|$.

但由假设,我们可找到N,当$n>N$时有$|a_n-A|<\varepsilon$.

即对$n>N$有$|a_n|<\varepsilon+|A|$.

若选P为数$|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|$和$\varepsilon+|A|$中最大的一个,则对所有的n有$|a_n|<P$.

11. 若$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B\neq0$,证明存在一数$N$,对所有的$n>N$有$|b_n|>\dfrac{1}{2}B$.

证明 ☞ 由于$B=B-b_n+b_n$,所以有(1)$|B|\leqslant|B-b_n|+|b_n|$.

由假设因$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$,则我们可选择$N$,对所有的$n>N$,有$|B-b_n|=|b_n-B|<\dfrac{1}{2}B$.因此由(1)式,对$n>N$有$|B|<\dfrac{1}{2}|B|+|b_n|$,即$|b_n|>\dfrac{1}{2}|B|$.

12. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$.证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=AB$.

证明 ☞ 利用习题 10,我们有

$$\begin{aligned}|a_nb_n-AB|&=|a_n(b_n-B)+B(a_n-A)|\leqslant|a_n||b_n-B|+|B|\cdot|a_n-A|\\&\leqslant P|b_n-B|+(|B|+1)|a_n-A|.\end{aligned} \tag{1}$$

但因$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$和$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$,故给定$\epsilon>0$,可找到$N_1$和$N_2$,对$n>N_1$有$|b_n-B|<\frac{\epsilon}{2P}$;对$n>N_2$有$|a_n-A|<\frac{\epsilon}{2(|B|+1)}$.

因此取N为N_1和N_2中大的一个,由(1)式,对$n>N$,有$|a_nb_n-AB|<\frac{1}{2}\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon=\epsilon$,从而证明了结论.

13. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$和$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B\neq0$,证明:(a)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{B}$,(b)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B}$.

证明 ☞ (a) 我们要证的是对任给的$\epsilon>0$,可找到N,对$n>N$有

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{B}\right|=\frac{|B-b_n|}{|B|\cdot|b_n|}<\epsilon. \tag{1}$$

由假设,任给定$\epsilon>0$,可找到N_1,当$n>N_1$时有$|b_n-B|<\frac{1}{2}B^2\epsilon$.

同时由$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B\neq0$,可找到$N_2$,当$n>N_2$时有$|b_n|>\frac{1}{2}|B|$(见习题11).

那么如果N取N_1和N_2中大的一个,则对$n>N$,我们可将(1)式写成

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{B}\right|=\frac{|b_n-B|}{|B||b_n|}<\frac{\frac{1}{2}B^2\epsilon}{|B|\cdot\frac{1}{2}|B|}=\epsilon.$$

从而完成了证明.

(b) 由(a)部分和习题12,我们有

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\,\frac{1}{b_n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=A\cdot\frac{1}{B}=\frac{A}{B}$.这也可直接证明(见习题41).

14. 用极限的定理计算下列各式:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-5n}{5n^2+2n-6}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-5/n}{5+2/n-6/n^2}=\frac{3+0}{5+0+0}=\frac{3}{5}$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n+2)}{n+1}-\frac{n^3}{n^2+1}\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{n^3+n^2+2n}{(n+1)(n^2+1)}\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1+1/n+2/n^2}{(1+1/n)(1+1/n^2)}\right\}=\frac{1+0+0}{(1+0)(1+0)}=1$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n}{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+4/n}{2/n-1/n^2}$.

由于分子和分母的极限分别为3和0,所以这个极限不存在.

因$\frac{3n^2+4n}{3n-1}>\frac{3n^2}{2n}=\frac{3n}{2}$,所以可通过选择$n>N$,使这式子大于任一正数$M$.如果要求写出,可记为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n}{3n-1}=\infty$.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{3n+7}\right)^4=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-3/n}{3+7/n}\right)^4=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$.

(f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^5-4n^2}{3n^7+n^3-10}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2/n^2-4/n^5}{3+1/n^4-10/n^7}=\frac{0}{3}=0$.

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2\cdot10^n}{5+3\cdot10^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^{-n}+2}{5\cdot10^{-n}+3}=\frac{2}{3}$ (与习题5比较).

有界单调序列

15. 证明第n项为$u_n=\frac{2n-7}{3n+2}$的序列(a)单调递增,(b)上有界,(c)下有界,(d)有界,(e)有极限.

证明 ☞ (a) 如果$u_{n+1}\geqslant u_n$,$n=1,2,3,\cdots$,则序列$\{u_n\}$单调递增,现在$\frac{2(n+1)-7}{3(n+1)+2}\geqslant\frac{2n-7}{3n+2}$ 当且

仅当$\frac{2n-5}{3n+5}\geqslant\frac{2n-7}{3n+2}$

或$(2n-5)(3n+2)\geqslant(2n-7)(3n+5)$，$6n^2-11n-10\geqslant 6n^2-11n-35$

即$-10\geqslant-35$.这是成立的，于是逆推上面各步，可得$\{u_n\}$是单调递增的.实际上，由于$-10>-35$，所以这个序列是严格递增的.

(b) 通过写出这个序列的某些项，我们可估计一个上界是2(比如).为了证明这一点，我们必须证明$u_n\leqslant 2$.如果$(2n-7)/(3n+2)\leqslant 2$，那么$2n-7\leqslant 6n+4$或$-4n\leqslant 11$，这是真的.逆推上面各步，可得2是它的一个上界.

(c) 由于这个序列是单调递增的，首项-1是它的一个下界，即$u_n\geqslant-1$，$n=1,2,3,\cdots$.比-1小的任何数都是它的下界.

(d) 由于这个序列有一个上界和一个下界，所以它是有界的，因此我们可写成$|u_n|\leqslant 2$.

(e) 由于每一个有界单调(递增或递减的)序列有极限，所以这已知序列有极限.事实上.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-7}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-7/n}{3+2/n}=\frac{2}{3}.$$

16. 设$\{u_n\}$是用递推公式$u_{n+1}=\sqrt{3u_n}$，$u_1=1$定义的一个序列，

(a) 证明$\lim_{n\to\infty}u_n$存在，(b) 求出这个极限.

证明 ☞ (a) 这个序列的各项是$u_1=1$，$u_2=\sqrt{3u_1}=3^{\frac{1}{2}}$，$u_3=\sqrt{3u_2}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$，…，第$n$项可按数学归纳法(第一章)证明表示成$u_n=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}$.

很显然，$u_{n+1}\geqslant u_n$，那么这个序列是单调递增的.

由第一章中的习题14，$u_n\leqslant 3^1=3$，即u_n是上有界的.因此u_n是有界的(因一个下界为0).

由于这个序列是有界的，单调递增的，故极限存在.

(b) 设x为所求的极限，由$\lim_{n\to\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3u_n}$，我们有$x=\sqrt{3x}$，$x=3$.(因$u_n\geqslant 1$，另一种可能$x=0$被排除了).

另一种求法： $\lim_{n\to\infty}3^{1/2+1/4+\cdots+1/2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}3^{1-1/2^n}=3^{\lim_{n\to\infty}(1-1/2)^n}=3^1=3.$

17. 验证下表中所填各项的正确性.

序列	有界	单调增	单调减	极限存在
$2,1.9,1.8,1.7,\cdots,2-(n-1)/10,\cdots$	不是	不是	是	不
$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$	是	不是	不是	不
$\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{5},\cdots,(-1)^{n-1}/n+1,\cdots$	是	不是	不是	是(0)
$0.6,0.66,0.666,\cdots,\frac{2}{3}(1-1/10^n),\cdots$	是	是	不是	是$\left(\frac{2}{3}\right)$
$-1,+2,-3,+4,-5,\cdots,(-1)^n n,\cdots$	不是	不是	不是	不

18. 证明$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

证明 ☞ 如果n是正整数，由二项式定理(见第一章习题95)

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}x^n.$$

令$x=1/n$.

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

由于在这最后的表示式中除前两项外的每一项都是 n 的递增函数，因此这个序列 u_n 是单调递增的.

由第一章习题 14，显然有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

从而 u_n 是有界的，单调递增的，故有极限. 我们将这个极限记为 e，其值为 $e=2.718\ 28\cdots$.

19. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$，其中 x 以任何方式趋向∞（即不必像习题 18 中沿正整数趋向∞）.

证明 ☞　若 n = 小于等于 x 的最大整数，则 $n\leqslant x\leqslant n+1$.

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\leqslant\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\Big/\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)=e$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\Big/\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=e$,

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

上确界，下确界，上极限，下极限

20. 求序列 $2,-2,1,-1,1,-1,1,-1,\cdots$ 的(a)上确界，(b)下确界，(c)上极限，(d)下极限.

解 ☞　(a) 上确界 = 2. 因为所有的项都小于或等于 2，而对任给的 $\varepsilon>0$，至少有一项（第一项）比 $2-\varepsilon$ 大.

(b) 下确界 = −2. 因为所有项都大于或等于 −2，而对任给的 $\varepsilon>0$，至少有一项（第二项）比 $-2+\varepsilon$ 小.

(c) 上极限 = 1，因为对任意的 $\varepsilon>0$，序列中有无穷多项（也就是序列中所有取值为 1 的那些项）大于 $1-\varepsilon$，而仅有有限项（也就是第一项）比 $1+\varepsilon$ 大.

(d) 下极限 = −1，因为对任意的 $\varepsilon>0$，序列中有无穷多项比 $-1+\varepsilon$ 小（即序列中所有取值为 −1 的那些项），而仅有有限项比 $-1-\varepsilon$ 小（即第 2 项）.

21. 求 17 题中各序列的(a)上确界，(b)下确界，(c)上极限，(d)下极限

解 ☞　下表中列出了所要求的结果：

序　　列	上确界	下确界	上极限	下极限
$2,1.9,1.8,1.7,\cdots,2-(n-1)/10,\cdots$	2	无	$-\infty$	$-\infty$
$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$	1	−1	1	−1
$\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{5},\cdots,(-1)^{n-1}/n+1,\cdots$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	0
$0.6,0.66,0.666,\cdots,\frac{2}{3}(1-1/10^n),\cdots$	$\frac{2}{3}$	6	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$-1,+2,-3,+4,-5,\cdots,(-1)^n n,\cdots$	无	无	$+\infty$	$-\infty$

区间套

22. 证明区间套 $[a_n,b_n]$，$n=1,2,3,\cdots$ 的每一个区间含有惟一一个公共的实数.

证明 ☞　由区间套定义，$a_{n+1}\geqslant a_n$，$b_{n+1}\leqslant b_n$，$n=1,2,3,\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$，则有 $a_1\leqslant a_n\leqslant b_n\leqslant b_1$，序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是有界的，且分别是单调增的和单调减的，从而分别收敛于 a 和 b.

为了证明 $a=b$，我们注意到

$$b-a=(b-b_n)+(b_n-a_n)+(a_n-a),\tag{1}$$

$$|b-a|\leqslant|b-b_n|+|b_n-a_n|+|a_n-a|.\tag{2}$$

现对任给的 $\varepsilon>0$,我们可找到 N,当 $n>N$ 时有

$$|b-b_n|<\varepsilon/3,\ |b_n-a_n|<\varepsilon/3,\ |a_n-a|<\varepsilon/3, \tag{3}$$

因此由(2),$|b-a|<\varepsilon$,由于 ε 是任一正数,所以必须有 $b-a=0$,即 $b=a$.

23. 证明魏尔斯特拉斯-波尔察诺定理(见 p.5).

解 ☞　假定已知的有界无限集包含在有限区间$[a,b]$中.将这个区间等分成两个小区间,那么至少有一个区间包含无穷多个点,记这个区间为$[a_1,b_1]$.再将$[a_1,b_1]$等分成两个区间,我们得到另一个包含无穷多个点的小区间,记为$[a_2,b_2]$.继续这个过程,我们得到一列区间$[a_n,b_n]$,$n=1,2,3,\cdots$,每一个区间包含在前一个区间中,且满足 $b_1-a_n=\frac{b-a}{2}$,$b_2-a_2=(b_1-a_1)/2=(b-a)/2^2$,$\cdots$,$b_n-a_n=(b-a)/2^n$,$\cdots$从而我们看到$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

由习题 22,这个区间套对应于一个实数,这个数就是极限点,故证明了这个定理.

柯西收敛准则

24. 证明 p.41 上陈述的柯西收敛准则.

证明 ☞　**必要性**.假设序列$\{u_n\}$收敛于 l,那么对任意给定的 $\varepsilon>0$,可找到 N,当 $p>N$ 时有$|u_p-l|<\varepsilon/2$,当 $q>N$ 时有$|u_q-l|<\varepsilon/2$.

从而当 $p>N$ 和$q>N$ 同时成立时,有

$$|u_p-u_q|=|(u_p-l)+(l-u_q)|\leqslant|u_p-l|+|l-u_q|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

充分性　假设对 $p,q>N$ 和任意$\varepsilon>0$,有$|u_p-u_q|<\varepsilon$,那么 $u_N,u_{N+1},\cdots$,位于一个有限区间中,即这个集是有界的和无限的,因此由魏尔斯特拉斯-波尔察诺定理至少有一个极限点,称其为 a.

如果 a 是惟一的极限点,则我们得到了所要的证明,$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$.

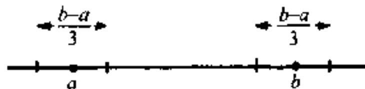


图 3-1

假定有两个不同的极限点 a 和b,不妨设 $b>a$(见图 3-1).由极限定义,我们有对无穷多个 p 值.

$$|u_p-a|<(b-a)/3. \tag{1}$$

对无穷多个 q 值,

$$|u_q-a|<(b-a)/3, \tag{2}$$

那么由 $b-a=(b-u_q)+(u_q-u_p)+(u_p-a)$,有

$$|b-a|=b-a\leqslant|b-u_q|+|u_q-u_p|+|u_p-a| \tag{3}$$

将(1)和(2)式用到(3)式中,我们看到对无穷多个 p 和q 值有$|u_p-u_q|>(b-a)/3$.这与假设(对 $p,q>N$ 及任意$\varepsilon>0$,有$|u_p-u_q|<\varepsilon$)矛盾.因此仅有惟一一个极限点,定理证毕.

无穷级数

25. 证明无穷级数(有时称为几何级数)

$$a+ar+ar^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$$

(a) 若$|r|<1$,则收敛于 $a/(1-r)$,(b) 若$|r|\geqslant1$,则发散.

证明 ☞　令 $S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$,

则　　$rS_n=\quad ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n$

两式相减

$$(1-r)S_n=a\qquad\qquad -ar^n.$$

即 $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$.

(a) 若$|r|<1$,则由习题 7 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}$.

(b) 若$|r|>1$,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在(见习题 44).

26. 如果一个级数收敛,则它的第 n 项一定趋于0.

证明 ☞　因 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$, $S_{n-1}=u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}$,

则有 $u_n=S_n-S_{n-1}$,

若这个级数收敛于 S,则

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0.$$

27. 证明级数 $1-1+1-1+1-1+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散.

证法1　$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\neq0$,事实上它不存在,那么由习题26这个级数一定不收敛,即它发散.

证法2　这个序列的部分和是 $1,1-1,1-1+1,1-1+1-1,\cdots$ 即 $1,0,1,0,1,0,1,\cdots$,因这序列没有极限,故这级数发散.

杂题

28. 若 $\lim_{n\to\infty}u_n=l$,证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}=l$.

证明 ☞　令 $u_n=v_n+l$,我们要证的是若 $\lim_{n\to\infty}v_n=0$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_1+v_2+\cdots+v_n}{n}=0.\text{现在},$$

$$\frac{v_1+v_2+\cdots+v_n}{n}=\frac{v_1+v_2+\cdots+v_p}{n}+\frac{v_{p+1}+v_{p+2}+\cdots+v_n}{n},$$

因此 $\left|\frac{v_1+v_2+\cdots+v_n}{n}\right|\leqslant\frac{|v_1+v_2+\cdots+v_p|}{n}+\frac{|v_{p+1}|+|v_{p+2}|+\cdots+|v_n|}{n}$.　　(1)

由于 $\lim_{n\to\infty}v_n=0$. 我们可选择 P,对 $n>P$ 有 $|v_n|<\varepsilon/2$,那么

$$\frac{|v_{p+1}|+|v_{p+2}|+\cdots+|v_n|}{n}<\frac{\varepsilon/2+\varepsilon/2+\cdots+\varepsilon/2}{n}=\frac{(n-p)\varepsilon/2}{n}<\varepsilon/2\qquad(2)$$

在选了 P 之后,我们可选 N,对 $n>N>P$,有

$$\frac{|v_1+v_2+\cdots+v_p|}{n}<\varepsilon/2.\qquad(3)$$

于是利用(2)和(3),对 $n>N$,(1)变成为

$$\left|\frac{v_1+v_2+\cdots+v_n}{n}\right|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

故证明了所要的结果.

29. 证明 $\lim_{n\to\infty}(1+n+n^2)^{1/n}=1$

证明 ☞　设 $(1+n+n^2)^{1/n}=1+u_n$,其中 $u_n\geqslant0$. 现在由二项式定理

$$1+n+n^2=(1+u_n)^n=1+nu_n+\frac{n(n-1)}{2!}u_n^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u_n^3+\cdots+u_n^n,$$

那么 $1+n+n^2>1+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u_n^3$,

即 $0<u_n^3<\frac{6(n^2+n)}{n(n-1)(n-2)}$,

因此 $\lim_{n\to\infty}u_n^3=0$, $\lim_{n\to\infty}u_n=0$,从而 $\lim_{n\to\infty}(1+n+n^2)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}(1+u_n)=1$.

30. 证明:对所有的常数 a, $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

证明 ☞　如果我们可以证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a|^n}{n!}=0$,则结论就成立了(见习题39). 现假设 $a\neq0$.

令 $u_n=\frac{|a|^n}{n!}$,那么$\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{|a|}{n}$.如果 n 足够大,比如说 $n>2|a|$,并令 $N=[2|a|+1]$即小于等于 $2|a|+1$ 的最大整数,那么$\frac{u_{N+1}}{u_N}<\frac{1}{2},\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}<\frac{1}{2},\cdots\frac{u_n}{u_{n-1}}<\frac{1}{2}$,

将这些不等式相乘得到$\frac{u_n}{u_N}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$,即 $u_n<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}u_N$,

因$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}=0$(利用习题 7),故有$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

31. 用 $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots$可简洁地表示下面这个式子 $a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}$,其中 $a_1,a_2,\cdots$是正整数,这是一个连分数的例子.它的值定义为这个序列 $a_1,a_1+\frac{1}{a_2},a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}},\cdots$的极限.当这个极限存在时,称这个连分数收敛于这个极限.这个序列的逐次项称为这个连分数的逐次渐近分数,常数 $a_1,a_2,\cdots$在某点后重复时,称这个连分数为循环的.已知一循环连分数为 $2+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots$.(a) 求出前 10 个渐近分数,并估计一个可能极限.(b)假定这个极限存在,求出它的值.

解 (a) 第 1 个渐近分数 $=2$,

第 2 个渐近分数 $=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=2.5$,

第 3 个渐近分数 $=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=2+\frac{1}{5/2}=\frac{12}{5}=2.4$,

第 4 个渐近分数 $=2+\frac{1}{12/5}=\frac{29}{12}=2.4166\cdots$,

第 5 个渐近分数 $=2+\frac{1}{29/12}=\frac{70}{29}=2.4137\cdots$,

类似地,我们可找到第 6 至第 10 个渐近分数,其值分别为$\frac{169}{70}=2.4140\cdots,\frac{408}{169}=2.4142\cdots,\frac{985}{408}=2.4142\cdots,\frac{2378}{985}=2.4142\cdots,\frac{5741}{2378}=2.4142\cdots$

由上结果,估计所求极限精确到 4 位小数为 2.4142 是合理的.

有趣地看到如果 P_n/Q_n 和P_{n+1}/Q_{n+1}分别是第 n 个和第$n+1$ 个渐近分数,那么第 $n+2$ 个渐近分数是$\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}}=\frac{2P_{n+1}+P_n}{2Q_{n+1}+Q_n}$.

关于连分数的一般结论,见习题 75(a).

(b) 假定这个极限为 x,那么显然有 $x=2+\frac{1}{x}$于是$x^2-2x-1=0$,即 $x=1\pm\sqrt{2}$.因为这个极限不可能为负值,所以它一定是 $1+\sqrt{2}$.这与(a)中的估计是一致的,因为$\sqrt{2}$的近似值为 1.4142.

注意这个连分数可用递推公式

$$u_{n+1}=2+1/u_n,u_1=2$$

确定.如果$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=x$ 存在,则得到 $x=2+\frac{1}{x}$,与上面一样.

补充习题

序列

32. 写出下列序列的前 4 项:

(a) $\left\{\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right\}$,(b) $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right\}$,(c) $\left\{\frac{(2x)^{n-1}}{(2n-1)^5}\right\}$,

(d) $\left\{\dfrac{(-1)^n x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right\}$，(e) $\left\{\dfrac{\cos nx}{x^2+n^2}\right\}$.

33. 求出下列前 5 项已确定的序列的一种可能的第 n 项和第 6 项.

(a) $-\dfrac{1}{5},\dfrac{3}{8},\dfrac{5}{-11},\dfrac{7}{14},\dfrac{9}{-17},\cdots$，(b) $1,0,1,0,1,\cdots$，

(c) $\dfrac{2}{3},0,\dfrac{3}{4},0,\dfrac{4}{5},\cdots$.

34. 斐波那契(Fibonacci)序列是这样的序列$\{u_n\}$，满足 $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$，$u_1=1$，$u_2=1$.(a) 求出这个序列的前 6 项.(b) 证明第 n 项为 $u_n=(a^n-b^n)/\sqrt{5}$，其中 $a=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$，$b=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})$.

序列极限

35. 利用极限定义证明：

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-2n}{3n+2}=-\dfrac{2}{3}$，(b) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$，(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+1}{n^2}=\infty$，(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$.

36. 若(a)$\varepsilon=0.01$，(b) $\varepsilon=0.001$，(c) $\varepsilon=0.0001$，求出最小正数 N，当 $n>N$ 时有$|(3n+2)/(n-1)-3|<\varepsilon$ 成立.

37. 利用极限定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)/(3n+4)$不可能是$\dfrac{1}{2}$.

38. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n$ 不存在.

39. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0$，那么$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.反过来正确吗?

40. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=l$，证明：(a) $\lim\limits_{n\to\infty}cu_n=cl$，其中 c 为任意常数，(b) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n^2=l^2$，(c) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n^p=l^p$，$p$ 为正整数，(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{u_n}=\sqrt{l}$，$l\geqslant 0$.

41. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 和$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B\neq 0$，直接证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n/b_n=A/B$.

42. 证明：(a) $\lim\limits_{n\to\infty}3^{1/n}=1$，(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1/n}=1$，(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n=0$.

43. 如果 $r>1$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\infty$.详细解释这个命题的重要性.

44. 若$|r|>1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}r^n$ 不存在.

45. 利用极限的定理计算下列各式：

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-2n-3n^2}{2n^2+n}$，(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{(3-\sqrt{n})(\sqrt{n}+2)}{8n-4}}$，(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2-5n+4}}{2n-7}$，

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\cdot 10^n-3\cdot 10^{2n}}{3\cdot 10^{n-1}+2\cdot 10^{2n-1}}$，(e) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$，(f) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{1/n}$.

有界单调序列

46. 证明第 n 项为 $u_n=\sqrt{n}/n+1$ 的序列(a)单调递减，(b) 下有界，(c) 上有界，(d) 有极限.

47. 若 $u_n=\dfrac{1}{1+n}+\dfrac{1}{2+n}+\dfrac{1}{3+n}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在，且介于 0 和 1 之间.

48. 若 $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$，$u_1=1$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

49. 若 $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}(u_n+p/u_n)$，其中 $p>0$ 和 $u_1>0$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\sqrt{p}$，并说明怎样利用这个结论确定$\sqrt{2}$.

50. 如果 u_n 是单调递增的(或单调递减的)，证明：S_n/n 也是单调递增的(或单调递减的)，其中 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$.

上确界，下确界，上极限，下极限

51. 求下列各序列的上确界，下确界，上极限，下极限：

(a) $-1,\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{7},\cdots,(-1)^n/(2n-1),\cdots$，(b) $\dfrac{2}{3},-\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},-\dfrac{5}{6},\cdots,(-1)^{n+1}(n+1)/(n+2),\cdots$，

(c) $1,-3,5,-7,\cdots,(-1)^{n-1}(2n-1),\cdots$，

(d) $1,4,1,16,1,36,\cdots,n^{1+(-1)^n},\cdots$.

52. 证明一个有界序列$\{u_n\}$收敛的充要条件是$\overline{\lim}\,u_n=\underline{\lim}\,u_n$.

无穷级数

53. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 的和.

54. 计算 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/5^n$.

55. 证明：$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$. $\left[\text{提示：}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]$.

56. 证明用非零常数乘一个无穷级数的每一项，不会影响级数的敛散性.

57. 证明级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$发散.[提示：令 $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$,那么可证明$|S_{2n}-S_n|>\frac{1}{2}$,这与柯西收敛准则相矛盾.]

杂题

58. 若对所有的 $n>N$,有 $a_n\leqslant u_n\leqslant b_n$,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=l$,则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=l$.

59. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, θ 与 n 无关,证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)=0$. 当 θ 依赖于 n 时这个结果成立吗?

60. 设 $u_n=\frac{1}{2}\{1+(-1)^n\}$, $n=1,2,3,\cdots$,若 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}S_n/n=\frac{1}{2}$.

61. 证明：(a) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a+n)^{p/n}=1$,其中 a 和 p 是常数.

62. 若$\lim\limits_{n\to\infty}|u_{n+1}/u_n|=|a|<1$,证明：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

63. 若$|a|<1$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}n^pa^n=0$,其中常数 $p>0$.

64. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}=0$.

65. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin 1/n=1$.

66. 若$\{u_n\}$是斐波那契序列(习题 34),证明$\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}/u_n=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

67. 证明序列 $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n=1,2,3,\cdots$是单调递减序列,它的极限为 e.[提示：证明 $u_{n+1}\big/u_n\leqslant1$].

68. 如果对所有的 $n>N$, $a_n\geqslant b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$,证明 $A\geqslant B$.

69. 若$|u_n|\leqslant|v_n|$, $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

70. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=0$.

71. 证明$[a_n,b_n]$是一个确定数 e 的区间套,其中 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

72. 证明每一个有界单调(递增或递减)序列有极限.

73. 验证下列各连分数的值：

(a) $3+\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}+\frac{1}{2+}\cdots=\frac{1}{2}(3+\sqrt{15})$, (b) $a+\frac{1}{a+}\frac{1}{a+}\frac{1}{a+}\cdots=\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4})$,

(c) $a+\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{a}+\frac{a}{b}}$, (d) $\frac{1}{2-}\frac{1}{2-}\frac{1}{2-}\frac{1}{2-}\cdots=1$.

74. 把(a) 174/251, (b) $\sqrt{3}$, (c) $\sqrt{6}$和(d) 3.14159 表示成连分数.[提示：在(b)上加减比$\sqrt{3}$小的最大整数(即 1)得到$\sqrt{3}=1+(\sqrt{3}-1)=1+\frac{1}{1/(\sqrt{3}-1)}=1+\frac{1}{(\sqrt{3}+1)/2}$.

然后在$(\sqrt{3}+1)/2$ 上加减最大整数(即 1)得到

$$(\sqrt{3}+1)/2=1+(\sqrt{3}-1)/2=1+\frac{1}{2/(\sqrt{3}-1)}=1+\frac{1}{\sqrt{3}+1}.$$

然后在$\sqrt{3}+1$ 上加减最大整数(即 2)得到

$$\sqrt{3}+1=2+(\sqrt{3}-1)=2+\frac{1}{1/(\sqrt{3}-1)}=2+\frac{1}{(\sqrt{3}+1)/2},$$

这以后就出现重复了.]

75. 已知连分数 $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4+}\cdots$, $a_n>0$,它的第 n 个渐近分数是P_n/Q_n,证明下列各式并用例子说明：

(a) $P_n = a_nP_{n-1} + P_{n-2}, Q_n = a_nQ_{n-1} + Q_{n-2}$,

(b) $P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n = (-1)^{n-1}$,

(c) 逐次渐近分数交替地比连分数小和大.

(d) 奇次的渐近分数比连分数小,但是递增的;偶次的渐近分数比连分数大,但是递减的.

(e) 这个连分数总是收敛的.

76. (a) 证明如果 P_n/Q_n 和 P_{n+1}/Q_{n+1} 是习题 75 中的连分数的两个逐次渐近分数,那么 $\left|\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}\right| \leqslant \frac{1}{a_{n+1}Q_n^2} \leqslant \frac{1}{Q_n^2}$. (b) 求关于$\sqrt{3}$的一次渐近分数,精确到 2 位小数.

77. 设序列$\{u_n\}$满足 $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$,其中 a 和 b 是常数,称这关系式为关于 u_n 的二阶差分方程. (a) 若假定一个解的形式为 $u_n = r^n$,其中 r 是常数,证明: r 一定满足 $r^2 - ar - b = 0$.

(b) 利用(a),证明这个差分方程的解(称为一般解)是 $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$,其中 A, B 是任意常数, r_1 和 r_2 是 $r^2 - ar - b = 0$ 的两个不同解. (c)在(b)中若 $r_1 = r_2$,证明一般解为 $u_n = (A + Bn)r_1^n$.

78. 求解满足已知条件的差分方程:

(a) $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, u_1 = 1, u_2 = 1$(跟习题 34 比较),

(b) $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n, u_1 = 3, u_2 = 5$,

(c) $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n, u_1 = 2, u_2 = 8$.

79. (a) 证明连分数 $1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\cdots$的 n 次渐近分数是

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}\right\} \quad [\text{提示:利用习题 } 34].$$

(b) 在(a)中通过取 $n \to \infty$时的极限,求出这个连分数的值.

80. 通过先求出 n 次渐近分数来解习题 73 的(a)~(d).

第四章 导　　数

导数的定义

设 $f(x)$在(a,b)中任一点 x_0 处有定义,如果$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$极限存在,则将此极限定义为 $f(x)$在 $x=x_0$ 点处的导数,即

$$f'(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \tag{1}$$

导数也可用其他等价的方式定义,例如

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2}$$

如果一个函数在 $x=x_0$ 处有导数,则称此函数在 $x=x_0$ 处是可微的.如果 $f(x)$在 $x=x_0$ 处可微,则它一定在 $x=x_0$ 处连续,但是反过来未必是真的(见习题 3 和习题 4).

右导数和左导数

$f(x)$在 $x=x_0$ 点的右导数定义为

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \tag{3}$$

当然要求右端极限存在.注意在这种情况下当 $h(=\Delta x)$趋于 0 时,它仅取正值.

类似地,$f(x)$在 $x=x_0$ 点的左导数定义为

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \tag{4}$$

若右端极限存在.此时当 h 趋于 0 时 h 仅取负值.

函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 点有导数当且仅当 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

区间上的可导性

如果一个函数在一个区间上的所有点处有导数,则称此函数在这个区间上可导.特别地如果 $f(x)$定义在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$,即$[a,b]$上,那么 $f(x)$在这个区间上可导当且仅当对 $a<x_0<b$ 上的每一点x_0,$f'(x_0)$存在及 $f'_+(a)$和 $f'_-(b)$存在.

如果一个函数有连续的导数,则有时称它为连续可导的.

分段可导性

如果 $f'(x)$在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上是分段连续的,则称 $f(x)$在这个区间上为分段可导的或分段光滑的.p.24 从几何上列举了一个分段连续函数的例子.

导数的几何意义

图 4-1 中用曲线 $APQB$ 表示 $y=f(x)$的图形.差商

$$\frac{QR}{PR}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\tan\theta \tag{5}$$

是曲线上连接 P 和 Q 点割线的斜率. 当 $\Delta x\to 0$ 时,这割线趋近于曲线在 P 点处的切线 PS,那么

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{SR}{PR}=\tan\alpha \tag{6}$$

是曲线在 P 点处切线的斜率.

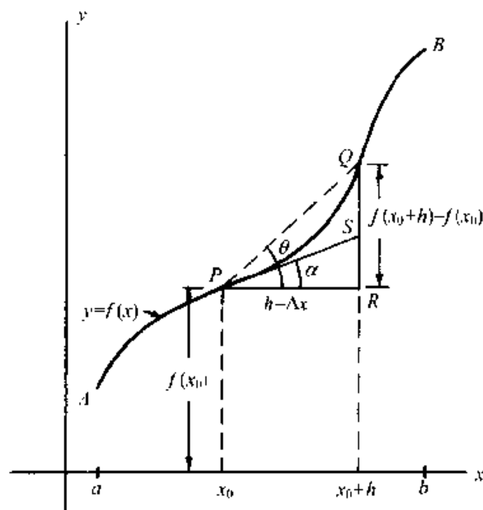


图 4-1

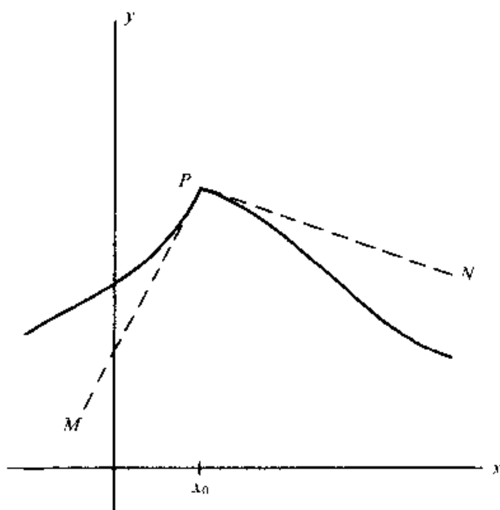


图 4-2

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0). \tag{7}$$

图 4-2 从几何上表明了这样一个事实:函数可以在一点处连续而不可导,由图中可见在 P 点处有两条切线 PM 和 PN,它们的斜率分别是 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$.

微分

令 $\Delta x=dx$ 是关于 x 的一个给定增量,那么

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \tag{8}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的增量. 如果 $f(x)$ 在一个区间上是连续的且有连续的导数,那么

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\varepsilon\cdot\Delta x=f'(x)dx+\varepsilon\cdot dx \tag{9}$$

其中当 $\Delta x\to 0$ 时 $\varepsilon\to 0$. 表达式

$$dy=f'(x)dx \tag{10}$$

称为 y 或 $f(x)$ 的微分或 Δy 的主部. 注意一般地 $\Delta y\neq dy$. 但是如果 $\Delta x=dx$ 很小,那么 dy 是 Δy 的一个很好的近似(见习题 11). 量 dx 称为 x 的微分, dy 不必很小.

由于(8)和(10)式的定义,故我们常写成

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{11}$$

要强调的是 dx 和 dy 不是 $\Delta x\to 0$ 时 Δx 和 Δy 的极限,因为这两个极限都为零,而 dx 和 dy 不一定为零. 换言之,已知 dx,我们由(10)式确定 dy,即对一个已知的 x, dy 是由独立变量 dx 确定的一个相关变量.

几何上,对特定的 $x=x_0$,dy 就是图 4-1 中线段 SR,而 Δy 就是线段 QR.

求导法则

如果 f,g 和 h 是可微函数,则下列求导法则成立:

1. $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dy}g(x)=f'(x)+g'(x)$,

2. $\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)=f'(x)-g'(x)$,

3. $\frac{d}{dx}\{Cf(x)\}=C\frac{d}{dx}f(x)=Cf'(x)$,$C$ 是任意常数,

4. $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=f(x)\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\frac{d}{dx}f(x)=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$,

5. $\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}=\frac{g(x)f'(x)-f'(x)g(x)}{[g(x)]^2}$,若 $g(x)\neq 0$,

6. 若 $y=f(u)$,$u=g(x)$,则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\frac{du}{dx}=f'\{g(x)\}\cdot g'(x). \tag{12}$$

类似地,如果 $y=f(u)$,$u=g(v)$,$v=h(x)$,那么,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}. \tag{13}$$

(12)和(13)式常称为复合函数的链导法则.

7. 若 $y=f(x)$,则 $x=f^{-1}(y)$,$\frac{dy}{dx}$和$\frac{dx}{dy}$的关系是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{dx/dy}, \tag{14}$$

8. 若 $x=f(t)$和 $y=g(t)$,则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{f'(t)}{g'(t)}. \tag{15}$$

类似的规则可套用到微分上. 例如

$$d\{f(x)+g(x)\}=df(x)+dg(x)=f'(x)dx+g'(x)dx=\{f'(x)+g'(x)\}dx,$$

$$d\{f(x)g(x)\}=f(x)dg(x)+g(x)df(x)=\{f(x)g'(x)+g(x)f'(x)\}dx.$$

特殊函数的导数

以下假定 u 是 x 的可微函数;若 $u=x$,则$\frac{du}{dx}=1$. 反函数是按照第二章中给定的主值定义的.

1. $\frac{d}{dx}(C)=0$,

2. $\frac{d}{dx}u^n=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$,

3. $\frac{d}{dx}\sin u=\cos u\frac{du}{dx}$,

4. $\frac{d}{dx}\cos u=-\sin u\frac{du}{dx}$,

5. $\frac{d}{dx}\tan u=\sec^2 u\frac{du}{dx}$,

6. $\frac{d}{dx}\cot u=-\csc^2 u\frac{du}{dx}$,

7. $\frac{d}{dx}\sec u=\sec u\tan u\frac{du}{dx}$,

8. $\frac{d}{dx}\csc x=-\csc u\cot u\frac{du}{dx}$,

9. $\frac{d}{dx}\log_a u=\frac{\log_a e}{u}\frac{du}{dx}, a>0, a\neq 1$,

10. $\frac{d}{dx}\log_e u=\frac{d}{dx}\ln u=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$,

11. $\frac{d}{dx}a^u=a^u\ln a\frac{du}{dx}$,

12. $\frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{du}{dx}$,

13. $\frac{d}{dx}\arcsin u=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$,

14. $\frac{d}{dx}\arccos u=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$,

15. $\frac{d}{dx}\arctan u=\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$,

16. $\frac{d}{dx}\text{arccot}\, u=-\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$,

17. $\frac{d}{dx}\text{arcsec}\, u=\pm\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}\begin{cases}\text{取正,若 } u>1,\\ \text{取负,若 } u<-1,\end{cases}$

18. $\frac{d}{dx}\text{arccsc}\, u=\mp\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}\begin{cases}\text{取负,若 } u>1,\\ \text{取正,若 } u<-1,\end{cases}$

19. $\frac{d}{dx}\sinh u=\cosh u\frac{du}{dx}$,

20. $\frac{d}{dx}\cosh u=\sinh u\frac{du}{dx}$,

21. $\frac{d}{dx}\tanh u=\text{sech}^2 u\frac{du}{dx}$,

22. $\frac{d}{dx}\coth u=-\text{csch}^2 u\frac{du}{dx}$,

23. $\frac{d}{dx}\text{sech}\, u=-\text{sech}\, u\tanh u\frac{du}{dx}$,

24. $\frac{d}{dx}\text{csch}\, u=-\text{csch}\, u\coth u\frac{du}{dx}$,

25. $\frac{d}{dx}\text{arsinh}\, u=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$,

26. $\frac{d}{dx}\text{arcosh}\, u=\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$,

27. $\frac{d}{dx}\text{artanh}\, u=\frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, |u|<1$,

28. $\frac{d}{dx}\text{arcoth}\, u=\frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, |u|>1$.

29. $\frac{d}{dx}\text{arsech}\, u=-\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$,

30. $\frac{d}{dx}\text{arcsch}\, u=-\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$.

高阶导数

若 $f(x)$在一个区间上是可微的,则它的导数用 $f'(x)$, y'或dy/dx 给出,其中 $y=f(x)$. 若 $f'(x)$在这个区间上也是可微的,则它的导数用 $f''(x)$, y''或$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$表示. 类似地 $f(x)$的 n 阶导数,如果它存在,则用 $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$或$\frac{d^ny}{dx^n}$表示,其中 n 称为这个导数的阶. 因此一阶,二阶,三阶,…导数分别用 $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$,…给出.

高阶导数的计算通过重复应用上面给出的微分规则进行.

中值定理

1. 罗尔定理:如果 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可微,且 $f(a)=f(b)=0$,那么在(a,b)内存在一点 ξ,使得 $f'(\xi)=0$.

2. 中值定理:如果 $f(x)$在(a,b)上连续,在(a,b)上可微,则在(a,b)内存在一点 ξ,满足

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi), a<\xi<b. \tag{16}$$

显见罗尔定理是中值定理的特殊情况.

结论(16)可用各种不同的形式表出. 例如若 x 和x_0 是(a,b)内的两点,则

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0), \xi\text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}. \tag{17}$$

我们也可令 $b=a+h$ 写出(16)式. 在这种情况下 $\xi=a+\theta h$, $0<\theta<1$.

3. 柯西(Cauchy)中值定理:如果 $f(x)$和 $g(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可微,且$g(a)\neq g(b)$, $f'(x)$, $g'(x)$不同时为零,则在(a,b)内存在一点 ξ 满足

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},a<\xi<b. \tag{18}$$

4．泰勒(Taylor)中值定理：如果 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，那么在 (a,b) 中存在一点 ξ，满足

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)(b-a)^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)(b-a)^n}{n!}+R_n, \tag{19}$$

其中 R_n，称为余项，可以用下面两种形式表示：

拉格朗日(Lagrange)形式：

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!},a<\xi<b, \tag{20}$$

柯西形式：

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(b-\xi)^n(b-a)}{n!},a<\xi<b, \tag{21}$$

见习题 26，81～84，在这两种形式中 ξ 的值一般是不同的.

(19)式可用不同的形式表示. 例如若 x 与 x_0 是 (a,b) 内两点，则利用余项 R_n 的拉格朗日形式有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{22}$$

其中 ξ 在 x 与 x_0 之间. 这常称为带余项的泰勒级数，且常用一多项式近似表示 $f(x)$，而 R_n 是误差项.

在(19)式中，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$，那么由此得到的无穷级数称为 $f(x)$ 关于 $x=x_0$ 的一个泰勒级数. 若 $x_0=0$，则称这个级数为麦克劳林(Maclaurin)级数. 这样形式的级数都称为幂级数，一般地它在某区间的所有 x 值上都收敛，而在这区间外面的所有 x 值上都发散，我们称这个区间为收敛区间(见第十一章中的进一步讨论).

在泰勒中值定理中，除特别声明，我们都假定余项写成拉格朗日形式.

特殊展开式

下面列出的都是一些重要展开式. 在每种情形下余项 R_n 都可以通过(20)或(21)式得到

1．$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n$，

2．$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_n$，

3．$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}+R_n$，

4．$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+R_n$，

5．$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}+R_n$.

在 1～3 式中，对所有的 x 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$；在 4 式中对 $-1<x\leqslant 1$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$；在 5 式中，对 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$. 有关这些展开式将在第十一章中作进一步讨论.

洛必达(L'Hospital)法则

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，$A$ 和 B 或者都为 0 或者都为无穷大，那么我们常称

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$分别是$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$的未定式.尽管这种术语有点误导,因为通常不涉及极限不确定的问题.下面称为洛必达法则的定理使得计算这种未定式变得很简便.

1. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,$f(x)$和$g(x)$在除$x_0>x$外的区间$(a,b)$上是可微的,且$g'(x)\neq 0$及$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$极限存在,那么

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{23}$$

若$f'(x)$和$g'(x)$具有像上面给出的$f(x)$和$g(x)$所具备的一切条件,那么这个过程可以重复进行.

2. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$,则结论(23)也是成立的.

这些还可推导到$x\to\infty$或$x\to-\infty$和$x_0=a$或$x_0=b$,这最后一种情况仅涉及到一侧极限$x\to a^+$或$x\to b^-$.

对所谓的未定式$0\cdot\infty$,∞^0,0^0,1^∞和$\infty-\infty$表示的极限可以化为一种恒等的极限,而这种极限可以应用上面的法则,从而把上述的未定式计算出来.

有时这种极限利用泰勒中值定理计算更简便,比如习题32和习题36.

应用

1. 极值　假定在$x=x_0$处$f(x)$满足

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(2p-1)}(x_0)=0,f^{(2p)}(x_0)\neq 0, \tag{24}$$

其中p为某正整数(通常$p=1$),则

(a) 若$f^{(2p)}(x_0)<0$,则$f(x)$在$x=x_0$处取得极大值.

(b) 若$f^{(2p)}(x_0)>0$,则$f(x)$在$x=x_0$处取得极小值.

见习题39.在实际中,为了求一个可微函数的极大值和极小值,我们先解方程$f'(x)=0$得到临界点x_0.然后利用(24)式.几何上因为极大值点或极小值点$x=x_0$处,曲线$y=f(x)$的切线一定是平行于x轴,所以必要条件$f'(x_0)=0$一定成立.

2. 变化率　我们可以将$\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$解释成$y=f(x)$关于x的变化率.若$f'(x_0)>0$,则在$x=x_0$处y是递增的;若$f'(x)<0$,则y在$x=x_0$处是递减的.

3. 速度和加速度　如果s是一个粒子从一直线的O点出发在时间t时的瞬时位移,那么$\dfrac{ds}{dt}$就是它在t时刻的瞬时速度,$\dfrac{d^2s}{dt^2}$是它的瞬时加速度.

习题与解答

导数

1. 设$f(x)=\dfrac{3+x}{3-x}$,$x\neq 3$,从定义出发计算$f'(2)$.

解　$f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{5+h}{1-h}-5\right)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\cdot\dfrac{6h}{1-h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{6}{1-h}=6$.

注:利用基本的求导法则,在导数存在的所有点x处有$f'(x)=$

$$\frac{(3-x)\frac{d}{dx}(3+x)-(3+x)\frac{d}{dx}(3-x)}{(3-x)^2}=\frac{(3-x)(1)-(3+x)(-1)}{(3-x)^2}=\frac{6}{(3-x)^2}$$

令$x=2$,得$f'(2)=6$.尽管这些法则是常用的,但还是得谨慎,不能不加区别地应用(见习题5).

2. 设 $f(x)=\sqrt{2x-1}$,从定义出发计算 $f'(5)$.

解 ☞　$f'(5)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{9+2h}-3}{6}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9+2h}-3}{h}\cdot\frac{\sqrt{9+2h}+3}{\sqrt{9+2h}+3}=\lim_{h\to 0}\frac{9+2h-9}{h(\sqrt{9+2h}+3)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{9+2h}+3}=\frac{1}{3}.$$

利用基本求导法则,我们有 $f'(x)=\dfrac{d}{dx}(2x-1)^{1/2}=\dfrac{1}{2}(2x-1)^{-1/2}\dfrac{d}{dx}(2x-1)=(2x-1)^{\frac{1}{2}}$,则 $f'(5)=9^{-1/2}=\dfrac{1}{3}$.

3. 若 $f(x)$在 $x=x_0$ 处有导数,证明 $f(x)$在 $x=x_0$ 点处一定连续.

证明 ☞　$f(x_0+h)-f(x_0)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}h,h\neq 0$,

由假定 $f'(x_0)$存在,则$\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)-f(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot\lim\limits_{h\to 0}h=f'(x_0)\cdot 0=0$.

于是有$\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)-f(x_0)=0$ 或$\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$,这就证明了 $f(x)$在 $x=x_0$ 点处是连续的.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin 1/x, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$

(a) $f(x)$在 $x=0$ 点连续吗?(b) $f(x)$在 $x=0$ 点有导数吗?

解 ☞　(a) 由第二章22(b)题知 $f(x)$在 $x=0$ 点连续.

(b) $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\sin\dfrac{1}{h}$,这个极限不存在,即 $f(x)$在 $x=0$ 点不可导.

这个例子说明即使一个函数在一点处是连续的,但在这一点不一定是有导数的,即习题3中定理的逆命题不一定成立.

我们可以构造这样一个函数,它在一个区间上处处连续,但处处没有导数.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin 1/x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$

(a) $f(x)$在 $x=0$ 点可微吗?(b) $f'(x)$在 $x=0$ 点连续吗?

解 ☞　(a) 由第二章习题13,$f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2\sin 1/h-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}h\sin\dfrac{1}{h}=0$,那么 $f(x)$在 $x=0$ 点有导数(是可微的),它的值为0.

(b) 从基本的求导法则,若 $x\neq 0$,则

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)=x^2\frac{d}{dx}\left(\sin\frac{1}{x}\right)+\left(\sin\frac{1}{x}\right)\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$=x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\left(\sin\frac{1}{x}\right)(2x)=-\cos\frac{1}{x}+2x\sin\frac{1}{x},$$

尽管 $f'(0)$存在,但由于$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\cos\dfrac{1}{x}+2x\sin\dfrac{1}{x}\right)$不存在(因为$\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在),故 $f'(x)$在 $x=0$ 点不连续.

这表明我们不能简单地通过计算 $f'(x)$和令 $x=0$ 来计算 $f'(0)$,正像基本微积分中假定的那样,这个过程能给出正确答案仅当函数导数在这一点是连续的,但这对在基本微积分中出现的大部分函数来说恰好是真的.

6. 给出 $f(x)$在 $x=x_0$ 点导数的"ε-δ"定义.

解 ☞　若对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<|h|<\delta$ 时,有 $\left|\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right|<\varepsilon$ 成立,则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 点有导数 $f'(x_0)$.

右导数和左导数

7. 设 $f(x)=|x|$,(a)计算 $f(x)$在 $x=0$ 点的右导数,(b)计算 $f(x)$在 $x=0$ 点的左导数,(c) $f(x)$在 $x=0$ 点有导数吗?(d)从函数图形说明(a),(b),(c)中的结论.

解 ☞ (a)因 $h>0$ 时,$|h|=h$,所以

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1.$$

(b) 因 $h<0$ 时,$|h|=-h$,故

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1.$$

(c) 不存在,因为右导数和左导数不相等.

(d) 图 4-3 中画出了所要的图形.注意到 $y=x$ 和 $y=-x$ 的斜率分别为 $+1$ 和 -1,代表了函数在 $x=0$ 点的右导数和左导数,但是函数在 $x=0$ 点的导数不存在.

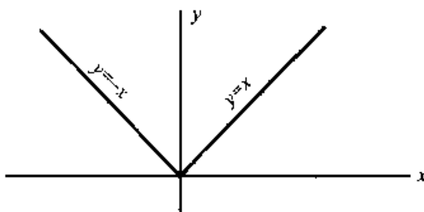


图 4-3

8. 证明 $f(x)=x^2$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上是可微的.

证明 ☞ 设 x_0 满足 $0<x_0<1$,则

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2x_0+h)=2x_0,$$

在端点 $x=0$ 上,

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}h=0,$$

在端点 $x=1$ 上,

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}(2+h)=2.$$

从而 $f(x)$在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上是可微的,对这个区间上的任何点 x,我们可记 $f'(x)=2x$,此时习惯记 $f'_+(0)=f'(0)$和 $f'_-(1)=f'(1)$.

9. 求曲线 $y=x^2$ 在下面点上的切线方程:(a)$x=\frac{1}{3}$,(b)$x=1$.

解 ☞ 由习题 8,$f'(x_0)=2x_0$,(a)故 $f'\left(\frac{1}{3}\right)=2/3$,则

切线方程是 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$,

即 $y-\frac{1}{9}=\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)$,$y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}$.

(b) 正如(a)中一样,$y-f(1)=f'(1)(x-1)$,

$y-1=2(x-1)$,即 $y=2x-1$.

微分

10. 若 $y=f(x)=x^3-6x$,求:(a)Δy,(b)dy,(c)$\Delta y-dy$.

解 ☞ (a)$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\{(x+\Delta x)^3-6(x+\Delta x)\}-\{x^3-6x\}$

$=x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-6x-6\cdot\Delta x-x^3+6x$

$=(3x^2-6)\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$.

(b) $dy=\Delta y$ 的主部$=(3x^2-6)\Delta x=(3x^2-6)dx$,因为由定义 $\Delta x=dx$.

注意 $f'(x)=3x^2-6$ 和 $dy=(3x^2-6)dx$,即$\frac{dy}{dx}=3x^2-6$.必须强调的是 dy 和 dx 不一定很小.

(c) 由(a)和(b),$\Delta y-dy=3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3=\epsilon\cdot\Delta x$,其中 $\epsilon=3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$.

注意当 $\Delta x\to 0$ 时 $\epsilon\to 0$,即当 $\Delta x\to 0$ 时$\frac{\Delta y-dy}{\Delta x}\to 0$,因此 $\Delta y-dy$ 是一个比 Δx 高阶的无穷小量(见

习题92).

当 Δx 很小时, dy 和 Δy 近似相等.

11. 利用微分近似计算 $\sqrt[3]{25}$.

解 ☞ 若 Δx 很小, $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ 近似地等于 $f'(x)dx$.

令 $f(x)=\sqrt[3]{x}$, 则 $\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x} \approx \frac{1}{3}x^{-2/3}\Delta x$ (这里"≈"表示近似等于).

若 $x=27$ 和 $\Delta x = -2$, 则有

$$\sqrt[3]{27-2} - \sqrt[3]{27} \approx \frac{1}{3}(27)^{-2/3}(-2), \text{即} \sqrt[3]{25} - 3 \approx -\frac{2}{27},$$

$$\sqrt[3]{25} \approx 3 - 2/27 \text{ 或 } 2.926.$$

有趣地看到 $(2.926)^3 = 25.05$, 因此这个近似值是相当好的.

求导法则,特殊函数的导数

12. 假定 f 和 g 是可微函数, 证明公式

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x).$$

证法1 由定义

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\{g(x+\Delta x) - g(x)\} + g(x)\{f(x+\Delta x) - f(x)\}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)\left\{\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right\} + \lim_{\Delta x\to 0}g(x)\left\{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right\}\\ &= f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x).\end{aligned}$$

证法2 令 $u=f(x)$, $v=g(x)$, 则 $\Delta u = f(x+\Delta x) - f(x)$ 和 $\Delta v = g(x+\Delta x) - g(x)$, 即 $f(x+\Delta x) = u+\Delta u$, $g(x+\Delta x) = v + \Delta v$, 从而

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u\cdot\Delta v + v\cdot\Delta u + \Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v\right) = u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx},\end{aligned}$$

这里要注意当 $\Delta x \to 0$ 时 $\Delta v \to 0$, 因为 v 假定是可微的, 从而是连续的.

13. 若 $y=f(u)$, 其中 $u=g(x)$, 并假定 f 和 g 是可微的, 证明 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

证明 ☞ 给 x 一个增量 Δx, 则随后变量 u 和 y 分别具有增量 Δu 和 Δy, 其中

$$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u), \Delta u = g(x+\Delta x) - g(x), \tag{1}$$

注意当 $\Delta x \to 0$ 时, $\Delta u \to 0$ 和 $\Delta y \to 0$.

若 $\Delta u \neq 0$, 记 $\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta u} - \frac{dy}{du}$, 则当 $\Delta u \to 0$ 时 $\varepsilon \to 0$,

$$\Delta y = \frac{dy}{du}\Delta u - \varepsilon\Delta u. \tag{2}$$

若对所有的 Δx, $\Delta u = 0$, 那么(1)式表明对所有的 Δx, $\Delta y = 0$. 我们定义 $\varepsilon = 0$.

于是在 $\Delta u \neq 0$ 或 $\Delta u = 0$ 两种情况下, (2)式都成立. 用 Δx 除(2)式, 当 $\Delta x \to 0$ 时, 我们有

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{dy}{du}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$= \frac{dy}{du}\lim_{\Delta x\to 0} + \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon \cdot \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} + 0\cdot\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}. \qquad (3)$$

14. 已知$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$ 和$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$，导出下列公式：

(a) $\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$，　(b) $\frac{d}{dx}(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

证明 ☞　(a) $\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{\cos x\cdot\frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\cdot\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$

$$=\frac{(\cos x)(\cos x)-(\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

(b) 若 $y=\arcsin x$，则 $x=\sin y$，两边关于 x 求导得

$$1=\cos y\cdot\frac{dy}{dx},\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

这里我们已假定主值选为$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$，是为了 $\cos y$ 取正值，从而说明了 $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}$ 而不是 $\cos y=\pm\sqrt{1-\sin^2 y}$.

15. 推导公式$\frac{d}{dx}(\log_a u)=\frac{\log_a e}{u}\cdot\frac{du}{dx}(a>0,a\neq1)$，其中 u 是 x 的可微函数.

证明 ☞　考虑 $y=f(u)=\log_a u$，由定义

$$\frac{dy}{du}=\lim_{\Delta u\to0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to0}\frac{\log_a(u+\Delta u)-\log_a u}{\Delta u}$$

$$=\lim_{\Delta u\to0}\frac{1}{\Delta u}\log_a\left(\frac{u+\Delta u}{u}\right)=\lim_{\Delta u\to0}\frac{1}{u}\log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u}.$$

由于对数函数是连续函数，并由第三章习题 19，取 $x=u/\Delta u$，上式可写成

$$\frac{1}{u}\log_a\left\{\lim_{\Delta u\to0}\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u}\right\}=\frac{1}{u}\log_a e.$$

那么由习题 13，$\frac{d}{dx}(\log_a u)=\frac{\log_a e}{u}\cdot\frac{du}{dx}$.

16. 计算$\frac{dy}{dx}$：(a) $xy^3-3x^2=xy+5$，(b) $e^{xy}+y\ln x=\cos 2x$.

解 ☞　(a) 两边关于 x 微分，考虑到 y 是 x 的函数（有时称 y 是 x 的隐函数，因为我们不能明确解出用 x 表示的 y），则有

$$\frac{d}{dx}(xy^3)-\frac{d}{dx}(3x^2)=\frac{d}{dx}(xy)+\frac{d}{dx}(5),$$

$$(x)(3y^2y')+(y^3)(1)-6x=(x)(y')+(y)(1)+0,$$

这里 $y'=dy/dx$，解上式得 $y'=(6x-y^3+y)/(3xy^2-x)$.

(b) $\frac{d}{dx}(e^{xy})+\frac{d}{dx}(y\ln x)=\frac{d}{dx}(\cos 2x)$,

$$e^{xy}(xy'+y)+\frac{y}{x}+(\ln x)y'=-2\sin 2x,$$

解上式得 $y'=-\frac{2x\sin 2x+xe^{xy}+y}{x^2e^{xy}+x\ln x}$.

17. 若 $y=\cosh(x^2-3x+1)$，求：(a) dy/dx，(b) d^2y/dx^2.

解 ☞　(a) 令 $y=\cosh u$，$u=x^2-3x+1$，那么$\frac{dy}{du}=\sinh u$，$\frac{du}{dx}=2x-3$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(\sinh u)(2x-3)=(2x-3)\sinh(x^2-3x+1).$$

(b) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\sinh u\cdot\frac{du}{dx}\right)=\sinh u\cdot\frac{d^2u}{dx^2}+\cosh u\left(\frac{du}{dx}\right)^2$

$=(\sinh u)(2)+(\cosh u)(2x-3)^2$

$=2\sinh(x^2-3x+1)+(2x-3)^2\cosh(x^2-3x+1).$

18. 若 $x^2y+y^3=2$,求在(1,1)点的(a)y',(b)y''.

解 ☞ (a)两边对 x 微分,$x^2y'+2xy+3y^2y'=0$,

$$y'=\frac{-2xy}{x^2+3y^2},故在(1,1)点处\ y'=-\frac{1}{2}.$$

(b) $y''=\frac{d}{dx}(y')=\frac{d}{dx}\left(\frac{-2xy}{x^2+3y^2}\right)=\frac{(x^2+3y^2)(2xy'+2y)-(2xy)(2x+6yy')}{(x^2+3y^2)^2}$,

将 $x=1,y=1$ 和 $y'=-\frac{1}{2}$代入上式得 $y''=-\frac{3}{8}$.

中值定理

19. 证明罗尔定理.

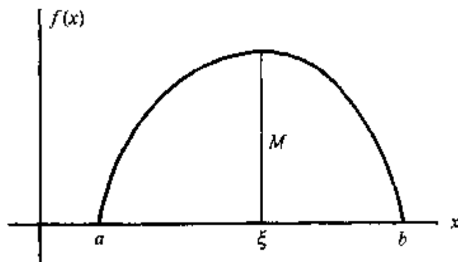


图 4-4

证明 ☞ **情形 1:**

在$[a,b]$上 $f(x)=0$,则对(a,b)内的所有 x 有$f'(x)=0$.

情形 2:

在$[a,b]$上 $f(x)\neq0$. 由于 $f(x)$是连续的,所以在$[a,b]$上必存在点,使 $f(x)$达到最大值 M 和最小值m(见第三章习题 34).

因 $f(x)\neq0$,故 M 和m 中至少有一个不为 0. 不妨设 $M\neq0$,且 $f(\xi)=M$(见图 4-4),则 $f(\xi+h)\leqslant f(\xi)$.

若 $h>0$, 则 $\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\leqslant0$, 从而有(1) $\lim\limits_{h\to0^+}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\leqslant0$.

若 $h<0$,则$\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\geqslant0$,从而有(2) $\lim\limits_{h\to0^-}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\geqslant0$.

但由假设,$f(x)$在(a,b)内的所有点上有导数,则右导数(1)必须等于左导数(2),而这种情况仅在它们两者都等于 0 时才发生,所以 $f'(\xi)=0$,这正是所要证明的结论.

在 $M=0$ 和 $m\neq0$ 时可类似论证.

20. (a)证明中值定理.(b)给出这个定理的几何解释.

证明 ☞ (a) 定义函数 $F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$,则 $F(a)=0$ 和$F(b)=0$.

与此同时,如果 $f(x)$具有罗尔定理中指定的连续和可微条件,则 $F(x)$也满足这些条件.

于是对函数 $F(x)$应用罗尔定理,得

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,a<\xi<b,$$

即 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $a<\xi<b$.

(b) 设图 4-5 中曲线 ACB 代表函数$f(x)$的图形. 几何上中值定理表明在 a 和b 之间存在一点 ξ. 在其对应点 C 上的切线平行于 AB 弦.

切线的斜率$=f'(\xi)$,

弦 AB 的斜率$=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$,

则 ξ 满足 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

有趣地注意到:(a)中函数 $F(x)$ 恰好是 (a,b) 上曲线 ACB 和直线 AB 的纵坐标的差.

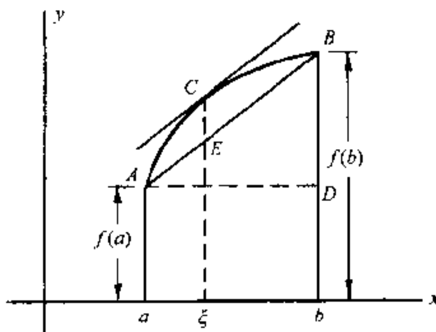


图 4-5

21. 用函数 $f(x)=2x^2-7x+10, a=2, b=5$ 验证中值定理的正确性.

解 ☞　$f(2)=4, f(5)=25, f'(\xi)=4\xi-7$,则中值定理表明 $4\xi-7=(25-4)/(5-2)$, $\xi=3.5$. 由于 $2<\xi<5$,故定理是正确的

22. 若在 (a,b) 内 $f'(x)=0$,证明 $f(x)$ 在这个区间上一定是常数.

证明 ☞　设 x_1,x_2 是 (a,b) 内的任意两点,$x_1<x_2$,由中值定理,存在 $\xi, x_1<\xi<x_2$,有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)=0$$

于是 $f(x_1)=f(x_2)=$常数. 由此可见若两函数在 (a,b) 上具有相同的导数,则这两个函数仅可能相差一个常数.

23. 若在 (a,b) 上 $f'(x)>0$,证明 $f(x)$ 是严格递增的.

证明 ☞　设 x_1,x_2 是 (a,b) 内的任意两点,且 $x_1<x_2$,则由中值定理,存在 $\xi, x_1<\xi<x_2$,有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)>0.$$

从而对 $x_2>x_1$ 有 $f(x_2)>f(x_1)$,因此 $f(x)$ 是严格递增的.

24. (a) 若 $a<b$,证明:$\frac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{1+a^2}$.

(b) 证明 $\frac{\pi}{4}+\frac{3}{25}<\arctan\frac{4}{3}<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}$.

解 ☞　(a) 设 $f(x)=\arctan x$. 因为 $f'(x)=1/(1+x^2)$ 和 $f'(\xi)=1/(1+\xi)^2$,

由中值定理有

$$\frac{\arctan b-\arctan a}{b-a}=\frac{1}{1+\xi^2}, a<\xi<b.$$

因 $\xi>a$,则 $1/(1+\xi^2)<1/(1+a^2)$;因 $\xi<b$,则 $1/(1+\xi^2)>1/(1+b^2)$ 于是有 $\frac{1}{1+b^2}<\frac{\arctan b-\arctan a}{b-a}$

$<\frac{1}{1+a^2}$.

用 $b-a$ 乘上式可得所要证的结果.

(b) 在(a)中令 $b=4/3, a=1$,那么因 $\arctan=\pi/4$,我们有 $\frac{3}{25}<\arctan\frac{4}{3}-\arctan 1<\frac{1}{6}$. 即 $\frac{\pi}{4}+\frac{3}{25}<$

$\arctan\frac{4}{3}<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}$.

25. 证明柯西中值定理

证明 ☞　考虑 $G(x)=f(x)-f(a)-\alpha[g(x)-g(a)]$,其中 α 是常数. 假定 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足罗尔定理中的连续性和可微性. 如果 $G(a)=G(b)=0$,那么 $G(x)$ 就满足罗尔定理的条件,若 $\alpha=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(b)}$,则后一条件 $G(a)=G(b)=0$ 就满足了.

应用罗尔定理. 存在 $\xi, a<\xi<b$,使得 $G'(\xi)=0$,故有 $f'(\xi)-\alpha g'(\xi)=0$,即 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, $a<\xi<b$,这正是要证明的结论.

泰勒中值定理

26. 证明:具有拉格朗日余项,$n=1$ 的泰勒中值定理.

证明☞ 我们要证

$$f(b)=f(a)+f'(b)(b-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(b-a)^2, a<\xi<b. \tag{1}$$

在(1)式中用 x 取代 a,并将所有项移到右边由此构造函数

$$H(x)=f(b)-f(x)-f'(x)(b-x)-(b-x)^2A, \tag{2}$$

其中 A 是待定的常数.现考虑函数 $H(x)$.

由(2)式,$H(b)=0$,为了得到 $H(a)=0$,我们必须选取

$$A=\frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{(b-a)^2}. \tag{3}$$

假定 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 满足罗尔定理的连续性和可微性条件,那么 $H(x)$ 也满足罗尔定理的条件,因此在 a 和 b 之间存在一值 ξ,使得 $H'(\xi)=0$.

由(2)式,$H'(x)=-f''(x)(b-x)+2(b-x)A$,$H'(\xi)=-f''(\xi)(b-\xi)+2(b-\xi)A=0$,故 $A=f''(\xi)/2$(因为 $\xi\neq b$).将 A 的这个值代入(3)式,解出 $f(b)$,即得所要的结论(1).

同理可将 $n=1$ 推广到 $n>1$ 的情形.

27. (a) 证明 $\sin x=\sin a+(\cos a)(x-a)-\frac{(\sin a)(x-a)^2}{2!}-\frac{(\cos\xi)(x-a)^3}{3!}$ 其中 ξ 在 a 和 x 之间.

(b) 利用(a) 计算 $\sin 51°$,并估计由此造成的误差.

证明☞ (a) 设 $f(x)=\sin x$,那么 $f'(x)=\cos x$,$f''(x)=-\sin x$,$f'''(x)=-\cos x$,因此 $f'(a)=\cos a$,$f''(a)=-\sin a$,$f'''(\xi)=-\cos\xi$,然后将其代入 $n=2$ 的泰勒公式,即

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\frac{f'''(\xi)(x-a)^3}{3!}$$

其中 ξ 在 a 和 x 之间,从而得到了所要的结果.

(b) 设 $x=51°=51\pi/180$ 弧度和 $a=45°=45\pi/180$ 弧度,则 $x-a=\pi/30$ 弧度,由于 $\sin 45°=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$,因此由(a)部分.

$$\sin 51°=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{30}\right)-\frac{(\sqrt{2}/2)(\pi/30)^2}{2!}-\frac{(\cos\xi)(\pi/30)^3}{3!}.$$

误差项的绝对值 $=\left|\frac{-(\cos\xi)(\pi/30)^3}{3!}\right|<\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{30}\right)^3<0.0002.$

因此前三项的和为 0.777,精确到 3 位小数.

如果要求的精确度更高,则应取泰勒公式中的更多项.

28. (a)证明 $e^x=1+x+x^2/2!+x^3/3!+\cdots$.

(b) 证明 e 是一个无理数.

证明☞ (a) 设 $f(x)=e^x$,则 $f(x)$ 的任意阶导数都等于 e^x,如果 $a=0$,则 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=e^0=1$,而 $f^{(n+1)}(\xi)=e^\xi$,因此泰勒公式成为

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}e^\xi}{(n+1)!}, \tag{1}$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间.

令 $R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^\xi$. 若 $x>0$,$|R_n|\leqslant\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n|=0$(见第二章习题 30).

若 $x<0$,则 $|R_n|<\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$,从而也有 $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n|=0$;若 $x=0$,则 $|R_n|=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}|R_n|=0$.

因此对所有的 x,即 $-\infty<x<+\infty$,都有 $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n|=0$,从而我们可写成

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots. \tag{2}$$

即级数处处收敛.

(b) 由(1)式,令 $x=1$ 且假定 e 是一个有理数,用最简式表示为 p/q,其中 p 和 q 是正整数,则有

$$e=p/q=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+e^{\xi}/(n+1)!,0<\xi<1, \tag{3}$$

选取 $n>q$,并用 $n!$ 乘(1)式两边,则有

$$n!e=n!\frac{p}{q}=n!+n!+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\cdots+1+\frac{e^{\xi}}{n+1}. \tag{4}$$

现在 $e^{\xi}/(n+1)$ 是 0 和 1 之间的一个数,而(4)中的其余项都是一个正整数,因此假定 e 是有理数,我们得到了一个整数等于一个非整数这样一个相矛盾的结论.从而 e 一定是无理数.

洛必达法则

29. 证明关于未定式:(a) $\frac{0}{0}$,(b) $\frac{\infty}{\infty}$ 的洛必达法则.

证明 ☞　(a)假定 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $a<x<b$ 上是可微的,$f(x_0)=0,g(x_0)=0$,其中 $a<x_0<b$,由柯西中值定理(习题 25),

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},x_0<\xi<x.$$

又因为当 $x\to x_0^-$ 时 $\xi\to x_0^+$,故有 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L.$

若 $x\to x_0^-,x\to x_0,x\to\infty,x\to-\infty$,则只要对上面过程略作修改就可证明结论.

(b) 假定 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $a<x<b$ 上是可微的,$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=\infty$,其中 $a<x_0<b$.

又假定 x_1 满足 $a<x_0<x<x_1<b$,由柯西中值定理,

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},x<\xi<x_1,$$

从而有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1-f(x_1)/f(x)}{1-g(x_1)/g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

由此可见

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(x)}\cdot\frac{1-g(x_1)/g(x)}{1-f(x_1)/f(x)}. \tag{1}$$

现假定 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$,将(1)式写成

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-L\right)\left(\frac{1-g(x_1)/g(x)}{1-f(x_1)/f(x)}\right)+L\left(\frac{1-g(x_1)/g(x)}{1-f(x_1)/f(x)}\right), \tag{2}$$

我们可选择 x_1 非常接近 x_0,使得 $\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-L\right|<\epsilon$,让 x_1 固定不变,因 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=\infty$,

故有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1-g(x_1)/g(x)}{1-f(x_1)/f(x)}\right)=1.$

那么当 $x\to x_0^+$ 时,(2) 式两边取极限,得

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=L=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

这正是所要证明的结论.

上面的过程作恰当的改动可建立当 $x\to x_0^-,x\to x_0,x\to\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时的结论.

30. 计算:(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$,(b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1}$,(c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos 3x}{\ln\cos 2x}$.

解 ☞　所有这些极限都属于未定式 $\frac{0}{0}$.

(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2e^{2x}}{1}=2$.

(b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\pi\sin\pi x}{2x-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\pi^2\cos\pi x}{2}=\dfrac{\pi^2}{2}$.

注：由于第一次应用又产生了$\dfrac{0}{0}$未定式，且洛必达法则的条件再一次满足，所以这里两次应用了洛必达法则.

(c) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\cos3x}{\ln\cos2x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(-3\sin3x)/(\cos3x)}{(-2\sin2x)/(\cos2x)}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3\sin3x\cos2x}{2\sin2x\cos3x}=\left(\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin3x}{\sin2x}\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3\cos2x}{2\cos3x}\right)$

$=\left(\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{3\cos3x}{2\cos2x}\right)\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{4}$.

注意在第四步中我们利用了极限的定理简化了计算.

31. 计算：(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+5}{5x^2+6x-3}$，(b) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x}$，(c) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln\tan2x}{\ln\tan3x}$.

解 ☞ 所有这些极限都属于未定式$\dfrac{\infty}{\infty}$.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+5}{5x^2+6x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-1}{10x+6}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$.

(c) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\tan2x}{\ln\tan3x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(2\sec^22x)/\tan2x}{(3\sec^23x)/\tan3x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2\sec^22x\cdot\tan3x}{3\sec^23x\cdot\tan2x}$

$=\left(\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2\sec^22x}{3\sec^23x}\right)\left(\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan3x}{\tan2x}\right)=\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3\sec^23x}{2\sec^22x}\right)=1$.

32. 计算$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\arctan x}{x^2\ln(1+x)}$.

解 ☞ 尽管这里可以应用洛必达法则，但要反复多次应用.然而如果利用泰勒中值定理，这个极限就能既快又容易地求得，现我们利用结果(见 p.57)

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{Px^5}{5!},\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+Qx^5,\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+Rx^3,$$

则所求极限等于

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(x-x^3/3!+Px^5/5!)-\left(x-\dfrac{x^3}{3}+Qx^5\right)}{x^3-x^4/2+Rx^5}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{6}+(P-Q)x^2}{1-x/2+Rx^2}=\frac{1}{6}.$$

33. 计算 $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\ln x$.

解 ☞ $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{1/x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1/x}{-2/x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x^2}{2}=0$.

已知极限为未定式 $0\cdot\infty$，在第二步中转换形式是为了变成未定式∞/∞，然后使用，洛必达法则.

34. 求$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}$.

解 ☞ 由于$\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$，故这个极限为未定式 1^∞.

设 $F(x)=(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$，则 $\ln F(x)=\ln\cos x/x^2$，对此可应用洛必达法则，我们有

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(-\sin x)/(\cos x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin x}{2x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\cos x}{-2x\sin x+2\cos x}=-\dfrac{1}{2}$. 于是$\lim\limits_{x\to0}\ln F(x)=-\dfrac{1}{2}$. 又因为对数函数是连续函数. $\lim\limits_{x\to0}\ln F(x)=\ln(\lim\limits_{x\to0}F(x))$. 所以 $\ln(\lim\limits_{x\to0}F(x))=-\dfrac{1}{2}$，即 $\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

35. 若 $F(x)=(e^{3x}-5x)^{1/x}$，求：(a) $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$，(b) $\lim\limits_{x\to0}F(x)$.

解 ☞　在(a)和(b)中的未定式分别是∞^0 和1^∞.

令 $G(x)=\ln F(x)=\dfrac{\ln(e^{3x}-5x)}{x}$,则$\lim\limits_{x\to\infty}G(x)$和$\lim\limits_{x\to0}G(x)$各自成了这种未定式$\infty/\infty$和0/0.应用洛必达法则.有

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(e^{3x}-5x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9e^{3x}}{3e^{3x}-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{27e^{3x}}{9e^{3x}}=3.$

则如习题 34 一样,$\lim\limits_{x\to\infty}(e^{3x}-5x)^{\frac{1}{x}}=e^3$.

(b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(e^{3x}-5x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x}=-2$,从而$\lim\limits_{x\to0}(e^{3x}-5x)^{\frac{1}{x}}=e^{-2}$.

36. 计算$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

解 ☞　这个极限具有未定式$\infty-\infty$.将这个极限改写成$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2x}{x^2\sin^2x}$似乎洛必达法则可以应用了,然而这样做非常繁.现可以采取以下两种方法:

方法 1:所要求的极限可写成

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2-\sin^2x}{x^4}\right)\left(\frac{x^2}{\sin^2x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^4},$$

等号成立是因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sin^2x}=\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\right)^2=1$.现逐次应用洛必达法则,有

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin2x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos2x}{12x^2}=\lim_{x\to0}\frac{4\sin2x}{24x}=\lim_{x\to0}\frac{8\cos2x}{24}=\frac{1}{3}.$$

方法 2:利用泰勒定理,有

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^2\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-(x-x^3/6+px^5)^2}{x^2(x-x^3/6+px^5)^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^4/3+\text{含 }x^6\text{ 的项和更高次的项}}{x^4+\text{含 }x^6\text{ 的项和更高次的项}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1/3+\text{含 }x^2\text{ 项和更高次的项}}{1+\text{含 }x^2\text{ 项和更高次的项}}=1/3.$$

杂题

37. 若 $x=g(t)$和 $y=f(t)$是二次可微的,求:(a)dy/dx,(b) d^2y/dx^2

解 ☞　(a)设符号"′"表示关于 t 的导数,则有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{f'(t)}{g'(x)},\text{若 }g'(t)\neq0.$$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f'(t)}{g'(t)}\right)=\dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{f'(t)}{g'(t)}\right)}{dx/dt}=\dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{f'(t)}{g'(t)}\right)}{g'(t)}$

$=\dfrac{1}{g'(t)}\left\{\dfrac{g'(t)f''(t)-f'(t)g''(t)}{[g'(t)]^2}\right\}=\dfrac{g'(t)f''(t)-f'(t)g''(t)}{[g'(t)]^3}$,若 $g'(t)\neq0$.

38. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$　证明:(a) $f'(0)=0$,(b)$f''(0)=0$.

证明 ☞　(a) $f'_+(0)=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{e^{-1/h^2}-0}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{e^{-1/h^2}}{h}$

若 $h=1/u$,利用洛必达法则,这个极限等于

$$\lim_{u\to\infty}ue^{-u^2}=\lim_{u\to\infty}u/e^{u^2}=\lim_{u\to\infty}1/2ue^{u^2}=0.$$

类似地,用 $h\to0^-$取代 $h\to0^+$和用 $u\to-\infty$取代 $u\to\infty$,我们有 $f'_-(0)=0$,于是$f'_+(0)=f'_-(0)=0$,因此 $f'(0)=0$.

(b) $f'_+(0)=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{e^{-1/h^2}\cdot h^{-3}-0}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{2e^{-1/h^2}}{h^4}$

$=\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{2u^4}{e^{u^2}}=0.$

最后一个等号是通过洛必达法则的逐次应用得到的.

类似地 $f'_-(0)=0$,从而 $f'(0)=0$.

一般地 $f^{(n)}(0)=0,n=1,2,3,\cdots$(见习题 89).

39. 设 $f(x)$在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的四阶导数$f^{(4)}(x)$存在,假定 $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0,a<x_0<b$,证明当 $f^{(4)}(x_0)<0$ 时,$f(x)$在 x_0 点有极大值;当 $f^{(4)}(x_0)>0$ 时 $f(x)$在 x_0 点有极小值.

证明 ☞　由泰勒中值定理,

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!}$$

$$+\frac{f^{(4)}(\xi)(x-x_0)^4}{4!}=f(x_0)+\frac{f^{(4)}(\xi)(x-x_0)^4}{4!},$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间.

若 $f^{(4)}(x_0)>0$,则在 x_0 的去心 δ 邻域中有 $f(x)>f(x_0)$,因此 $f(x)$在 x_0 点取得极小值.类似地若 $f^{(4)}(x_0)<0$,则在 x_0 的去心 δ 邻域中有 $f(x)<f(x_0)$,因此 $f(x)$在 x_0 点有极大值.

40. 假定是平行于地板搬动梯子,求在一走廊拐角处可搬走的最长梯子的长度.它的尺寸如图 4-6 所示.

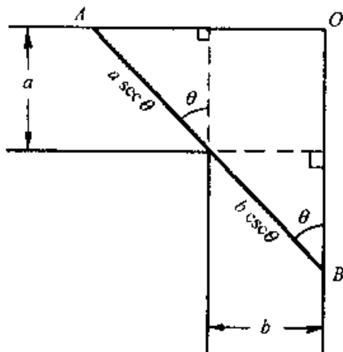


图 4-6

解 ☞　最长梯子的长度与最短直线段 AB 相同(图 4-6),直线段 AB 碰到两外墙和由内墙形成的角.

由图 4-6 可见,梯子 AB 的长度为

$$L=a\sec\theta-b\csc\theta$$

当 $dL/d\theta=a\sec\theta\tan\theta-b\csc\theta\cot\theta=0$,

即 $a\sin^3\theta=b\cos^3\theta$, $\tan\theta=\sqrt[3]{b/a}$ 时 L 是最小值.此时有 $\sec\theta=\dfrac{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{a^{1/3}}$, $\csc\theta=\dfrac{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{b^{1/3}}$因此

$$L=a\sec\theta+b\csc\theta=(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}.$$

尽管几何上给出这个最小长度是很显然的,但我们可以通过证明 $\theta=\arctan\sqrt[3]{b/a}$ 时 $d^2L/d\theta^2$ 是正的来解析地说明这一点(见习题 88).

补充习题

导数

41. 利用导数定义计算下列各函数在指定点的导数:

(a)$(3x-4)/(2x+3),x=1$;(b)$x^3-3x^2+2x-5,x=2$;(c)$\sqrt{x},x=4$;(d) $\sqrt[3]{6x-4},x=2$.

42. 设 $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x},x\neq0,\\0,\qquad x=0\end{cases}$ 证明:(a) $f(x)$在 $x=0$ 点连续,

(b)$f(x)$在 $x=0$ 点有导数,(c) $f'(x)$在 $x=0$ 点连续.

43. 设 $f(x)=\begin{cases}xe^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0,\\0, & x=0,\end{cases}$判定:(a)$f(x)$在 $x=0$ 点是否连续,(b) $f(x)$在 $x=0$ 点是否有导数.

44. 利用"ε-δ"定义,给出 p.148 上习题 3 中这个定理的另一种证法.

45. 若 $f(x)=e^x$,证明 $f'(x_0)=e^{x_0}$依赖于结论$\lim\limits_{h\to0}(e^h-1)/h=1$.

46. 利用结果$\lim\limits_{h\to 0}(\sin h)/h=1$，$\lim\limits_{h\to 0}(1-\cos h)/h=0$，证明若 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x_0)=\cos x$.

右导数和左导数

47. 设 $f(x)=x|x|$.(a)计算 $f(x)$在 $x=0$ 点的右导数，(b)计算 $f(x)$在 $x=0$ 点的左导数，(c)$f(x)$在 $x=0$ 点有导数吗？(d)从几何图形上说明(a)，(b)和(c)中的结论.

48. 设 $f(x)=x^p\sin 1/x$，$f(0)=0$，其中 p 是任意正数，讨论：(a) $f(x)$的连续性，(b) $f(x)$的可微性. 若 p 是任意实数情况怎样呢？

49. 设 $f(x)=\begin{cases}2x-3, 0\leqslant x\leqslant 2\\ x^2-3, 2<x\leqslant 4\end{cases}$，在 $0\leqslant x\leqslant 4$ 上讨论 $f(x)$的连续性和可微性.

50. 证明 $f(x)$在 $x=x_0$ 点导数存在当且仅当 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

51. (a) 证明 $f(x)=x^3-x^2+5x-6$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上是可微的，其中 a 和 b 是任意常数.
(b) 求曲线 $y=x^3-x^2+5x-6$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处的切线方程，并利用图形说明. (c) 确定(b)中两切线的交点. (d)求 $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$，$f^{(4)}(x)$，….

52. 精确解释下列各组记号之间的不同：(a)$f'_-(x_0)$和 $f'(x_0+)$，(b)$f'_-(x_0)$和 $f'(x_0-)$.

53. 若 $f(x)=x^2|x|$，讨论 $f(x)$在 $x=0$ 点的各阶导数的存在性.

微分

54. 若 $y=f(x)=x+1/x$，求：(a)Δy，(b) dy，(c) $\Delta y-dy$，(d) $(\Delta y-dy)/\Delta x$，(e) dy/dx.

55. 若 $f(x)=x^2+3x$，当 $x=1$，$\Delta x=0.01$ 时，求：(a)Δy，(b) dy，(c)$\Delta y/\Delta x$，(d) dy/dx，(e) $(\Delta y-dy)/\Delta x$.

56. 利用微分，计算下列各函数值的近似值：
(a) $\sin 31°$，(b) $\ln(1.12)$，(c) $\sqrt[5]{36}$，

57. 若 $y=\sin x$，计算：(a)Δy，(b)dy，(c) 当 $\Delta x\to 0$ 时，证明$(\Delta y-dy)/\Delta x\to 0$

求导法则和特殊函数

58. 证明：(a)$\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=\dfrac{d}{dx}f(x)+\dfrac{d}{dx}g(x)$

(b) $\dfrac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=\dfrac{d}{dx}f(x)-\dfrac{d}{dx}g(x)$，

(c) $\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}=\dfrac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$，$g(x)\neq 0$.

59. 计算：(a)$\dfrac{d}{dx}\{x^3\ln(x^2-2x+5)\}$，在 $x=1$；(b)$\dfrac{d}{dx}\{\sin^2(3x+\pi/6)\}$，在 $x=0$；

60. 推导下列公式：(a)$\dfrac{d}{dx}a^u=a^u\ln a\dfrac{du}{dx}$，$a>0$，$a\neq 1$；(b) $\dfrac{d}{dx}\csc u=-\csc u\cdot\cot u\cdot\dfrac{du}{dx}$；

(c)$\dfrac{d}{dx}\tanh u=\operatorname{sech}^2 u\dfrac{du}{dx}$，其中 u 是 x 的可微函数.

61. 计算：(a)$\dfrac{d}{dx}\arctan x$，(b)$\dfrac{d}{dx}\operatorname{arccsc} x$，(c) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arsinh} x$，(d) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arcoth} x$. 注意利用主值.

62. 若 $y=x^x$，计算$\dfrac{dy}{dx}$.［提示：在微分前取对数］.

63. 若 $y=\{\ln(3x+2)\}^{\arcsin(2x+5)}$，求在 $x=0$ 点的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

64. 若 $y=f(u)$，$u=g(v)$，$v=h(x)$，且 f，g 和 h 都是可微的，证明$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dx}$.

65. 若 $xy-\ln y=1$. 计算：(a) $\dfrac{dy}{dx}$，(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

66. 若 $y=\tan x$，证明 $y'''=2(1+y^2)(1+3y^2)$.

67. 若 $x=\sec t$ 和 $y=\tan t$，计算在 $t=\pi/4$ 处的(a)dy/dx，(b) d^2y/dx^2，(c) d^3y/dx^3.

68. 证明$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{d^2x}{dy^2}\Big/\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3$，并陈述上式成立的条件.

69. 证明 p.55～56 上的下列公式：(a) 7，(b) 18，(c) 27.

中值定理

70. 设 $f(x)=1-(x-1)^{2/3}$，$0\leqslant x\leqslant 2$. (a) 画出 $f(x)$的图形，(b) 解释为什么这个函数不能使用罗尔定理，即不存在 ξ，$0<\xi<2$，使得 $f'(\xi)=0$.

71. 用函数 $f(x)=x^2(1-x)^2$，$0\leqslant x\leqslant 1$ 验证罗尔定理的正确性.

72. 证明方程 $e^x\sin x=1$ 的两根之间，至少存在方程 $e^x\cos x=1$ 的一个实根.［提示：对函数 $e^{-x}-\sin x$ 应用罗尔定理］

73. (a) 若 $0<a<b$，证明 $(1-a/b)<\ln b/a<(b/a-1)$.

(b) 利用(a)中的结论证明 $\frac{1}{6}<\ln 1.2<\frac{1}{5}$.

74. 利用中值定理证明：$(\pi/6+\sqrt{3}/15)<\arcsin 0.6<(\pi/6+1/8)$.

75. 证明在习题 20(b)的最后一段中的论断.

76. (a)若 (a,b) 上 $f'(x)\leqslant 0$，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上是单调递减的.

(b) 在什么条件下 $f(x)$ 在 (a,b) 上是严格递减的?

77. (a)证明 $(\sin x)/x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是严格递减的，(b)证明对 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 有 $0\leqslant\sin x\leqslant 2x/\pi$.

78. (a) 证明 $\frac{\sin b-\sin a}{\cos b-\cos a}=\cot\xi$，其中 ξ 在 a 和 b 之间.

(b) 在(a)中取 $a=0,b=x$，证明 $\xi=x/2$. 若 $x<0$，则这个结果成立吗?

泰勒中值定理

79. (a) 证明：$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5(1+\xi)^5}, 0<\xi<x$.

(b) 利用(a)计算 $\ln(1.1)$，并估计它的精确度.

80. 计算：(a)$\cos 64°$，(b)$\arctan 0.2$，(c) $\cosh 1$，(d)$e^{-0.3}$，精确到 3 位小数.

81. 用拉格朗日余项证明关于(a)$n=2$，(b)$n=3$，(c)$n=$任意正整数的泰勒中值定理.

82. 推导 p.60 的(21)式——关于余项的柯西形式.［提示：将罗尔定理用到

$$H(x)=f(b)-f(x)-f'(x)(b-x)-\frac{f''(x)(b-x)^2}{2!}-\cdots-\frac{f^{(n)}(x)(b-x)^n}{n!}-(b-x)A\text{ 中}$$

其中 A 的选取需满足 $H(a)=0$.］

83. 证明泰勒中值定理中余项的拉格朗日形式和柯西形式可分别写成

$$\frac{h^{n+1}f^{n+1}(a+\theta h)}{(h+1)!}\text{ 和 }\frac{h^{n+1}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(a+\theta h)}{n!}\text{，其中 } h=b-a, 0<\theta<1.$$

84. 利用恰当的 p 值，通过将 $(b-x)^pA$ 取代习题 82 提示中的最后一项，得到(a)带拉格朗日余项，(b)带柯西余项的泰勒中值定理.

洛必达法则

85. 计算下列极限：

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$，(b)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2e^x+1}{\cos 3x-2\cos 2x+\cos x}$，(c) $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-1)\tan\pi x/2$，

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}x^3e^{-2x}$，(e) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^3\ln x$，(f)$\lim\limits_{x\to 0}(3^x-2^x)/x$，

(g) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-3/x)^{2x}$，(b) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2x)^{1/3x}$，(i) $\lim\limits_{x\to 0}(1/x-\csc x)$，

(j)$\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$，(k)$\lim\limits_{x\to 0}(1/x^2-\cot^2x)$，(l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x-\arcsin x}{x(1-\cos x)}$，

(m) $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$，(n) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$，(o)$\lim\limits_{x\to\infty}(x+e^x+e^{2x})^{1/x}$，

(p) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{1/\ln x}$.

杂题

86. 若 $0<x<1$，证明 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}<\frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}<1$.

87. 若 $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$，(a) 证明：$\Delta\{\Delta f(x)\}=\Delta^2f(x)=f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)$，(b)推出 $\Delta^n f(x)$ 的表达式，其中 n 是任一正整数，(c)若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}$ 存在，则它等于 $f^{(n)}(x)$.

88. 完成习题 40 末尾提到的解析证明.

89. (a) 若 $f(x)$ 是习题 38 中的函数，证明 $f^{(n)}(0)=0, n=1,2,3,\cdots$.

(b) 写出这个函数带余项的泰勒级数，并证明 $f(x)=R_n$.(c) 解释当 $n\to\infty$ 时为什么 R_n 不趋向于 0，并讨论其原因.

90. 求函数 $f(x)=x^x$, $x>0$ 的极大值和极小值.

91. 一颗粒子在介质Ⅰ和Ⅱ中分别以常速度 v_1 和 v_2 运行(见图 4-7). 为了在最短的时间内从 P 点移到 Q 点,证明这粒子必须沿路径 PAQ 移动,其中在 A 处满足

$$(\sin\theta_1)/(\sin\theta_2)=v_1/v_2.$$

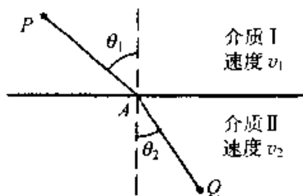


图 4-7

92. 一变量 α 称为无穷小量,如果它的极限为 0. 已知两个无穷小量 α 和 β,若 $\lim\alpha/\beta=0$(或 $\lim\alpha/\beta=l\neq0$),则称 α 是 β 的高阶无穷小量(或 α 与 β 是同阶无穷小量). 证明当 $x\to0$ 时,(a) $\sin^2 2x$ 和 $(1-\cos 3x)$ 是同阶无穷小量,(b) $(x^3-\sin^3 x)$ 是 $\{x-\ln(1+x)-1+\cos x\}$ 的高阶无穷小量.

93. 为什么我们不能利用洛必达法则证明

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=0,\text{(见第二章习题 91)?}$$

94. 我们可以用洛必达法则计算序列 $u_n=n^3e^{-n^2}$, $n=1,2,3,\cdots$ 的极限吗? 请解释.

95. 若 a 是方程 $f(x)=0$ 的一个近似根,证明一般地一个更好的近似值由 $a-f(a)/f'(a)$ 给出. [牛顿(Newton)法][提示:假定精确根是 $a+h$,故 $f(a+h)=0$,从而对很小的 h,有 $f(a+h)\approx f(a)+hf'(a)$.]

96. 反复利用习题 95 的方法,得到下列方程的正根,要求精确到 3 位小数:(a) $x^3-2x^2-2x-7=0$, (b) $5\sin x=4x$.

97. 若 D 表示算子 $\dfrac{d}{dx}$,因此 $Dy=dy/dx$,而 $D^ky=d^ky/dx^k$ 证明:莱布尼兹(Leibnitz)公式

$$D^n(uv)=(D^nu)v+C_n^1(D^{n-1}u)(Dv)+C_n^2(D^{n-2}u)(D^2v)+\cdots$$
$$+C_n^r(D^{n-r}u)(D^rv)+\cdots+u\cdot D^nv.$$

其中 $C_n^r=\begin{pmatrix}n\\r\end{pmatrix}$ 是二项式系数(见第一章习题 95).

98. 证明 $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2\sin x)=\{x^2-n(n-1)\}\sin(x+n\pi/2)-2nx\cos(x+n\pi/2)$.

99. 若 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(2n)}(x_0)=0$,但 $f^{(2n+1)}(x_0)\neq0$,讨论 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点邻域中的变化特性. 这点 x_0 常称为拐点.

100. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可微,假定 $f'(a)=f'(b)=0$,证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,满足 $|f''(\xi)|\geqslant\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$. 给出有关一颗粒子速度和加速度的一种物理解释.

第五章 积　　分

定积分的定义

由于要考虑由曲线 $y=f(x)$，x 轴和垂线 $x=a$ 和 $x=b$ 所围成区域的面积(图 5-1)，从而引发了定积分的概念. 然而我们可以不求助于几何给出这个定义.

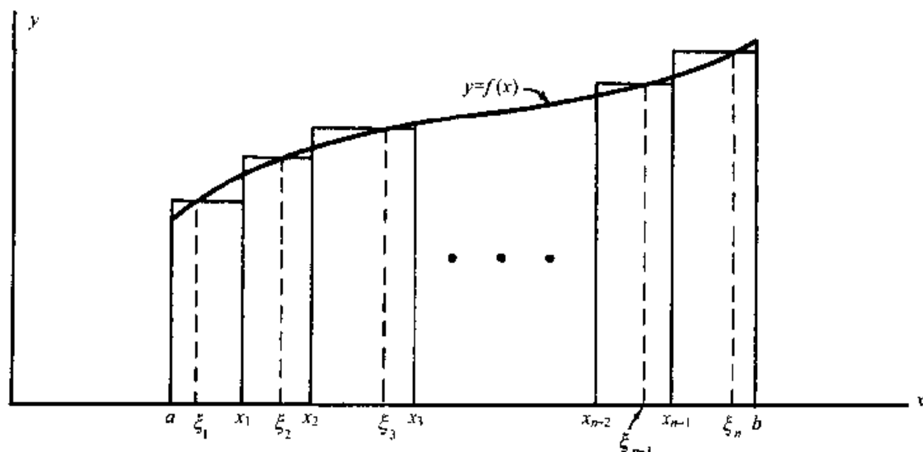


图 5-1

利用$[a,b]$上任意选定的点 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$，将区间$[a,b]$分成 n 个子区间，在新区间$(a,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_{n-1},b)$上分别任选点 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，作和

$$f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+f(\xi_3)(x_3-x_2)+\cdots+f(\xi_n)(b-x_{n-1}),\quad (1)$$

记 $x_0=a,x_n=b,x_k-x_{k-1}=\Delta x_k$，则上式可写成

$$\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.\quad (2)$$

几何上，这个和代表图 5-1 中所有矩形的总面积.

现在让分割数 n 增大，达到使每一个 $\Delta x_k\to 0$，如果此时(1)式或(2)式趋向于不依赖于分割方式的一个极限，则我们用

$$\int_a^b f(x)dx \quad (3)$$

表示这个极限，并称其为 $f(x)$介于 a 和 b 之间的定积分. 在这个记号中 $f(x)$常称为被积函数，$[a,b]$称为积分域，有时称 a 和 b 为积分限，a 称为积分下限，b 称为积分上限.

当 $f(x)$在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续(或局部连续)时，极限(3)存在. 当这个极限存在时，我们称 $f(x)$在$[a,b]$上是黎曼(Riemann)可积的，或简单地称为是可积的.

几何上，若 $f(x)\geqslant 0$，则这个定积分的值代表由曲线 $y=f(x)$，x 轴和在 $x=a,x=b$ 处的纵线所围成区域的面积. 若 $f(x)$时正时负，此时我们将 x 轴上方的面积处理为正的，x 轴下方的面积处理为负的，则这个定积分代表 x 轴上方和下方面积的代数和.

零测度

x 轴上的一个点集，如果可以使包含这些点的区间的长度和任意地小(小于任意给定的正

数 ε)，那么称这个点集具有零测度. 我们可以证明(见习题 6)实轴上任意可数点集具有零测度. 特别地，有理数集，它是可数的(见第一章习题 17 和习题 59)，具有零测度.

下面是黎曼积分中一个重要的定理：

若 $f(x)$在$[a,b]$上有界，则 $\int_a^b f(x)dx$ 存在的充要条件是$f(x)$的不连续点集有零测度.

定积分的性质

若 $f(x)$和 $g(x)$在$[a,b]$上可积，则

1. $\int_a^b |f(x) \pm g(x)| dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$,

2. $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$，其中 A 是任意常数，

3. 假如 $f(x)$ 在$[a,c]$ 和$[c,b]$ 上是可积的，则$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$,

4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$,

5. $\int_a^a f(x)dx = 0$,

6. 若在$a \leqslant x \leqslant b$ 上，$m \leqslant f(x) \leqslant M$，其中 m 和M是常数，则有 $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$,

7. 若在 $a \leqslant x \leqslant b$ 上，$f(x) \leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx,$$

8. 若 $a < b$，则$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)| dx$.

积分中值定理

1. 第一中值定理：若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则在(a,b)内存在一点 ξ，满足

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi). \tag{4}$$

2. 广义第一中值定理：若 $f(x)$和 $g(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)$在这个区间上不变号，则在(a,b)上存在一点 ξ，满足

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx, \tag{5}$$

若 $g(x)=1$，则上式就变成(4)式.

3. (Bonnet)第二中值定理：若 $f(x)$和 $g(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)$是正的单调递减函数，则在(a,b)上存在一点 ξ，满足

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx. \tag{6}$$

若 $g(x)$是正的单调递增函数，则在(a,b)上存在一点 ξ，满足

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\xi^b f(x)dx. \tag{7}$$

4. 广义第二中值定理：若 $f(x)$和 $g(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)$是单调递增或递减的函数，$g(x)$也不必像在 3 中那样恒为正的，则在(a,b)内存在一点 ξ，满足

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx. \tag{8}$$

如果用可积取代连续，则这个结果也是成立的.

不定积分

如果 $f(x)$ 是已知的，则满足 $F'(x)=f(x)$ 的函数 $F(x)$ 称为 $f(x)$ 的一个不定积分或原函数. 显然，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个不定积分，由于 $(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$，其中 c 是任意常数，则 $F(x)+c$ 也是 $f(x)$ 的不定积分. 于是所有的不定积分之间相差一个常数，我们常用符号 $\int f(x)dx$ 表示 $f(x)$ 的任意不定积分.

例：若 $F'(x)=x^2$，则 $F(x)=\int x^2dx = x^3/3+c$ 是 x^2 的一个不定积分或原函数.

积分运算的基本定理

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是满足 $F'(x)=f(x)$ 的任意函数（即 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个不定积分或原函数），则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a). \tag{9}$$

当一个不定积分已知时，这个重要定理使我们不必用定义计算定积分.

例：计算 $\int_1^2 x^2dx$. 注意到 $F'(x)=x^2$，$F(x)=x^3/3+c$. 则有 $\int_1^2 x^2dx = F(2)-F(1) = \left(\frac{2^3}{3}+c\right)-\left(\frac{1^3}{3}+c\right)=\frac{7}{3}$. 由于 c 不管怎样都会抵消的，所以为方便可更简单地写为 $\int_1^2 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{7}{3}$.

变限定积分

由写成

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(x)dx + c \tag{10}$$

知一个不定积分可以表示成一个变上限的定积分，从而有

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx = f(x). \tag{11}$$

由于定积分仅依赖于积分限，所以我们可以用任意变量作为积分变量. 例如 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$，等等. 正因为这个原因，这个变量常称为哑变量. 例如可以将(11)式记为

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x). \tag{12}$$

这个结果可推广到上、下积分限都是变量的情形，因此有

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f[v(x)]\frac{dv}{dx} - f[u(x)]\frac{du}{dx}. \tag{13}$$

例：$\frac{d}{dx}\int_x^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\frac{d(x^2)}{dx}-\frac{\sin x}{x}\frac{d(x)}{dx}=\frac{2\sin x^2-\sin x}{x}$.

积分变量的变换

如果借助于初等函数确定$\int f(x)dx$并不显而易见，那么可以通过变换$x=g(t)$，将变量从x变成t，从而得到有用的结果.确保这样做的基本定理可概括成

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt, \tag{14}$$

这里假定$t=g^{-1}(x)$是单值的，则在得到右边的不定积分后，用x取代t，即用$t=g^{-1}(x)$代入，求得原不定积分.这个结果和微分的链法则是相类似的(见 p.58).

关于定积分的相应定理就是

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\{g(t)\}g'(t)dt, \tag{15}$$

其中$g(\alpha)=a$和$g(\beta)=b$，即$\alpha=g^{-1}(a)$，$\beta=g^{-1}(b)$.如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，$g(t)$在$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$上是连续的且有连续的导数，则这个结论肯定是正确的.

特殊函数的积分

下列结果都可以通过微分两边得到恒等式来证明，且在每一种情况下都应该加上一个任意常数c(这里已被省略了).

1. $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}, n\neq-1,$　　2. $\int\frac{du}{u}=\ln|u|,$

3. $\int \sin u du=-\cos u,$　　4. $\int \cos u du=\sin u,$

5. $\int \tan u du=\ln|\sec u|=-\ln|\cos u|,$　　6. $\int \cot u du=\ln|\sin u|,$

7. $\int \sec u du=\ln|\sec u+\tan u|=\ln|\tan(u/2+\pi/4)|,$

8. $\int \csc u du=\ln|\csc u-\cot u|=\ln|\tan u/2|,$

9. $\int \sec^2 u du=\tan u,$　　10. $\int \csc^2 u du=-\cot u,$

11. $\int \sec u\tan u du=\sec u,$　　12. $\int \csc u\cot u du=-\csc u,$

13. $\int a^u du=a^u/\ln u, a>0, a\neq 1,$　　14. $\int e^u du=e^u,$

15. $\int \sinh u du=\cosh u,$　　16. $\int \cosh u du=\sinh u,$

17. $\int \tanh u du=\ln\cosh u,$　　18. $\int \coth u du=\ln|\sinh u|,$

19. $\int \operatorname{sech} u du=\arctan(\sinh u),$　　20. $\int \operatorname{csch} u du=-\coth^{-1}(\cosh u),$

21. $\int \operatorname{sech}^2 u du=\tanh u,$　　22. $\int \operatorname{csch}^2 u du=-\coth u,$

23. $\int \operatorname{sech} u\tanh u du=-\operatorname{sech} u,$　　24. $\int \operatorname{csch} u\coth u du=-\operatorname{csch} u,$

25. $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}$ 或 $-\arccos\frac{u}{a},$　　26. $\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|,$

27. $\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}$ 或 $-\frac{1}{a}\operatorname{arccot}\frac{u}{a},$　　28. $\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|,$

29. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+\sqrt{a^2 \pm u^2}}\right|$, 30. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{u}$ 或 $\frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{u}{a}$,

31. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}|$,

32. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a}$,

33. $\int e^{au}\sin bu\,du = \frac{e^{au}(a\sin bu - b\cos bu)}{a^2 + b^2}$, 34. $\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{e^{au}(a\cos bu + b\sin bu)}{a^2 + b^2}$.

积分法

1. 分部积分法

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ 或 $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$,

其中 $u = f(x), v = g(x)$. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在$[a,b]$上连续. 且有连续的导数,则在$[a,b]$上的定积分一定具有相应的结果(见习题 18 ~ 20).

2. 部分分式 设 $P(x)$和 $Q(x)$是多项式,且 $P(x)$的次数低于 $Q(x)$的次数,则有理数 $P(x)/Q(x)$都可以写成具有形式$\frac{A}{(ax+b)^r}$,$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^r}$的有理函数的和,其中 $r = 1,2,3,\cdots$,而这种有理函数根据初等函数总是可以积出来的.

例 1: $\frac{3x-2}{(4x-3)(2x+5)^3} = \frac{A}{4x-3} + \frac{B}{(2x+5)^3} + \frac{C}{(2x+5)^2} + \frac{D}{2x+5}$.

例 2: $\frac{5x^2-x+2}{(x^2+2x+4)^2(x-1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+2x+4)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+4} + \frac{E}{x-1}$.

常数 A,B,C 等可以通过去除分式变成多项式相等式,再据等式两边同次幂的系数相等得到或利用特殊方法(见习题 21).

3. $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函数 通过代换 $\tan x/2 = u$,总是可以用初等函数积出的(见习题 22).

4. 特殊方法 依赖于积分表达式的特殊形式,也是常用的方法(见习题 23 和习题 24).

广义积分

如果积分域$[a,b]$不是有限的或者如果 $f(x)$在$[a,b]$的一个点或多个点上无定义或无界,那么 $f(x)$在这个区域上的积分称为广义积分. 利用恰当的极限运算,可以定义这种积分.

例 1: $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to\infty}\arctan x\Big|_0^M = \lim_{M\to\infty}\arctan M = \pi/2$.

例 2: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to0^+} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to0^+}(2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$.

例 3: $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\ln x\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to0^+}(-\ln\varepsilon)$.

由于这个极限不存在,故称这个积分发散(即不收敛).

更多的例子,见习题 33,78~80. 关于广义积分的进一步讨论见第十二章.

计算定积分的数值方法

在不能精确计算定积分的情况下可以用数值方法计算. 下面列出的特定的数值方法都是将区间$[a,b]$等分成长度为 $\Delta x = (b-a)/n$ 的 n 个小区间. 为简便起见,我们用 y_k 表示 $f(a + k\cdot\Delta x) = f(x_k)$,其中 $k = 0,1,2,\cdots,n$,符号≈表示"近似等于". 一般地 n 越大,近似得越好.

1．矩形法

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x\{y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\} \text{ 或 } \Delta x\{y_1 + y_2 + \cdots + y_n\}. \quad (16)$$

由 p.73 上的图可见其几何意义是明显的.

2．梯形法

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\}. \quad (17)$$

这是(16)式两个近似值的均值.几何上就是一系列直线段近似代替这条曲线 $y = f(x)$.

3．辛普森(Simpson)法

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\{y_0 + \Delta y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\} \quad (18)$$

这是将$[a,b]$区间等分成偶数个小区间(即 n 为偶数),并用过相应于 x_0、x_1,x_2;x_1,x_2,x_3;…;x_{n-2},x_{n-1},x_n 三个相邻点的二次曲线近似$f(x)$,从而得到(18)式.几何上就是用一系列抛物线近似代替曲线 $y=f(x)$.

4．泰勒中值定理　有时也可以用,正如习题 26 那样.

应用

定积分作为和的极限,它的应用可使我们解决物理或几何上的许多问题,比如面积、体积、弧长、转动惯量、形心等等.

习题与解答

定积分的定义

1．若 $f(x)$在$[a,b]$上连续,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx.$$

证明 ☞　由于 $f(x)$是连续的,所以 $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ 的极限存在,且与区间的分法和 ξ_k 的取法无关(见习题 35).现将$[a,b]$区间等分成 n 个小区间,每一小区间的长度为 $\Delta x = (b-a)/n$(见图 5-1).令 $\xi_k = a + k(b-a)/n$,$n = 1,2,\cdots,n$,则 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$.

2．将 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$表示成定积分.

解 ☞　在习题中令 $a=0$,$b=1$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx.$$

3．(a) 将 $\int_0^1 x^2 dx$ 表示成一个和的极限,并利用这个结果计算这个定积分,(b)说明其几何含义.

解 ☞　(a)若 $f(x)=x^2$,则 $f\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{k^2}{n^2}$,于是由习题 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2} = \int_0^1 x^2 dx.$$

利用第一章 29 题,上式可写成

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}=\frac{1}{3}.$$

这就是所要求的极限.

注:利用微积分的基本定理,有 $\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = 1^3/3-0^3/3=1/3$.

(b) 由曲线 $y=x^2$, x 轴和直线 $x=1$ 所围成区域的面积等于 $\frac{1}{3}$.

4. 计算 $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right\}$.

解 ☞ 所求极限可写成

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1+1/n}+\frac{1}{1+2/n}+\cdots+\frac{1}{1+n/n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2,$$

运算中利用了习题 2 和微积分的基本定理.

5. 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sin\frac{t}{n}+\sin\frac{2t}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)}{n}t\right\}=\frac{1-\cos t}{t}$.

证明 ☞ 在习题 1 中令 $a=0$, $b=t$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{kt}{n}=\int_0^t \sin x dx = 1-\cos t,$$

因此, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{kt}{n}=\frac{1-\cos t}{t}$,

这里利用了 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin t}{n}=0$.

零测度

6. 证明可数集具有零测度.

证明 ☞ 设这个点集为 $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots$. 假定分别包含这些点的区间长度小于 $\varepsilon/2, \varepsilon/4, \varepsilon/8, \varepsilon/16, \cdots$,其中 ε 是任意正数,则这些区间的长度和小于 $\varepsilon/2+\varepsilon/4+\varepsilon/8+\cdots=\varepsilon$(第二章习题 25(a)中令 $a=\varepsilon/2$, $r=\frac{1}{2}$),这就证明了这个集具有零测度.

定积分的性质

7. (a)若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $m\leqslant f(x)\leqslant M$,其中 m 和 M 是常数,证明:

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx \in M(b-a),$$

(b) 说明(a)的几何含义.

证明 ☞ (a)我们有

$$m\Delta x_k \leqslant f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant M\cdot\Delta x_k, k=1,2.\cdots,n.$$

将 $k=1$ 到 $k=n$ 这 n 个不等式相加,并利用

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=(x_1-a)+(x_2-x_1)+\cdots+(b-x_{n-1})=b-a$$

得

$$m(b-a)\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\leqslant M(b-a).$$

当 $n\to\infty$ 和每个 $\Delta x_k\to 0$ 时求极限即为所要求的结果.

(b)假定在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant 0$ 且是连续的,如图 5-2 所示,几何上显然有 $ABCD$ 的面积≤曲线 $y=f(x)$ 下的面积≤$ABEF$ 的面积即 $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)$.

若将 $f(x)\geqslant 0$ 条件去掉,则也可作出一个类似的解释.若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是分段连续的,这个结果也是成立的.

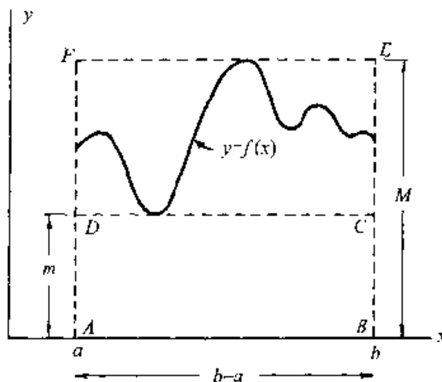


图 5-2

8. 若 $a<b$. 证明 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx$.

证明 ☞　由 p.3 上不等式 2,有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k)\Delta x_k|=\sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k)|\Delta x_k.$$

当 $n\to\infty$ 和每个 $\Delta x_k\to 0$ 时求极限,即得所要的结果.

9. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{x^2+n^2}dx=0$.

证明 ☞　$\left|\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{x^2+n^2}dx\right|\leqslant\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\right|dx\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{dx}{n^2}=\frac{2\pi}{n^2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{x^2+n^2}dx\right|=0$, 故所要证的结论成立.

积分中值定理

10. (a)若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明在 (a,b) 上存在一点 ξ,满足 $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)$.

(b)说明(a)的几何含义.

解 ☞　(a)因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,故存在常数 m 和 M. 使得 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 成立. 由习题 7 得

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\leqslant M.$$

因 $f(x)$ 是连续的,故它可取到介于 m 和 M 之间所有的值(见第二章习题 34,习题 93).特别地一定存在一 ξ 值,满足

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a},a<\xi<b,$$

两边同乘 $b-a$,即得所要结果.

(b)若 $f(x)\geqslant 0$,就如习题 7(b)图中所示,$\int_a^b f(x)dx$ 就是曲线 $y=f(x)$ 下的阴影部分面积,几何上这个面积等于以底长为 $(b-a)$,高为 $f(\xi)$ 的矩形面积其中 ξ 为 a 和 b 之间的某一值.

积分运算的基本定理

11. 若 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明 $F'(x)=f(x)$.

证明 ☞　$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\left\{\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right\}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt$$
$$=f(\xi),\xi\text{ 介于 }x\text{ 和 }x+h\text{ 之间}.$$

最后一个等号成立是利用积分第一中值定理(习题 10).

那么如果 x 是 (a,b) 上的一点,因 $f(x)$ 是连续的,所以有

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}f(\xi)=f(x).$$

如果 $x=a$ 或 $x=b$. 我们分别用右或左极限,结果仍是成立的.

12. 证明微积分的基本定理.

证明 ☞ 由习题11,若 $F(x)$是满足 $F'(x)=f(x)$的任一函数,则有

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+c,$$

其中 c 是任意常数(见第四章习题22最后一行).

因 $F(a)=c$,从而有 $F(b)=\int_a^b f(t)dt+F(a)$,

即 $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$.

13. 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续,证明 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在$[a,b]$上也是连续的.

证法1 若 x 是$[a,b]$上任意一点,则如同习题11一样.

$$\lim_{h\to0}F(x+h)-F(x)=\lim_{h\to0}hF(\xi)=0,$$

故 $F(x)$是连续的.

若 $x=a$ 和 $x=b$,则我们分别利用右和左极限证明 $F(x)$在 $x=a$ 和 $x=b$ 点是连续的.

证法2 由第四章习题11和习题3,得 $F'(x)$存在,故 $F(x)$一定是连续的.

变量变换和积分法

14. 证明 p.76 上关于变换积分变量的结果(15)式.

证明 ☞ 令 $F(x)=\int_a^x f(x)dx$ 和 $G(t)=\int_\alpha^t f\{g(t)\}g'(t)dt$,其中 $x=g(x)$,

则 $dF=f(x)dx$,$dG=f\{g(t)\cdot g'(t)dt$.

因为 $dx=g'(t)dt$,则有 $f(x)dx=f\{g(t)\}g'(t)dt$,

所以 $dF(x)=dG(t)$,由此有 $F(x)=G(t)+c$.

现当 $x=a$ 时,$t=\alpha$,即 $F(a)=G(\alpha)+c$,但 $F(a)=G(\alpha)=0$,因此 $c=0$,从而 $F(x)=G(t)$.因为当 $t=\beta$ 时,$x=b$,故有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\{g(t)\}g'(t)dt.$$

这正是所要证明的结果.

15. 计算:

(a) $\int(x+2)\sin(x^2+4x-b)dx$, (b) $\int\frac{\cot(\ln x)}{x}dx$, (c) $\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}$,

(d) $\int2^{-x}\tanh2^{1-x}dx$, (e) $\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x\arcsin x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$, (f) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}}$;

解 ☞ (a) **方法1** 令 $x^2+4x-6=u$,则$(2x+4)dx=du$,$(x+2)dx=\frac{1}{2}du$.

所求积分变为$\frac{1}{2}\int\sin udu=-\frac{1}{2}\cos u+c=-\frac{1}{2}\cos(x^2+4x-b)+c$.

方法2

$$\int(x+2)\sin(x^2+4x-6)dx=\frac{1}{2}\int\sin(x^2+4x-6)d(x^2+4x-6)$$

$$=-\frac{1}{2}\cos(x^2+4x-6)+c.$$

(b) 令 $\ln x=u$,则$(dx)/x=du$,积分变为

$$\int\cot udu=\ln|\sin u|+c=\ln|\sin(\ln x)|+c.$$

(c) **方法1**

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{6-(x^2-x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{25/4-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}},$$

令 $x-\frac{1}{2}=u$，上式变为 $\int\frac{du}{\sqrt{25/4-u^2}}=\arcsin\frac{u}{5/2}+c=\arcsin\left(\frac{2x-1}{5}\right)+c$，那么 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}$

$=\arcsin\left(\frac{2x-1}{5}\right)\Big|_{-1}^{1}=\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)-\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$

方法 2 令 $x-\frac{1}{2}=u$，和方法 1 一样. 现当 $x=-1$ 时 $u=-\frac{3}{2}$. 当 $x=1$ 时 $u=\frac{1}{2}$，于是由习题 14，

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(2+x)(3-x)}}=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{25/4-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{25/4-u^2}}=\arcsin\frac{u}{5/2}\Big|_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}.$$

$$=\arcsin 0.2+\arcsin 0.6.$$

(d) 令 $2^{1-x}=u$，则 $-2^{1-x}(\ln 2)dx=du$，$2^{-x}dx=-\frac{du}{2\ln 2}$，于是积分变为 $-\frac{1}{2\ln 2}\int\tanh u du=-\frac{1}{2\ln 2}\ln\cosh 2^{1-x}+c$.

(e) 令 $\arcsin x^2=u$，则 $du=\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot 2xdx=\frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$，所求积分变为 $\frac{1}{2}\int udu=\frac{1}{4}u^2+c=\frac{1}{4}(\arcsin x^2)^2+c$. 因此 $\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x\arcsin x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx=\frac{1}{4}(\arcsin x^2)^2\Big|_0^{1/\sqrt{2}}=\frac{1}{4}\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{144}$.

(f) $$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1-1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\int(x^2+x+1)^{-1/2}d(x^2+x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+3/4}}$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right|+c.$$

16. 证明 $\int_1^2\frac{dx}{(x^2-2x+4)^{3/2}}=\frac{1}{6}$.

证明 ☞ 将这个积分改写成 $\int_1^2\frac{dx}{[(x-1)^2+3]^{3/2}}$，令 $(x-1)=\sqrt{3}\tan u$. $dx=\sqrt{3}\sec^2 udu$，当 $x=1$ 时 $u=\arctan 0=0$；当 $x=2$ 时 $u=\arctan 1/\sqrt{3}=\pi/6$，则这个积分变为

$$\int_0^{\pi/6}\frac{\sqrt{3}\sec^2 udu}{(3+3\tan^2 u)^{3/2}}=\int_0^{\pi/6}\frac{\sqrt{3}\sec^2 udu}{[3\sec^2 u]^{3/2}}=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/6}\cos udu=\frac{1}{3}\sin u\Big|_0^{\pi/6}=\frac{1}{6}.$$

17. 求 $\int_e^{e^2}\frac{dx}{x(\ln x)^3}$.

解 ☞ 令 $\ln x=y$，$(dx)/x=dy$. 当 $x=e$ 时 $y=1$；当 $x=e^2$ 时，$y=2$，则积分变为 $\int_1^2\frac{dy}{y^3}=\frac{y^{-2}}{-2}\Big|_1^2=\frac{3}{8}$.

18. 若(a) $n\neq-1$，(b) $n=-1$，求 $\int x^n\ln xdx$.

解 ☞ (a)利用分部积分，令 $u=\ln x$，$dv=x^n dx$，故 $du=(dx)/x$，$v=x^{n+1}/(n+1)$，则 $\int x^n\ln xdx=\int udv=uv-\int vdu=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\int\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+c$.

(b) $\int x^{-1}\ln xdx=\int\ln xd(\ln x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$.

19. 求 $\int 3^{\sqrt{2x+1}}dx$.

解 ☞ 设 $\sqrt{2x+1}=y$，$2x+1=y^2$，则 $dx=ydy$，积分变为 $\int 3^y\cdot ydy$，利用分部积分，令 $u=y$，$dv=3^y dy$，则 $du=dy$，$v=3y/(\ln 3)$，于是有

$$\int 3^y \cdot y dy = \int u dv = uv - \int v du = \frac{y \cdot 3^y}{\ln 3} - \int \frac{3^y}{\ln 3} dy$$

$$= \frac{y \cdot 3^y}{\ln 3} - \frac{3^y}{(\ln 3)^2} + c.$$

20. 求 $\int_0^1 x\ln(x+3)dx$.

解 设 $u=\ln(x+3), dv=xdx$,则 $du=\frac{dx}{x+3}, v=\frac{x^2}{2}$,因此利用分部积分法有

$$\int x\ln(x+3)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+3) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{x+3}$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+3) - \frac{1}{2}\int\left(x-3+\frac{9}{x+3}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+3) - \frac{1}{2}\left\{\frac{x^2}{2} - 3x + 9\ln(x+3)\right\} + c,$$

因此 $\int_0^1 x\ln(x+3)dx = \frac{5}{4} - 4\ln 4 + \frac{9}{2}\ln 3$.

21. 求出 $\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}dx$.

解 利用部分分式法设 $\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x-5}$.

方法 1 为了确定常数 A 和 B,用 $(x-3)(2x+5)$ 乘等式两边得

$$6-x = A(2x+5) + B(x-3), \text{即 } 6-x = 5A-3B+(2A+B)x, \tag{1}$$

由于这是一个恒等式,故有 $5A-3B=6, 2A+B=-1, A=3/11, B=-17/11$,因此

$$\int \frac{6-x}{(3-x)(2x+5)}dx = \int \frac{3/11}{x-3}dx + \int \frac{-17/11}{2x+5}dx = \frac{3}{11}\ln|x-3|$$

$$-\frac{17}{22}\ln|2x+5| + c.$$

方法 2 在等式(1)中代入适当的 x 值,例如在(1)中令 $x=3$ 和 $x=-5/2$,立即可得 $A=3/11, B=-17/11$.

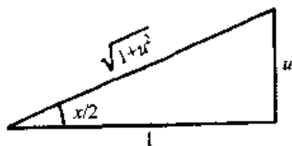


图 5-3

22. 利用代换 $\tan x/2 = u$,计算 $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$.

解 由图 5-3 可见

$$\sin x/2 = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \cos x/2 = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

则

$$\cos x = \cos^2 x/2 - \sin^2 x/2 = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

且 $du = \frac{1}{2}\sec^2 x/2dx$ 或 $dx = 2\cos^2 x/2du = \frac{2du}{1+u^2}$,

于是积分变为 $\int \frac{du}{u^2+4} = \frac{1}{2}\arctan u/2 + c = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\tan x/2\right) + c$.

23. 计算 $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

解 设 $x=\pi-y$,则

$$I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^\pi \frac{(\pi-y)\sin y}{1+\cos^2 y}dy$$

$$= \pi\int_0^\pi \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}dy - \int_0^\pi \frac{y\sin y}{1+\cos^2 y}dy$$

$$= -\pi\int_0^\pi \frac{d(\cos y)}{1+\cos^2 y} - I = \pi\arctan(\cos y)\Big|_0^\pi - I = \frac{\pi^2}{2} - I,$$

即 $I=\pi^2/2-I, I=\pi^2/4$.

24. 证明 $\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx=\pi/4$.

证明 ☞ 令 $x=\pi/2-y$，有

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos y}}{\sqrt{\cos y}+\sqrt{\sin y}}dy=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx,$$

则 $I+I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx+\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx=\int_0^{\pi/2}dx=\pi/2.$$

由此有 $2I=\pi/2, I=\pi/4$.

同理可证 $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^m x}{\sin^m x+\cos^m x}dx=\frac{\pi}{4}$，$m$ 为任一实数(见习题 94).

注：此题和习题 23 表明某些定积分在没有先求出相应的不定积分时也可以计算.

计算定积分的数值方法

25. 利用(a)梯形法，(b)辛普森法，近似计算 $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$，其中区间[0,1]被分成 $n=4$ 等份.

解 ☞ 设 $f(x)=1/(1+x^2)$，利用 p.82 上的记号，有 $\Delta x=(b-a)/n=(1-0)/4=0.25$，则保留 4 位小数有：$y_0=f(0)=1.0000, y_1=f(0.25)=0.9412, y_2=f(0.50)=0.8000, y_3=f(0.75)=0.6400, y_4=f(1)=0.5000$.

(a) 梯形法有

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx\frac{\Delta x}{2}\{y_0+2y_1+2y_2+2y_3+y_4\}$$

$$=\frac{0.25}{2}\{1.0000+2(0.9412)+2(0.8000)+2(0.6400)+0.500\}=0.7828.$$

(b) 辛普森法有

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx\frac{\Delta x}{3}\{y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4\}$$

$$=\frac{0.25}{2}\{1.000+4(0.9412)+2(0.8000)+4(0.6400)+0.5000\}=0.7854.$$

这个积分的精确值为 $\pi/4\approx0.7854$.

26. (a) 用泰勒中值定理近似计算 $\int_0^1 e^{x^2}dx$.

(b) 估计最大误差.

解 ☞ 和第四章习题 28 一样，有

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5e^\xi}{5!}, 0<\xi<x,$$

则用 x^2 代替 x，有

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\frac{x^{10}e^\xi}{5!}, 0<\xi<x^2.$$

从 0 到 1 积分得

$$\int_0^1 e^{x^2}dx=\int_0^1\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}\right)dx+E\left(\text{这里误差 }E=\int_0^1\frac{x^{10}}{5!}e^\xi dx\right)$$

$$=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot2!}+\frac{1}{7\cdot3!}+\frac{1}{9\cdot4!}+E=1.4618+E$$

现 $|E| = \left|\int_0^1 \frac{x^{10}}{5!}e^{\xi}dx\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{x^{10}}{5!}e^{\xi}\right|dx \leqslant e \cdot \int_0^1 \frac{x^{10}}{5!}dx$

$= \frac{e}{11.5!} < 0.0021.$

于是最大误差小于 0.0021. 因而精确到 2 位小数,这个积分值为 1.46. 利用泰勒中值定理中的更多项,可得到精确度更高的值.

应用

27. 设 xy 平面上有一个由 $y = 4 - x^2$ 和 x 轴围成的区域,求:(a)这个区域的面积,(b)这个区域关于 y 轴的转动惯量.

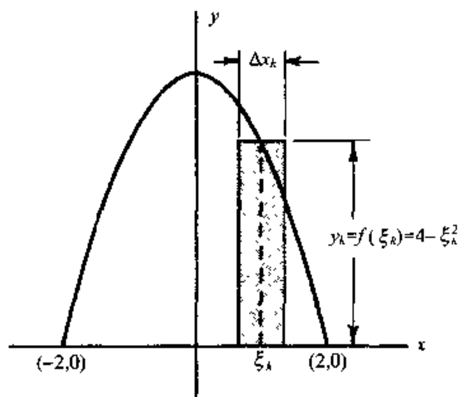


图 5-4

解 ☞　(a)将区域分成若干小矩形,正如图 5-1 一样. 在图 5-4 中画出了一个典型矩形,则所要求的

面积 $= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(4 - \xi_k)^2\Delta x_k = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = 32/3.$

(b) 假定密度为 1,则图 5-4 中这个典型矩形关于 y 轴的转动惯量为 $\xi_k^2 f(\xi_k)\Delta x_k$,所要求的转动惯量 $=$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2(4 - \xi_k^2)\Delta x_k$

$= \int_{-2}^{2} x^2(4 - x^2)dx = 128/15.$

28. 求抛物线 $y = x^2$ 从 $x = 0$ 到 $x = 1$ 这一段弧的长度.

解 ☞　所要求的弧长 $= \int_0^1 \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx$

$= \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1 + u^2}\,du$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}u\sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2}\ln(u + \sqrt{1 + u^2})\right\}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{5}).$

29. 求由习题 27 中的区域绕 x 轴旋转而得的施转体的体积.

解 ☞　所要求的体积 $= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\pi y_k^2\Delta x_k = \pi\int_{-2}^{2}(4 - x^2)^2dx$

$= 512\pi/15.$

杂题

30. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,证明施瓦兹积分不等式

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2dx \cdot \int_a^b |g(x)|^2dx$$

证明 ☞　对任意实数 λ,我们有

$$\int_a^b |f(x) + \lambda g(x)|^2dx = \int_a^b |f(x)|^2dx + 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx + \lambda^2\int_a^b |g(x)|^2dx \geqslant 0.$$

因此,将

$$A^2 = \int_a^b |g(x)|^2dx,\ B^2 = \int_a^b |f(x)|^2dx,\ C = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

用于第一章习题 13(1)式中,我们有 $C^2 \leqslant A^2B^2$ 这就是所要证的结果.

31. 除其他的假定外又假设 $g'(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在且连续,证明 p.74 上的第二中值定理等式(8).

证明 ☞　设 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$,则根据分部积分法

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)F'(x)dx$$

$$= g(x)F(x)\Big|_a^b - \int_a^b g'(x)F(x)dx$$

$$= g(b)F(b) - \int_a^b g'(x)F(x)dx.$$

情形 1 $g(x)$是单调递增,即 $g'(x)\geqslant 0$.
则由广义第一中值定理(见 p.74)有

$$\int_a^b g'(x)F(x)dx = F(\xi)\int_a^b g'(x)dx = F(\xi)[g(b)-g(a)],$$

其中 ξ 在(a,b)内.因此

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)F(b) - F(\xi)[g(b)-g(a)]$$

$$= g(a)F(\xi) + g(b)[F(b)-F(\xi)]$$

$$= g(a)\int_a^\xi f(t)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

情形 2 $g(x)$是单调递减,即 $g'(x)\leqslant 0$,
证明与情形 1 相类似.

32. (a)若 $f^{(n+1)}(x)$在$[a,b]$上连续,证明对$[a,b]$上任意 x 有 $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}+\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$.

(b) 利用(a)得到泰勒定理中的拉格朗日余项和柯西余项(见 p.57).

证明 (a) 利用数学归纳法(见第一章).对 $n=0$,因为

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt = f(a) + f(t)\Big|_a^x = f(a) + f(x) - f(a), \tag{1}$$

所以结果成立.

假定 $n=k$ 时结果成立,则利用分部积分法.设 $\frac{(x-t)^k}{k!}dt = dv$, $f^{(k+1)}(t)=u$,故 $v=-\frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}$, $du=f^{(k+2)}(t)dt$,有

$$\frac{1}{k!}\int_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)dt = \frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}\Bigg|_a^x + \frac{1}{(k+1)!}\int_a^x (x-t)^{k+1}f^{(k+2)}(t)dt$$

$$= \frac{f^{(k+1)}(t)(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!}f^{(k+2)}(t)dt.$$

这就证明了 $n=k+1$ 时结果成立,从而对所有整数 $n\geqslant 0$,结果都成立.

(b)由积分广义第一中值定理(p.74),我们有

$$\int_a^x F(t)G(t)dt = F(\xi)\int_a^x G(t)dt, \xi \text{ 在 } a \text{ 和 } x \text{ 之间},$$

令 $F(t)=f^{(n+1)}(t)$, $G(t)=\frac{(x-t)^n}{n!}$,得

$$\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_a^x (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

用 x 取代b,就得到了拉格朗日余项形式[p.57 等式(20)].

令 $F(t)=\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}$, $G(t)=1$,有

$$\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!}\int_a^x 1dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a)}{n!},$$

用 x 取代 b,就得到柯西余项形式[p.57(21)式]

33. 证明 $\lim\limits_{M\to\infty}\int_0^M \frac{dx}{x^4+4} = \pi/8$.

证明 ☞ 我们有 $x^4+4 = x^4+4x^2+4-4x^2 = (x^2+2)^2-(2x)^2$

$$= (x^2+2+2x)(x^2+2-2x).$$

根据部分分式法,假设

$$\frac{1}{x^4+4} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+2},$$

则有

$$1 = (A+C)x^3 + (B-2A+2C+D)x^2 + (2A-2B+2C+2D)x + 2B + 2D,$$

因此

$$A+C=0, B-2A+2C+D=0, 2A-2B+2C+2D=0, 2B+2D=1,$$

解得 $A=\frac{1}{8}, B=\frac{1}{4}, C=-\frac{1}{8}, D=\frac{1}{4}$,于是

$$\int\frac{dx}{x^4+4} = \frac{1}{8}\int\frac{x+2}{x^2+2x+2}dx - \frac{1}{8}\int\frac{x-2}{x^2-2x+2}dx$$

$$= \frac{1}{8}\int\frac{x+1}{x^2+2x+2}dx + \frac{1}{8}\int\frac{dx}{(x+1)^2+1} - \frac{1}{8}\int\frac{x-1}{x^2-2x+2}dx + \frac{1}{8}\int\frac{dx}{(x-1)^2+1}$$

$$= \frac{1}{16}\ln(x^2+2x+2) + \frac{1}{8}\arctan(x+1) - \frac{1}{16}\ln(x^2-2x+2) + \frac{1}{8}\arctan(x-1) + C,$$

则 $\lim\limits_{M\to\infty}\int_0^M \frac{dx}{x^2+4} = \lim\limits_{M\to\infty}\left\{\frac{1}{16}\ln\left(\frac{M^2+2M+2}{M^2-2M+2}\right) + \frac{1}{8}\arctan(M+1) + \frac{1}{8}\arctan(M-1)\right\}$

$$= \frac{\pi}{8}.$$

我们用 $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+4}$ 表示这个极限,并称这类积分为第一类广义积分,这类积分在第十二章中进一步研究,也可见习题 78.

34. 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{x^4}$.

解 ☞ 这个极限满足洛必达法则的条件,因此所求极限为

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t^3 dt}{\frac{d}{dx}(x^4)} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x^3}{4x^3} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{d}{dx}(\sin x^3)}{\frac{d}{dx}(4x^3)}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{3x^2\cos x^3}{12x^2} = \frac{1}{4}.$$

35. 证明:若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $\int_a^b f(x)dx$ 存在.

证明 ☞ 利用 p.78 上的记号,设 $\sigma = \sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$. 因 $f(x)$ 是连续的,所以在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上可找到数 M_k 和 m_k,分别代表 $f(x)$ 在这个区间上的上确界和下确界,即满足 $m_k \leqslant f(x) \leqslant M_k, x\in[x_{k-1}, x_k]$,那么我们有

$$m(b-a) \leqslant s = \sum_{k=1}^n m_k\Delta x_k \leqslant \sigma \leqslant \sum_{k=1}^n M_k\Delta x_k \leqslant S \leqslant M(b-a), \tag{1}$$

其中 m 和 M 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上确界和下确界,和 s 和 S 有时分别称为下和和上和.

现在选择 $[a,b]$ 的第二种分法,考虑相应的下和和上和,分别用 s' 和 S' 表示,则一定有 $s'\leqslant S$ 和

$S' \geqslant s$. (2)

为了证明这一点,我们利用第一和第二种分法中的分点得到第三种分法.考虑相应的下和和上和,分别用 t 和 T 表示.由习题89,我们有

$$s \leqslant t \leqslant T \leqslant S' \text{ 和 } s' \leqslant t \leqslant T \leqslant S, \tag{3}$$

这就证明了(2)式.

由(2)式易得,随着区间的逐步细分,上和是单调递减,下和是单调递增.又根据(1)式这些和也是有界的,故它们都是有极限的,我们分别称其为 $\bar{s}$ 和 $\underline{S}$.由习题90知 $\bar{s} \leqslant \underline{S}$.为了证明这个积分存在,我们要证 $\bar{s} = \underline{S}$.

由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,所以它是一致连续的,那么对任意给定的 $\varepsilon>0$,可取足够小的 Δx_k,使得 $M_k - m_k < \varepsilon/b-a$ 成立,于是有

$$S - s = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \varepsilon. \tag{4}$$

现 $S - s = (S - \underline{S}) + (\underline{S} - \bar{s}) + (\bar{s} - s)$,圆括号内的每一项都是正的,故由(4)式这些项均小于 ε.特别地,由于 $\underline{S} - \bar{s}$ 是一个确定的数,故它一定是0,即 $\underline{S} = \bar{s}$,从而上和和下和的极限相等,证明完成了证明.

补充习题

定积分的定义

36. (a) 将 $\int_0^1 x^3 dx$ 表示成一个和的极限,(b)利用(a)的结果计算这个定积分,(c)说明其几何含义.

37. 利用定义计算:(a) $\int_0^2 (3x+1)dx$,(b) $\int_3^6 (x^2-4x)dx$.

38. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right\}=\pi/4$.

39. 证明:若 $p>-1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\right\}=\dfrac{1}{p+1}$.

40. 利用定义证明 $\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$.

41. 利用第一章习题94,直接证明习题5.

42. 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}=\ln(1+\sqrt{2})$.

43. 证明:若 $x\neq 0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k^2x^2}=\dfrac{\arctan x}{x}$.

定积分性质

44. 证明 p.74 上(a)性质2,(b)性质3.

45. 若 $f(x)$ 在 (a,c) 和 (c,b) 上是可积的,证明

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

46. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可积的,且 $f(x)\leqslant g(x)$,证明 $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.

47. 证明对 $0\leqslant x\leqslant \pi/2$,有 $1-\cos x \geqslant x^2/\pi$.

48. 证明对所有的 n,有 $\left|\int_0^1 \dfrac{\cos nx}{x+1}dx\right| \leqslant \ln 2$.

49. 证明 $\left|\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{e^{-x}\sin x}{x^2+1}dx\right| \leqslant \dfrac{\pi}{12e}$.

积分中值定理

50. 证明 p.74 上的结果(5).[提示:若 $m\leqslant f(x)\leqslant M$,则 $mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x)$,再积分并应用 p.74 上性质7.]

51. 证明在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上存在二点 ξ_1 和 ξ_2,满足

$$\int_0^1 \frac{\sin\pi x}{x^2+1}dx = \frac{2}{\pi(\xi_1^2+1)} = \frac{\pi}{4}\sin\pi\xi_2.$$

52. 证明在 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 上存在一值 x 满足

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x dx = \sin\xi.$$

积分变换和积分法

53. 计算:(a) $\int x^2 e^{\sin x^3}\cos x^3 dx$,(b) $\int_0^1 \frac{\arctan t}{1+t^2}dt$,

(c) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$,(d) $\int \frac{\operatorname{csch}^2\sqrt{u}}{\sqrt{u}}du$,　(e) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{16-x^2}$.

54. 证明:(a) $\int_0^1 \frac{dx}{(3+2x-x^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{3}}{12}$,(b) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c$.

55. 证明:(a) $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2\ln|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}| + c$,

(b) $\int \sqrt{a^2-u^2}du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{2}a^2\arcsin u/a + c, a > 0$.

56. 求 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

57. 说明分部积分法的合理性.

58. 计算:(a) $\int_0^{\pi}\cos 3x dx$,(b) $\int x^3 e^{2x}dx$.

59. 证明:(a) $\int_0^1 x^2\arctan x dx = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\ln 2$,

(b) $\int_2^2 \sqrt{x^2+x+1}dx = \frac{5\sqrt{7}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{8}\ln\left(\frac{5+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}\right)$.

60. (a) 若 $u=f(x)$ 和 $v=g(x)$ 有连续的 n 阶导数,证明:

$$\int uv^{(n)}dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} - \cdots(-1)^n\int u^{(n)}vdx.$$

称此式为推广的分部积分.(b)若 $u^{(n)}=0$,则简化了什么?请讨论.(c)利用(a),计算 $\int_0^{\pi}x^4\sin x dx$.

61. 证明 $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{\pi-2}{8}$.

[提示:利用部分分成,即假定 $\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}$

$= \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$,求出 A,B,C,D.]

62. 证明 $\int_0^{\pi} \frac{dx}{a-\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}, a>1$.

计算定积分的数值方法

63. 利用(a)梯形法,(b)辛普森法,取 $n=4$,计算 $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ 的近似值,并与精确值 $\ln 2 = 0.6931$ 作比较.

64. 通过 $\sin^2 x$ 在 $x=0°,10°,\cdots,90°$ 上的值.分别利用(a)梯形法,(b)辛普森法计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx$,并与精确值 $\pi/4$ 作比较.

65. 证明用(a)矩形法,(b)梯形法近似计算定积分的公式,即 p.78 上的(16)和(17)式.

66. 证明用辛普森法近似计算定积分的公式.

67. 利用数值积分法计算下列积分,精确到 3 位小数:(a) $\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2}$,(b) $\int_0^1 \cosh x^2 dx$.

应用

68. 设在 xy 平面上,曲线 $y=\sin x, 0 \leqslant x \leqslant \pi$ 和 x 轴围成一个区域,求:(a)这个区域的面积,(b)这个区域关于 y 轴的转动惯量,假定其密度为 1.

69. 若一个面上一点处的密度刚好等于这点到 x 轴的距离,求由 $y=x^2$ 和 $y=x$ 所围成区域关于 x 轴的转动惯量.

70. 证明悬链线 $y=\cosh x$ 从 $x=0$ 到 $x=\ln 2$ 这段弧的弧长为$\frac{3}{4}$.

71. 证明摆线 $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$的一拱的长度为 $8a$.

72. 证明由椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 围成区域的面积为 πab.

73. 求由曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$绕 x 轴旋转而围成的这个立体区域的体积.

74. 证明由 $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $-a\leqslant x\leqslant a$ 和 x 轴围成的区域的形心位于$(0,4a/3\pi)$.

75. (a) 若 $\rho=f(\phi)$是极坐标系中一曲线的方程,证明由这曲线和直线 $\phi=\phi_1$ 和 $\phi=\phi_2$ 围成区域的面积为 $\frac{1}{2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\rho^2 d\phi$. (b)求由双纽线 $\rho^2=a^2\cos 2\phi$ 的一个闭路围成区域的面积.

76. (a)证明习题 75(a)中曲线弧长为 $\int_{\phi_1}^{\phi_2}\sqrt{\rho^2+(d\rho/d\phi)^2}\,d\phi$,

(b) 求心脏线 $\rho=a(1-\cos\phi)$的弧长.

杂题

77. 由第一积分中值定理建立导数中值定理.

[提示:在 p.74(4)式中,设 $f(x)=F'(x)$.]

78. 证明:(a) $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{4-\epsilon}\frac{dx}{\sqrt{4-x}}=4$, (b) $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^8\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=6$,

(c) $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{1-\epsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$, 并给出这个结果的几何含义.

[这些极限,通常分别用 $\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{4-x}}$, $\int_0^8\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$和 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$表示.由于被积函数在积分区域内不是有界的,故称这些积分为第二类广义积分.有关广义积分的进一步讨论,请见第十二章.]

79. 证明:(a) $\lim\limits_{M\to\infty}\int_0^M x^5e^{-x}dx=4!=24$,

(b) $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{2-\epsilon}\frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}=\frac{\pi}{2}$.

80. 计算:(a) $\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^3}$, (b) $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2x}{(\sin x)^{4/3}}dx$, (c) $\int_0^\infty\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

81. 计算 $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{ex^2/\pi-e\pi/4+\int_x^{\pi/2}e^{\sin t}dt}{1+\cos 2x}$.

82. 证明:(a) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}(t^2+t+1)dt=3x^8+x^5-2x^3+3x^2-2x$,

(b) $\frac{d}{dx}\int_x^{x^2}\cos t^2\,dt=2x\cos x^4-\cos x^2$.

83. 证明 p.75 上的结果(13).

84. 证明:(a) $\int_0^\pi\sqrt{1+\sin x}\,dx=4$, (b) $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x+\cos x}=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$.

85. 指出下面的错误并说明原因:

利用变换 $x=1/y$, $I=\int_{-1}^1\frac{dx}{1+x^2}=-\int_{-1}^1\frac{dy}{1+y^2}=-I$, 故 $I=0$, 但 $I=\arctan(1)-\arctan(-1)=\pi/4-(-\pi/4)=\pi/2$, 从而有 $\frac{\pi}{2}=0$.

86. 证明 $\int_0^{1/2}\frac{\cos\pi x}{\sqrt{1+x^2}}dx\leqslant\frac{1}{4}\arctan\frac{1}{2}$.

87. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{2n-1}}{n^{3/2}}\right\}$.

88. 证明 $f(x)=\begin{cases}1, 若\ x\ 是无理数\\0, 若\ x\ 是有理数\end{cases}$,在$[0,1]$上不是黎曼可积的.

89. 证明习题 35 的结果(3).[提示:首先考虑仅增加一个分割区间点的影响.]

90. 证明习题 35 中 $\bar{s} \leqslant \underline{S}$,[提示:通过作相反的假设得到一个矛盾的结果.]

91. 若 $f(x)$在$[a,b]$上是分段连续的,证明 $\int_a^b f(x)dx$ 存在.[提示:将每个不连续点放在一个区间中,注意可以使这类区间的长度和任意小,然后考虑上和和下和的差.]

92. 若 $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0<x<1, \\ 3, & x=1, \\ 6x-1, & 1<x<2, \end{cases}$,求$\int_0^2 f(x)dx$,并说出其几何含义.

93. 计算$\int_0^3 \left\{x-[x]+\frac{1}{2}\right\}dx$,并说明其几何含义,其中$[x]$表示小于或等于 x 的最大整数.

94. (a) 证明对所有实数 m,有 $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^m x}{\sin^m x+\cos^m x}dx=\frac{\pi}{4}$.

(b)证明 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\tan^4 x} - \pi$.

95. 证明 $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx$ 存在.

96. 证明 $\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x}dx \approx 0.4872$.

97. 证明 $\int_0^{\pi} \frac{x dx}{1+\cos^2 x}=\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$.

第六章　偏　导　数

二元及多元函数

如果对于变量 x 和 y 的每一给定的数对 (x, y) 都能确定变量 z 的一个或多个值与之对应，则称 z 为 x 和 y 的二元函数. 这个定义与将函数作为两个集合之间的对应关系的一般定义(见 p.19)是一致的. 这里的两个集是:(1)数对 (x, y) 的集合(几何上表示 xy 平面上的二维点集);(2)由变量 z 表示的实数集.

我们用符号 $f(x, y)$, $F(x, y)$ 等表示函数在 (x, y) 处的值并记为 $z=f(x, y)$, $z=F(x, y)$ 等. 有时,我们也使用符号 $z=z(x, y)$,而此时的 z 应从两种意义上去理解,即 z 既是函数又是变量.

例:如 $f(x, y)=x^2+2y^3$, 则 $f(3, -1)=(3)^2+2(-1)^3=7$.

二元函数的概念很容易推广到多元函数. 因此 $\omega=F(x, y, z)$ 表示一函数在 (x, y, z) (三维空间的一点)处的值,等等.

因变量和自变量,函数的定义域

如果 $z=F(x, y)$,则称 z 为因变量,称 x 和 y 为自变量. 如果对使函数有定义的每一数对 (x, y) 仅有 z 的一个值与之对应,则称该函数为单值的;而当 z 有多于一个的值与之对应时,则称该函数是多值的,并可将其看作是单值函数的集合. 因而,除非另加说明,我们的讨论将仅限于单值函数.

使函数有定义的点 (x, y) 的集合称为函数的定义域.

例:如 $z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$,则 z 的定义域就是满足 $x^2+y^2\leqslant 1$ 的点 (x, y) 的集合,即 xy 面上以 $(0,0)$ 为中心,1 为半径的圆上及其内部的点的集合.

空间直角坐标系

作相交于点 O(原点)并互相垂直的三根数轴(x, y, z 轴)便得空间直角坐标系,它是通常的 xy 平面的一个自然推广,而 xy 平面用来几何表示两个变量之间的函数关系. 三维空间的点用三元数组 (x, y, z) 表示,并称其为点的坐标. 在三维直角坐标系中 $z=f(x, y)$(或 $F(x, y, z)=0$)一般表示一个曲面.

例:满足 $z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ 的点 (x, y, z) 的集构成了以 $(0,0,0)$ 为中心、1 为半径的半球面.

对于二元以上的函数,这种几何解释将失效,尽管一些术语仍可被使用. 例如:(x, y, z, w) 是四维空间的点,$w=f(x, y, z)$(或 $F(x, y, z, w)=0$)表示四维空间中的超曲面;因而 $x^2+y^2+z^2+w^2=a^2$ 表示四维空间中以 $(0,0,0,0)$ 为中心、半径为 a 的超球面.

邻域

所有使得 $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$(其中 $\delta>0$)的点 (x, y) 的集合称为 (x_0, y_0) 的矩形 δ 邻域;而集合 $0<|x-x_0|<\delta, 0<|y-y_0|<\delta$(不包含点 (x_0, y_0))称为 (x_0, y_0) 的矩形去心 δ 邻域. 类似地可定义其他的邻域,如:$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$ 为 (x_0, y_0) 的圆形 δ 邻域.

如果点 (x_0, y_0) 的每一去心 δ 邻域都包含点集 S 的点,则称 (x_0, y_0) 为集 S 的极限点或聚点. 和在一维点集的情况一样,每一个有界的无穷点集至少有一个极限点(见 p.5 和 p.47

的魏尔斯特拉斯-波尔察诺定理). 一个点集如果包含它的所有极限点,则称其为一个闭集.

区域

如果点 P 属于点集 S,且存在 P 的一个去心 δ 邻域,其中的所有点都属于 S,则称 P 是 S 的一个内点. 如果点 P 不属于 S,且存在 P 的一个去心 δ 邻域使其中的所有点都不属于 S,则称 P 是 S 的一个外点. 如果点 P 的每一个去心 δ 邻域都既包含属于 S 的点又包含不属于 S 的点,则称 P 为 S 的边界点.

如果点集 S 中的任意两点可用由有限折线段组成的路径连结,且路径上的点都属于 S,则称 S 是一个连通集. 由内点或由内点和边界点组成的连通集称为区域. 而包含其所有边界点的区域称为闭区域,只有内点组成的区域称为开区域.

图 6-1(a),(b),(c)几何显示了几个区域的例子. 图 6-1(a)中包含边界的矩形区域表示点集:$a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d$,它是一维空间中闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 的自然推广. 而点集 $a<x<b, c<y<d$ 对应于不包含边界的矩形区域.

在图 6-1(a)和 6-1(b)所示的区域中,位于区域内部的任一简单闭曲线(与自身处处不相交)都能收缩成区域内的一点,这种区域称为单连通区域. 而在图 6-1(c)中,区域内环绕"空洞"的简单闭曲线 $ABCD$ 不离开区域不能收缩成一点,此类区域称为多连通区域.

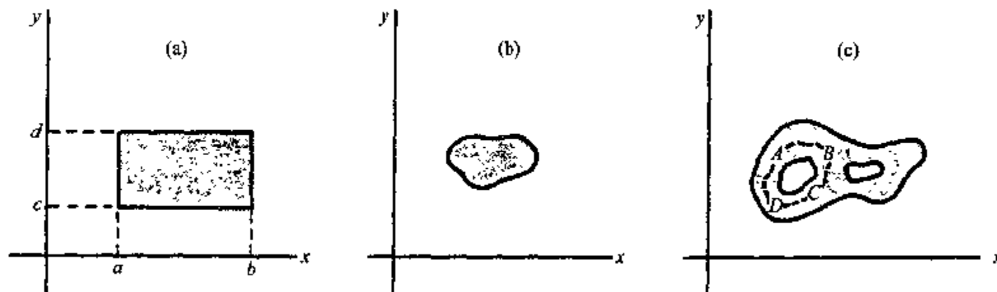


图 6-1

极限

设 $f(x, y)$在(x_0, y_0)的某去心 δ 邻域内有定义(即 $f(x, y)$在(x_0, y_0)处可无定义),如果对任一正数 ϵ,存在某个正数 δ(一般,依赖于 ϵ 和(x_0, y_0)),使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 且 $0<|y-y_0|<\delta$时有$|f(x, y)-l|<\epsilon$,则称 l 为 $f(x, y)$当 x 趋于x_0 且 y 趋于y_0(或(x, y)趋于(x_0, y_0))时的极限,记作$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=l$(或$\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)=l$).

如有必要,我们可用去心的圆形邻域 $0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$ 代替去心的矩形邻域.

例:设 $f(x, y)=\begin{cases}3xy, & (x, y)\neq(1,2),\\ 0, & (x, y)=(1, 2),\end{cases}$ 当 $x\to1$ 且 $y\to2$(或$(x, y)\to(1, 2)$)时,$f(x, y)$趋于 $3(1)\cdot(2)=6$,因此我们猜想$\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to2}} f(x, y)=6$. 为了证实这一点,我们必须证明:$f(x, y)$满足 $l=6$ 时的极限定义,这样的证明可用类似于习题 4 的方法得到.

注意:由于 $f(1, 2)=0$,所以$\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to2}} f(x, y)\neq f(1, 2)$. 事实上,即使 $f(x, y)$在$(1,2)$处无定义,该极限仍为 6. 因此,$f(x, y)$当$(x, y)\to(x_0, y_0)$时极限的存在性与 $f(x, y)$在(x_0, y_0)处函数值的存在性毫无关系.

需要注意的是:为了使极限$\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$存在,不管$(x, y)$以何种方式趋于$(x_0, y_0)$,该极限必须有相同的值. 由此推出,如果两种不同的趋向方式给出不同的值,那么极限就不存在(见习题 7). 这意味着,与一元函数的情形一样,如果极限存在,则极限必是惟一的.

一元函数单侧极限的概念可容易推广到多元函数.

例 1：$\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to1}}\arctan(y/x)=\pi/2$，$\lim\limits_{\substack{x\to0^-\\y\to1}}\arctan(y/x)=-\dfrac{\pi}{2}$.

例 2：显然，例 1 中两种不同的趋向方式给出不同的结果，故$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\arctan(y/x)$不存在.

一般来说，针对一元函数的有关极限的定理、无穷大的概念等内容(见 p.22)，作适当修改后便可应用于多元函数.

累次极限

累次极限$\lim\limits_{x\to x_0}\{\lim\limits_{y\to y_0}f(x,\ y)\}$和$\lim\limits_{y\to y_0}\{\lim\limits_{x\to x_0}f(x,\ y)\}$，(也可分别记为$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,\ y)$和$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,\ y)$)不一定相等. 尽管如果$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,\ y)$存在，则上述累次极限必定相等，但这两个累次极限相等并不能保证极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,\ y)$存在.

例：如果$f(x,\ y)=\dfrac{x-y}{x+y}$，则$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{x-y}{x+y}=\lim\limits_{x\to0}(1)=1$且$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-y}{x+y}=\lim\limits_{y\to0}(-1)=-1$. 因此，累次极限不相等. 因而$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,\ y)$不存在.

连续性

设$f(x,\ y)$在$(x_0,\ y_0)$的某个δ邻域内有定义(即$f(x,\ y)$在$(x_0,\ y_0)$及其附近有定义). 如果对任一正数ϵ，存在某个正数δ(一般依赖于ϵ和$(x_0,\ y_0)$)，使得当$|x-x_0|<\delta$且$|y-y_0|<\delta$时，有$|f(x,\ y)-f(x_0,\ y_0)|<\epsilon$，则称$f(x,\ y)$在$(x_0,\ y_0)$处连续. 注意：要使$f(x,\ y)$在$(x_0,\ y_0)$处连续，必须满足三个条件：

1. $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)}f(x,\ y)=l$，即当$(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)$时极限存在；
2. $f(x_0,\ y_0)$必须存在，即$f(x,\ y)$在$(x_0,\ y_0)$有定义；
3. $l=f(x_0,\ y_0)$.

如有需要，也可用富有启发性的形式$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,\ y)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x,\ \lim\limits_{y\to y_0}y)$表示$f(x,\ y)$在$(x_0,\ y_0)$处连续.

例：如果$f(x,\ y)=\begin{cases}3xy, & (x,\ y)\neq(1,2),\\ 0, & (x,\ y)=(1,\ 2),\end{cases}$ 则$\lim\limits_{(x,\ y)\to(1,\ 2)}f(x,\ y)=6\neq f(1,\ 2)$，因而$f(x,\ y)$在(1,2)处不连续. 如果重新定义函数，使$(x,\ y)=(1,\ 2)$时$f(x,\ y)=6$，则该函数在(1,2)处连续.

如果函数在点$(x_0,\ y_0)$不连续，则称其在$(x_0,\ y_0)$处间断，点$(x_0,\ y_0)$称为间断点. 如果能和上面的例子中的情形一样，通过重新定义函数在间断点处的值使新的函数连续，则称该点为原有函数的可去间断点. 如果函数在xy平面上的区域$\mathscr{R}$中的每一点处连续，则称该函数在$\mathscr{R}$上连续.

一元函数有关连续性的大多数定理，作适当修改后，均可推广到多元函数.

一致连续性

在函数$f(x,\ y)$于点$(x_0,\ y_0)$处连续的定义中，δ一般既依赖于ϵ，也依赖于$(x_0,\ y_0)$. 如果存在这样的δ，它只依赖于ϵ，而不依赖于区域$\mathscr{R}$中任一特定的点$(x_0,\ y_0)$(即同一δ适用于$\mathscr{R}$中的所有点)，则称$f(x,\ y)$在区域$\mathscr{R}$中一致连续. 与一元函数的情形一样，可以证明：有界闭区域上的连续函数在该区域内一致连续.

偏导数

如果多元函数只让它的一个自变量变化，而让其余的自变量保持不变，则函数对这个自变

量的普通导数称为多元函数对该自变量的偏导数. $f(x, y)$相对于 x 和 y 的偏导数分别记为 $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\text{或 } f_x,\ f_x(x, y),\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y\right)$和$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\text{或 } f_y,\ f_y(x, y),\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x\right)$,后面的记号用于需要突出保持不变的自变量的场合.

根据定义,当下列极限存在时,有

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)}{\Delta x},\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)}{\Delta y}. \tag{1}$$

在特定点(x_0, y_0)处的偏导数的计算常分别由$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,\ y_0)}=f_x(x_0,\ y_0)$和$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,\ y_0)}=f_y(x_0,\ y_0)$给出.

例:如果 $f(x, y)=2x^3+3xy^2$,则 $f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2+3y^2$ 且 $f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=6xy$. 因此,$f_x(1, 2)=6(1)^2+3(2)^2=18$, $f_y(1, 2)=6(1)(2)=12$.

如果函数 f 在一个区域内有连续的偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$,则 f 在该区域内必连续. 但仅有这些偏导数的存在性并不能保证 f 的连续性(见习题 9).

高阶偏导数

如果 $f(x, y)$在某区域内的每点处都有偏导数,则$\partial f/\partial x$ 和$\partial f/\partial y$ 也是 x 和 y 的函数,从而也可以有偏导数. 这些二阶偏导数记为:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx},\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{yx},\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{xy}. \tag{2}$$

如果 f_{xy}和f_{yx}连续,则 $f_{xy}=f_{yx}$,因而与求导次序无关;否则这两个偏导数可能会不相等(见习题 13 和 43).

例:若 $f(x, y)=2x^3+3xy^2$(见前例),则 $f_{xx}=12x$, $f_{yy}=6x$, $f_{xy}=6y=f_{yx}$. 此时 $f_{xx}(1, 2)=12$, $f_{yy}(1, 2)=6$, $f_{xy}(1, 2)=f_{yx}(1, 2)=12$.

用类似的方法可定义更高阶的偏导数. 例如,$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=f_{yxx}$就是$f$ 相对于 y 求一次、再相对于 x 求二次的偏导数.

微分

设 $\Delta x=dx$ 和 $\Delta y=dy$ 分别是 x 和 y 的给定的增量,则

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)=\Delta f \tag{3}$$

称为 $z=f(x, y)$的增量. 如果 $f(x, y)$在某区域内有连续的一阶偏导数,那么

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy+\varepsilon_1 dx+\varepsilon_2 dy=\Delta f, \tag{4}$$

其中 ε_1 和 ε_2 当 Δx 和 Δy 趋于零时都趋于零(见习题 14). 表达式

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \text{ 或 } df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{5}$$

称为 z 或f 的全微分,简称为 z 或f 的微分,或称为 Δz 或 Δf 的主部. 注意:一般来说,$\Delta z\neq dz$. 但如果 $\Delta x=dx$ 和 $\Delta y=dy$“很小”,则 dz 与 Δz 近似相等(见习题 15). 量 dx 和dy 分别

称为 x 和 y 的微分，此时，不必要求它们很小.

如果 f 的增量 Δf（或 Δz）能表示成形如(4)的形式，其中 ε_1 和 ε_2 当 Δx 和 Δy 趋于零时都趋于零，则称 f 在 (x, y) 处可微. 但仅有 f_x 和 f_y 的存在并不能保证 f 可微；而当 f_x 和 f_y 连续时，f 必可微（尽管这个条件比必要条件稍强一点）. 当 f_x 和 f_y 在区域 $\mathscr{R}$ 内连续时，就称 f 在 $\mathscr{R}$ 内连续可微.

有关微分的定理

在下面，我们将假设所有函数在区域 $\mathscr{R}$ 内都有连续的一阶偏导数，即所有函数在 $\mathscr{R}$ 内都连续可微.

1. 如果 $z=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n. \tag{6}$$

上式无论 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是自变量还是依赖于其他变量的中间变量都是成立的（见习题 20）. 这是(5)式的推广. 在(6)式中常用 z 来代替 f.

2. 如果 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=c$，$c$ 为一常数，则 $df=0$. 注意：此时 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 并不全是独立变量.

3. 表达式 $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ 或简写为 $Pdx+Qdy$ 是函数 $f(x, y)$ 的微分当且仅当 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. 此时 $Pdx+Qdy$ 称为恰当微分.

4. 表达式 $P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz$ 或简写为 $Pdx+Qdy+Rdz$ 是函数 $f(x, y, z)$ 的微分当且仅当 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$. 此时 $Pdx+Qdy+Rdz$ 称为恰当微分.

定理 3 和 4 的证明最好是利用稍后章节中的方法给出（见第十章中习题 13 和 30）.

复合函数的求导法则

设 $z=f(x, y)$，其中 $x=g(r, s)$，$y=h(r, s)$，所以 z 成为 r 和 s 的函数，则

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}. \tag{7}$$

一般地，如果 $u=F(x_1, \cdots, x_n)$，其中 $x_1=f_1(r_1, \cdots, r_p), \cdots, x_n=f_n(r_1, \cdots, r_p)$，则

$$\frac{\partial u}{\partial r_k} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial r_k} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial r_k} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial r_k}, \ k = 1, 2, \cdots, p. \tag{8}$$

特别地，当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 只依赖于一个变量 s 时，有

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial s} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial s}. \tag{9}$$

这些结果，常称为链法则，用于将相对于一组变量的偏导数转换成相对于另一组变量的偏导数.

重复应用链法则便可得到复合函数的高阶偏导数.

齐次函数的欧拉(Euler)定理

如果存在某个常数 p，对参数 λ 的任一值有等式：

$$F(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n) = \lambda^p F(x_1, x_2, \cdots, x_n), \tag{10}$$

则称函数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是 p 次齐次的.

例:由于 $F(\lambda x, \lambda y)=(\lambda x)^4+2(\lambda x)(\lambda y)^3-5(\lambda y)^4=\lambda^4(x^4+2xy^3-5y^4)$
$=\lambda^4 F(x, y)$,

故 $F(x, y)=x^4+2xy^3-5y^4$ 是 4 次齐次的.

齐次函数的欧拉定理可叙述如下:如果 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是 p 次齐次的,则(见习题 25)

$$x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1}+x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2}+\cdots+x_n \frac{\partial F}{\partial x_n}=pF. \tag{11}$$

隐函数

通常,方程 $F(x, y, z)=0$ 确定了其中的一个变量,比方说是 z,为其他两个变量 x 和 y 的函数. 有时就称 z 为 x 和 y 的隐函数,以便与所谓的显函数 f 相区别,其中的 $z=f(x, y)$ 满足 $F[x, y, f(x, y)]\equiv 0$.

只要牢记住因变量和自变量,就不难求出隐函数的导数.

雅可比(Jacobi)式

如果 $F(u, v)$和 $G(u, v)$在某区域内可微,则 F 和 G 相对于 u 和 v 的雅可比行列式,或简称为雅可比式,是由下式定义的二阶函数行列式:

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}. \tag{12}$$

类似地,三阶行列式

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, w)}=\begin{vmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{vmatrix} \tag{13}$$

称为 F, G, H 相对于 u, v, w 的雅可比式. 很容易作出进一步的推广.

使用雅可比式的偏导数

在求隐函数的偏导数时,雅可比式常常是非常有用的. 例如,给定联立方程

$$F(x, y, u, v)=0,\ G(x, y, u, v)=0.$$

一般,可将 u 和 v 看作 x 和 y 的函数. 此时,我们有(见习题 31)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}},\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u,\ )}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}}.$$

容易地将此思想进行推广. 如考虑下面的联立方程

$$F(u, v, w, x, y)=0,\ G(u, v, w, x, y)=0,\ H(u, v, w, x, y)=0,$$

不妨将 u, v 和 w 看作 x 和 y 的函数. 此时

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, v, w)}}{\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, w)}},\ \frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, y)}}{\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, w)}}.$$

对其余的偏导数也有类似的结果(见习题 33).

有关雅可比式的定理

在下面,我们假定所有的函数都是连续可微的.

1. 能从方程 $F(u, v, x, y, z)=0, G(u, v, x, y, z)=0$ 中解出 u 和 v 的充要条件是:$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}$在区域 $\mathscr{R}$ 内不恒为零.

对 m 个方程 n 个变量的情形(其中 $m<n$)也有类似的结果.

2. 如果 x 和 y 是 u 和 v 的函数,而 u 和 v 是 r 和 s 的函数,则(见习题 45)

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)}=\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)}, \tag{14}$$

这是关于雅可比式的链法则的一个例子,这些思想也能普遍化(例如,见习题 114 和 116).

3. 如果 $u=f(x, y), v=g(x, y)$,则 u 和 v 之间存在形如 $\phi(u, v)=0$ 的函数关系的充要条件是:$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$恒为零. 对 n 个 n 元函数也有类似的结果.

在第七章中,我们将应用向量对雅可比式进行进一步的讨论.

变换

一般来说,方程组

$$\begin{cases}x=F(u, v), \\ y=G(u, v)\end{cases} \tag{15}$$

确定了一个变换或映射,该变换建立了 uv 平面上的点与 xy 平面上的点之间的对应关系. 如果 uv 平面上的每一点都对应于 xy 平面上的惟一的一点,反之亦然,那么我们就说这个变换式映射是一对一的. 当 F 和 G 在某区域内连续可微且雅可比式不恒等于零时,(15)确定的变换是一对一的. 在此情况下(除非另加说明,总作如此假定),称方程(15)确定了一个连续可微的变换式映射.

一般情况下,变换(15)将 xy 平面上的闭区域 $\mathscr{R}$ 映射成 uv 平面上的闭区域 $\mathscr{R}'$. 因此,如果 ΔA_{xy}、ΔA_{uv} 分别表示这些区域的面积. 那么可以证明

$$\lim \frac{\Delta A_{xy}}{\Delta A_{uv}}=\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|, \tag{16}$$

其中 lim 表示当 ΔA_{xy}(或 ΔA_{uv})趋于零时所取得的极限. (16)式右边的雅可比式常称为变换(15)的雅可比式.

如果借助于 x 和 y 能从(15)式中解出 u 和 v. 便得变换 $u=f(x, y), v=g(x, y)$,这个变换常称为相应于(15)式的逆变换. 两个变换的雅可比式$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$和$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$互为倒数(见习题 45). 因此,如果其中的一个雅可比式在某区域内不为零,则另一个雅可比式在相应的区域内也不为零.

上述概念可推广到三维以上空间中的变换. 我们将在第七章中进一步讨论这个课题,并将利用向量符号加以简化、作出解释.

曲线坐标

如果(x, y)是 xy 平面上一点的直角坐标,那么也可将(u, v)认为是同一点的指定坐标,因为在已知(u, v)的情况下,由(15)式便可确定(x, y). 坐标(u, v)称为该点的曲线坐标.

例:一点的极坐标(ρ, ϕ)对应于 $u=\rho, v=\phi$. 此时,变换方程(15)就是 $x=\rho\cos\phi, y=\rho\sin\phi$.

而更高维空间中的曲线坐标参见第七章.

中值定理

1. 第一中值定理. 如果 $f(x, y)$ 在某闭区域内连续且在开区域(不包含边界点)内一阶偏导数存在,则

$$
\begin{aligned}
& f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \\
= & h f_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k f_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k), \ 0 < \theta < 1. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

有时,其中的 h, k 也写成 $h = \Delta x = x - x_0, k = \Delta y = y - y_0$.

2. 泰勒中值定理. 如果 $f(x, y)$ 的所有 n 阶偏导数在某闭区域内连续,而在开区域内存在 $n+1$ 阶偏导数,则

$$
\begin{aligned}
f(x_0 + h, y_0 + k) = & f(x_0, y_0) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) \\
& + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots \\
& + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) + R_n, \qquad (18)
\end{aligned}
$$

其中 n 项后的余项 R_n 由下式给出:

$$
R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k), 0 < \theta < 1, \qquad (19)
$$

而使用的算子符号分别表示:

$$
\begin{aligned}
& \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) \equiv h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0), \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) \\
& \equiv \left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x_0, y_0) \\
& \equiv h^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2hk f_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f_{yy}(x_0, y_0), \qquad (20)
\end{aligned}
$$

等等,这里的 $\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$ 形式地按二项式定理展开.

方程(18)中的 h 和 k 有时可写成: $h = \Delta x = x - x_0, k = \Delta y = y - y_0$. 注意:(17)式是(18)式当 $n = 0$ 时的特殊情形.

当对区域内的任一点 (x, y) 有 $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = 0$ 时,利用泰勒中值定理便可得到一无穷级数,该级数是 $f(x, y)$ 按 $x - x_0$ 及 $y - y_0$ 的次幂的展开式并在对应的区域内收敛. 该区域称为收敛域,而级数称为两个变量的泰勒级数. 可将上述结果推广到三个以上变量的情形.

习题与解答

函数与图形

1. 设 $f(x, y) = x^3 - 2xy + 3y^2$,求:

(a) $f(-2, 3)$;　　(b) $f\left(\frac{1}{x}, \frac{2}{y}\right)$;　　(c) $\frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$, $k \neq 0$.

解 ☞ (a) $f(-2, 3) = (-2)^3 - 2(-2)(3) + 3(3)^2 = -8 + 12 + 27 = 31$.

(b) $f\left(\frac{1}{x},\ \frac{2}{y}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^3-2\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{y}\right)+3\left(\frac{2}{y}\right)^2=\frac{1}{x^3}-\frac{4}{xy}+\frac{12}{y^2}$.

(c) $$\frac{f(x,\ y+k)-f(x,\ y)}{k}=\frac{1}{k}\{[x^3-2x(y+k)+3(y+k)^2]-[x^3-2xy+3y^2]\}$$

$$=\frac{1}{k}(x^3-2xy-2kx+3y^2+6yk+3k^2-x^3+2xy-3y^2)$$

$$=\frac{1}{k}(-2kx+6ky+3k^2)=-2x+6y+3k.$$

2. 给出下列每个函数有定义且取实值的定义域,并对定义域作几何说明.

(a) $f(x,\ y)=\ln\{(16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)\}$.

解 对满足$(16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)>0$,即$4<x^2+y^2<16$的所有点$(x,\ y)$,该函数均有定义且取实值,故所求定义域为:$4<x^2+y^2<16$. 这个点集由所有位于以原点为中心、4为半径的圆的内部同时又位于以原点为中心、2为半径的圆的外部的点组成. 对应的区域如图6-2所示,是一个开区域.

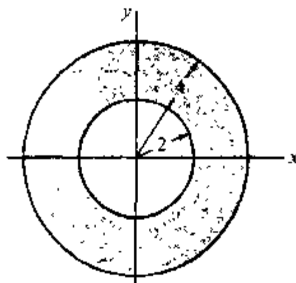


图 6-2

(b) $f(x,\ y)=\sqrt{6-(2x+3y)}$.

解 对所有满足$2x+3y\leqslant 6$的点$(x,\ y)$,该函数都有定义且取实值,故所求的定义域为:$2x+3y\leqslant 6$.

xy平面上对应的(无界)区域如图6-3所示.

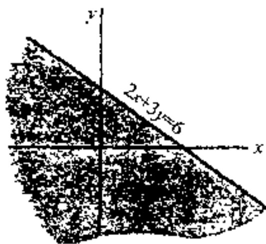


图 6-3

3. 指出下列方程在三维空间中所表示的曲面的名称并画出草图:

(a) $2x+4y+3z=12$.

解 由于曲面在xy平面$(z=0)$上的截痕为直线:$x+2y=6,\ z=0$;在yz平面$(x=0)$上的截痕为直线:$4y+3z=12,\ x=0$;在xy平面$(y=0)$上的截痕为直线:$2x+3z=12, y=0$,在图6-4中分别由AB, BC和AC表示. 因此,该方程表示一个与$x,\ y,\ z$轴相交于点$A(6,0,0)$、$B(0,3,0)$、$C(0,0,4)$的平面. 长度$\overline{OA}=6,\ \overline{OB}=3,\ \overline{OC}=4$分别称为平面　在$x,\ y,\ z$轴上的截距.

(b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

解 由于曲面在xy平面$(z=0)$上的截痕是椭圆:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0$;在$yz$平面$(x=0)$上的截痕是双曲线:$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=0$;在$xz$平面$(y=0)$上的截痕是双曲线:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, y=0$;而在任一平行于$xy$平面的平面上的截痕为椭圆$\frac{x^2}{a^2(1+p^2/c^2)}+\frac{y^2}{b^2(1+p^2/c^2)}=1$,且随着$|p|$由零变大,椭圆形截口也不断增大. 因此,该方程表示一个单叶双曲面(见图6-5).

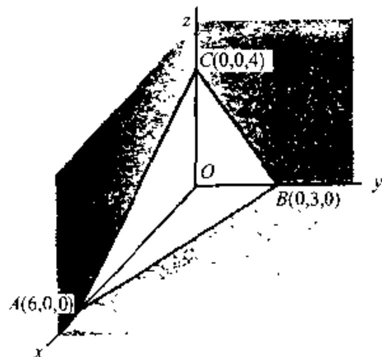


图 6-4

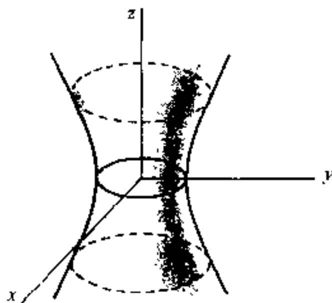


图 6-5

极限与连续

4. 证明$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(x^2+2y)=5$.

证明 证法1　利用极限定义.

要证:任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-1|<\delta,0<|y-2|<\delta$ 时,有 $|x^2+2y-5|<\varepsilon$.

如果 $0<|x-1|<\delta$ 且 $0<|y-2|<\delta$,则 $1-\delta<x<1+\delta$ 且 $2-\delta<y<2+\delta(x=1,\ y=2$ 除外).

由此,$1-2\delta+\delta^2<x^2<1+2\delta+\delta^2$ 且 $4-2\delta<2y<4+2\delta$. 相加得,$5-4\delta+\delta^2<x^2+2y<5+4\delta+\delta^2$ 或 $-4\delta+\delta^2<x^2+2y-5<4\delta+\delta^2$.

现假设 $\delta\leqslant 1$,则由此推出 $-5\delta<x^2+2y-5<5\delta$,即当 $0<|x-1|<\delta,0<|y-2|<\delta$ 时,$|x^2+2y-5|<5\delta$. 因而选取 $5\delta=\varepsilon$,即 $\delta=\varepsilon/5$(或 $\delta=1$,取两个中较小的一个),则当 $0<|x-1|<\delta,0<|y-2|<\delta$ 时,有 $|x^2+2y-5|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(x^2+2y)=5$.

证法2　利用极限定理.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(x^2+2y)=\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}x^2+\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}2y=1+4=5.$$

5. 证明:$f(x,\ y)=x^2+2y$ 在$(1,2)$处连续.

证明 由习题4,$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}f(x,\ y)=5$. 又 $f(1,\ 2)=1^2+2(2)=5$. 则$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}f(x,\ y)=f(1,\ 2)$,故该函数在$(1,\ 2)$处连续. 或者,用与习题4的第一种证法几乎完全相同的方法可以证明:任给 $\varepsilon>0$,可找到 $\delta>0$,使得当 $|x-1|<\delta,|y-2|<\delta$ 时,有 $|f(x,\ y)-f(1,\ 2)|<\varepsilon$.

6. 确定 $f(x,\ y)=\begin{cases}x^2+2y, & (x,\ y)\neq(1,2),\\ 0, & (x,\ y)=(1,\ 2)\end{cases}$

(a) 当 $x\to 1,y\to 2$ 时极限是否存在,

(b) 在$(1,2)$处是否连续.

解 (a) 由于所求极限与函数在$(1,2)$处的值无关,故由习题4得$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}f(x,\ y)=5$.

(b) 由于$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}f(x,\ y)=5$,而 $f(1,\ 2)=0$,故$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}f(x,\ y)\neq f(1,\ 2)$,因此,该函数在$(1,\ 2)$处间断.

7. 讨论 $f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,\ y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,\ y)=(0,0)\end{cases}$,在$(0,0)$处的连续性.

解 设$(x,\ y)$沿路径 $y=mx$(xy 平面上的直线)趋于$(0,0)$,则沿该直线有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)}=\frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

由于函数的极限依赖于趋于$(0,0)$的方式(即直线的斜率 m),故该函数在$(0,0)$处不连续.

另一种解法:

由于$\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$ 与$\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right\}=-1$ 不相等,故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在,于是,$f(x,y)$在$(0,0)$处不连续.

偏导数

8. 假如 $f(x,y)=2x^2-xy+y^2$,直接由定义求其在(x_0,y_0)处的偏导数(a)$\partial f/\partial x$,(b)$\partial f/\partial y$.

解 (a)$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[2(x_0+h)^2-(x_0+h)y_0+y_0^2]-[2x_0^2-x_0y_0+y_0^2]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4hx_0+2h^2-hy_0}{h}=\lim_{h\to 0}(4x_0+2h-y_0)=4x_0-y_0.$$

(b) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,\,y_0)}=f_y(x_0,\,y_0)=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{f(x_0,\,y_0+k)-f(x_0,\,y_0)}{k}$

$$=\lim_{k\to0}\frac{[2x_0^2-x_0(y_0+k)+(y_0+k)^2]-[2x_0^2-x_0y_0+y_0^2]}{k}$$

$$=\lim_{k\to0}\frac{-kx_0+2ky_0+k^2}{k}=\lim_{k\to0}(-x_0+2y_0+k)=-x_0+2y_0.$$

由于上述两个极限对所有的点$(x_0,\,y_0)$都存在,故能写成 $f_x(x,\,y)=f_x=4x-y$,$f_y(x,\,y)=-x+2y$,它们自身也是x,y的函数.

注意:$f_x(x_0,\,y_0)$形式上可通过保持y不变、对$f(x,\,y)$关于x求导并令$x=x_0,y=y_0$获得. 类似地,$f_y(x_0,\,y_0)$可通过保持x不变、对$f(x,\,y)$关于y求导来获得. 尽管这种做法在实践中常常十分方便,但并不总是能得到正确结果(见习题9). 如果偏导数连续,那么上述做法就是可行的.

9. 设 $f(x,\,y)=\begin{cases}xy/(x^2+y^2), & (x,\,y)\neq(0,0),\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 证明:(a)$f_x(0,\,0)$与$f_y(0,\,0)$均存在,但(b)$f(x,\,y)$在$(0,0)$处间断.

解 (a) $f_x(0,\,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,\,0)-f(0,\,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{0}{h}=0$,

$f_y(0,\,0)=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{f(0,\,k)-f(0,\,0)}{k}=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{0}{k}=0.$

(b) 设$(x,\,y)$沿xy平面上的直线$y=mx$趋于$(0,0)$,则$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,\,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\dfrac{m}{1+m^2}$,所以极限依赖于$(x,\,y)$趋于$(0,0)$的方式,因此该极限不存在. 从而,$f(x,\,y)$在$(0,0)$处不连续.

注意:与一元函数的情况不同的是,多元函数在一点处的一阶偏导数存在并不意味着这函数在该点处连续.

还要注意的是:如果$(x,\,y)\neq(0,0)$,则 $f_x=\dfrac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}$,$f_y=\dfrac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$,且$f_x(0,\,0)$,$f_y(0,\,0)$并不能仅仅在这两个表达式中令$x=0,y=0$得出. 参见第四章习题5(b)末的说明.

10. 假如 $\phi(x,\,y)=x^3y+e^{xy^2}$,求:(a) ϕ_x,(b) ϕ_y,(c) ϕ_{xx},(d) ϕ_{yy},(e) ϕ_{xy},(f) ϕ_{yx}.

解 (a) $\phi_x=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(x^3y+e^{xy^2})=3x^2y+e^{xy^2}\cdot y^2=3x^2y+y^2e^{xy^2}$.

(b) $\phi_y=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(x^3y+e^{xy^2})=x^3+e^{xy^2}\cdot2xy=x^3+2xye^{xy^2}$.

(c) $\phi_{xx}=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2y+y^2e^{xy^2})=6xy+y^2(e^{xy^2}\cdot y^2)=6xy+y^4e^{xy^2}$.

(d) $\phi_{yy}=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}(x^3+2xye^{xy^2})=0+2xy\cdot\dfrac{\partial}{\partial y}(e^{xy^2})+e^{xy^2}\dfrac{\partial}{\partial y}(2xy)$

$=2xy\cdot e^{xy^2}\cdot2xy+e^{xy^2}\cdot2x=4x^2y^2e^{xy^2}+2xe^{xy^2}$.

(e) $\phi_{xy}=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}(3x^2y+y^2e^{xy^2})=3x^2+y^2\cdot e^{xy^2}\cdot2xy+e^{xy^2}\cdot2y$

$=3x^2+2xy^3e^{xy^2}+2ye^{xy^2}$.

(f) $\phi_{yx}=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}(x^3+2xye^{xy^2})=3x^2+2xye^{xy^2}\cdot y^2+e^{xy^2}\cdot2y$

$=3x^2+2xy^3e^{xy^2}+2ye^{xy^2}$.

注意:在本题中$\phi_{xy}=\phi_{yx}$. 这是由于在某区域$\mathscr{R}$内的所有点$(x,\,y)$处,二阶偏导数均存在且连续. 当这一条件不满足时,可能有$\phi_{xy}\neq\phi_{yx}$(例子可见习题43).

11. 验证 $U(x,\,y,\,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$满足拉普拉斯(Laplace)偏微分方程:$\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}+$

$\dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0.$

证明 ☞ 我们在此假设$(x, y, z)\neq(0,0,0)$. 则

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\cdot 2x=-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}[-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}]$$

$$=(-x)\left[-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\cdot 2x\right]+(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\cdot(-1)$$

$$=\frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}-\frac{(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y+z)^{5/2}}.$$

类似地,有$\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\dfrac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$, $\dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\dfrac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$. 相加,便得$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0$.

12. 假如 $z=x^2\arctan\dfrac{y}{x}$, 在$(1,1)$处求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 ☞ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2\cdot\dfrac{1}{1+(y/x)^2}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x}\right)=x^2\cdot\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right)=\frac{(x^2+y^2)(3x^2)-x^3(2x)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\frac{2\cdot 3-1\cdot 2}{2^2}=1.$$

结果可写成 $z_{xy}(1, 1)=1$.

注意:在上面的计算中,我们利用了 z_{xy}在$(1,1)$处连续的事实(见习题9末尾的说明).

13. 假如$f(x, y)$在某区域$\mathscr{R}$内有定义,f_{xy}和f_{yx}在$\mathscr{R}$内存在且在$\mathscr{R}$中一点处连续,证明:在该点处,有 $f_{xy}=f_{yx}$.

证明 ☞ 设$\mathscr{R}$中的那点为(x_0, y_0),考虑

$$G=f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)+f(x_0, y_0),$$

定义(1) $\phi(x, y)=f(x+h, y)-f(x, y)$, (2) $\psi(x, y)=f(x, y+k)-f(x, y)$,

则(3) $G=\phi(x_0, y_0+k)-\phi(x_0, y_0)$, (4) $G=\psi(x_0+h, y_0)-\psi(x_0, y_0)$.

应用一元函数的中值定理(见 p.56)于(3)和(4),我们有

(5) $G=k\phi_y(x_0, y_0+\theta_1 k)=k\{f_y(x_0+h, y_0+\theta_1 k)-f_y(x_0, y_0+\theta_1 k)\}$, $0<\theta_1<1$,

(6) $G=h\psi_x(x_0+\theta_2 h, y_0)=h\{f_x(x_0+\theta_2 h, y_0+k)-f_x(x_0+\theta_2 h, y_0)\}$, $0<\theta_2<1$.

再对(5)和(6)应用中值定理,我们有

(7) $G=hkf_{yx}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_1 k)$, $0<\theta_1<1$, $0<\theta_3<1$,

(8) $G=hkf_{xy}(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_4 k)$, $0<\theta_2<1$, $0<\theta_4<1$.

由(7)和(8),得

(9) $f_{yx}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_1 k)=f_{xy}(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_4 k)$.

由于假定了 f_{xy}和f_{yx}在(x_0, y_0)处连续,在(9)中令 $h\to 0, k\to 0$,便得所证结果

$$f_{yx}(x_0, y_0)=f_{xy}(x_0, y_0).$$

关于上面等式不成立的例子,可参见习题43.

微分

14. 设$f(x, y)$在 xy 平面上的某区域$\mathscr{R}$内有连续的一阶偏导数,证明:

$$\Delta f=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)=f_x\Delta x+f_y\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y,$$

其中 ε_1 与 ε_2 当 Δx 和 Δy 趋于零时均趋于零.

证明 ☞ 应用一元函数的中值定理(见 p.56),得

$$\Delta f=\{f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y+\Delta y)\}+\{f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)\}$$
$$=\Delta x f_x(x+\theta_1\Delta x,\ y+\Delta y)+\Delta y f_y(x,\ y+\theta_2\Delta y),\ 0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1.$$

由于假定了 f_x 和 f_y 连续,故可推出

$$f_x(x+\theta_1\Delta x,\ y+\Delta y)=f_x(x,\ y)+\varepsilon_1,\ f_y(x,\ y+\theta_2\Delta y)=f_y(x,\ y)+\varepsilon_2,$$

其中 $\varepsilon_1\to 0,\varepsilon_2\to 0$(当 $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0$ 时).

因此,便得所求结果

$$\Delta f=f_x\Delta x+f_y\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y.$$

定义 $\Delta x=dx,\ \Delta y=dy$,得 $\Delta f=f_x dx+f_y dy+\varepsilon_1 dx+\varepsilon_2 dy$,

我们称 $df=f_x dx+f_y dy$ 为 f(或 z)的微分或 Δf(或 Δz)的主部.

15. 假如 $z=f(x,\ y)=x^2y-3y$,求:(a) Δz,(b) dz,(c) 当 $x=4,\ y=3,\ \Delta x=-0.01,\ \Delta y=0.02$ 时确定 Δz 和 dz.(d) 不通过直接计算怎样确定 $f(5.12,6.85)$?

解 ☞ (a) $\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$

$$=\{(x+\Delta x)^2(y+\Delta y)-3(y+\Delta y)\}-\{x^2y-3y\}$$
$$=\underbrace{2xy\Delta x+(x^2-3)\Delta y}_{(A)}+\underbrace{(\Delta x)^2y+2x\Delta x\Delta y+(\Delta x)^2\Delta y}_{(B)}$$

和式(A)就是 Δz 的主部和 z 的微分,即是 dz.因而

(b) $dz=2xy\Delta x+(x^2-3)\Delta y=2xydx+(x^2-3)dy$.

另一种解法为: $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=2xydx+(x^2-3)dy$.

(c) $\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)=f(4-0.01,\ 3+0.02)-f(4,\ 3)$

$=\{(3.99)^2(3.02)-3(3.02)\}-\{(4)^2(3)-3(3)\}=0.018702,$

$dz=2xydx+(x^2-3)dy=2(4)(3)(-0.01)+(4^2-3)(0.02)=0.02.$

注意:此处 Δz 和 dz 近似相等.这是由于 $\Delta x=dx$ 和 $\Delta y=dy$ 充分小的缘故.

(d) 要求当 $x+\Delta x=5.12$ 和 $y+\Delta y=6.85$ 时的 $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$,可通过选取 $x=5,\Delta x=0.12,\ y=7,\ \Delta y=-0.15$ 来完成.由于 Δx 和 Δy 较小,故我们便利用 $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)=f(x,\ y)+\Delta z$ 与 $f(x,\ y)+dz$,即 $z+dz$ 近似相等的事实来确定所求的值.

现在 $z=f(x,\ y)=f(5,\ 7)=(5)^2(7)-3(7)=154,$

$dz=2xydx+(x^2-3)dy=2(5)(7)(0.12)-(5^2-3)(-0.15)=5.1.$

因此,所求的值约为 $154+5.1=159.1$.而通过直接计算获得的该值为 159.01864.

16. (a) 设 $U=x^2e^{y/x}$,求 dU.(b) 证明 $(3x^2y-2y^2)dx+(x^3-4xy+6y^2)dy$ 为某函数 $\phi(x,\ y)$ 的恰当微分并求 $\phi(x,\ y)$.

解 ☞ (a) **解法 1:** 由于

$$\frac{\partial U}{\partial x}=x^2e^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)+2xe^{y/x},\ \frac{\partial U}{\partial y}=x^2e^{y/x}\left(\frac{1}{x}\right),$$

故 $dU=\dfrac{\partial U}{\partial x}dx+\dfrac{\partial U}{\partial y}dy=(2xe^{y/x}-ye^{y/x})dx+xe^{y/x}dy.$

解法 2:

$$dU=x^2d(e^{y/x})+e^{y/x}d(x^2)=x^2e^{y/x}d(y/x)+2xe^{y/x}dx$$
$$=x^2e^{y/x}\left(\frac{xdy-ydx}{x^2}\right)+2xe^{y/x}dx=(2xe^{y/x}-ye^{y/x})dx+xe^{y/x}dy.$$

(b) **解法 1:**

假设 $(3x^2y-2y^2)dx+(x^3-4xy+6y^2)dy=d\phi=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\phi}{\partial y}dy,$

则 (1) $\frac{\partial\phi}{\partial x}=3x^2y-2y^2$, (2) $\frac{\partial\phi}{\partial y}=x^3-4xy+6y^2$.

由(1)保持 y 不变并对 x 积分,得

$$\phi=x^3y-2xy^2+F(y),$$

其中 $F(y)$ 是积分“常数”,代入(2)得

$$x^3-4xy+F'(y)=x^3-4xy+6y^2\text{,由此得}$$

$$F'(y)=6y^2\text{,即 }F(y)=2y^3+C$$

因此,所有函数 $\phi=x^3y-2xy^2+2y^3+C$,其中 C 为任意常数.

注意:由于 $P=3x^2y-2y^2$, $Q=x^3-4xy+6y^2$,且 $\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2-4y=\frac{\partial Q}{\partial x}$. 故由 p.96 的定理 3 知,函数 $\phi(x, y)$ 一定存在. 而当 $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$ 时,这种函数便不存在且给定的表达式不是一个恰当微分.

解法 2:

$$\begin{aligned}(3x^2y-2y^2)dx+(x^3-4xy+6y^2)dy&=(3x^2ydx+x^3dy)-(2y^2dx+4xydy)+6y^2dy\\&=d(x^3y)-d(2xy^2)+d(2y^3)\\&=d(x^3y-2xy^2+2y^3)\\&=d(x^3y-2xy^2+2y^3+C),\end{aligned}$$

故所求函数 $\phi=x^3y-2xy^2+2y^3+C$.

这个方法称为凑微分法,它主要依赖于个人组合恰当微分的能力,而且没有第一种方法来得直接. 当然,只有在利用 p.96 的定理 3 确定给定的表达式是恰当微分之后,才能考虑用哪种方法去求 ϕ. 可参见解法 1 最后一段的说明.

复合函数的偏导数

17. 设 $z=f(x, y)$ 且 $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$,其中 f, ϕ, ψ 均可微. 证明:$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$.

证明 利用习题 14 的结果,得

$$\frac{dz}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t}+\varepsilon_2\frac{\Delta u}{\Delta t}\right\}.$$

由于当 $\Delta t\to 0$ 时,有 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, $\varepsilon_1\to 0$, $\varepsilon_2\to 0$, $\frac{\Delta x}{\Delta t}\to\frac{dx}{dt}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t}\to\frac{dy}{dt}$,

故
$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

18. 假如 $z=e^{xy^2}$, $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, 计算 $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$.

解 $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=(y^2e^{xy^2})(-t\sin t+\cos t)+(2xye^{xy^2})(t\cos t+\sin t)$.

当 $t=\pi/2$ 时, $x=0$, $y=\pi/2$, 故 $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=(\pi^2/4)(-\pi/2)+(0)(1)=-\pi^3/8$.

另一种解法:先将 x 和 y 代入 z 得 $z=e^{t^3\sin^2t\cos t}$ 再求导.

19. 假如 $z=f(x, y)$,其中 $x=\phi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$,证明:

(a) $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$, (b) $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$.

证明 (a) 假定 f, ϕ, ψ 可微,由习题 14 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u}&=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta u}+\varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta u}+\varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta u}\right\}\\&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}.\end{aligned}$$

(b) 在(a)中由 ΔU 代替 Δu 并令 $\Delta U\to 0$ 便得所证结果.

20. 证明:$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ 即使 x 和 y 是相关的变量也成立.

证明 ☞ 不妨设 x 和 y 依赖于三个变量 u, v, w,则

(1) $dx=x_u du+x_v dv+x_w dw$, (2) $dy=y_u du+y_v dv+y_w dw$.

利用习题 19 的显而易见的推广,便得

$$z_x dx+z_y dy=(z_x x_u+z_y y_u)du+(z_x x_v+z_y y_v)dv+(z_x x_w+z_y y_w)dw$$

$$=z_u du+z_v dv+z_w dw=dz.$$

21. 假如 $T=x^3-xy+y^3$, $x=\rho\cos\phi$, $y=\rho\sin\phi$,求:(a) $\partial T/\partial\rho$, (b) $\partial T/\partial\phi$.

解 ☞ $\frac{\partial T}{\partial\rho}=\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\rho}=(3x^2-y)(\cos\phi)+(3y^2-x)(\sin\phi)$

$$\frac{\partial T}{\partial\phi}=\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\phi}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\phi}=(3x^2-y)(-\rho\sin\phi)+(3y^2-x)(\rho\cos\phi).$$

这也可将 x 和 y 直接代入 T 再求导得出.

22. 假如 $U=z\sin y/x$,其中 $x=3r^2+2s$, $y=4r-2s^3$, $z=2r^2-3s^2$,
求:(a) $\partial U/\partial r$, (b) $\partial U/\partial s$.

解 ☞ (a) $\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$

$$=\left\{\left(z\cos\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right\}(6r)+\left\{\left(z\cos\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\right\}(4)+\left(\sin\frac{y}{x}\right)(4r)$$

$$=-\frac{6ryz}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{4z}{x}\cos\frac{y}{x}+4r\sin\frac{y}{x}.$$

(b) $\frac{\partial U}{\partial s}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$

$$=\left\{\left(z\cos\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right\}(2)+\left\{\left(z\cos\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\right\}(-6s^2)+\left(\sin\frac{y}{x}\right)(-6s)$$

$$=-\frac{2yz}{x^2}\cos\frac{y}{x}-\frac{6s^2z}{x}\cos\frac{y}{x}-6s\sin\frac{y}{x}.$$

23. 假如 $x=\rho\cos\phi$, $y=\rho\sin\phi$,证明 $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial V}{\partial\phi}\right)^2$.

证明 ☞ 利用偏导数的下标符号,得

$$V_\rho=V_x x_\rho+V_y y_\rho=V_x\cos\phi+V_y\sin\phi, \tag{1}$$

$$V_\phi=V_x x_\phi+V_y y_\phi=V_x(-\rho\sin\phi)+V_y(\rho\cos\phi). \tag{2}$$

等式(2)两边同除以 ρ,得

$$\frac{1}{\rho}V_\phi=-V_x\sin\phi+V_y\cos\phi. \tag{3}$$

于是,由(1)和(3)使得

$$V_\rho^2+\frac{1}{\rho^2}V_\phi^2=(V_x\cos\phi+V_y\sin\phi)^2+(-V_x\sin\phi+V_y\cos\phi)^2=V_x^2+V_y^2.$$

24. 设 $z=f(x^2y)$,而 f 可微,证明:

$$x(\partial z/\partial x)=2y(\partial z/\partial y).$$

证明 ☞ 设 $x^2y=u$,则 $z=f(u)$,因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\cdot 2xy,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=f'(u)\cdot x^2.$$

于是，$x\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot 2x^2y$，$2y\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\cdot 2x^2y$，

故　$x\frac{\partial z}{\partial x}=2y\frac{\partial z}{\partial y}$.

另一种解法：

由于　$$dz=f'(x^2y)d(x^2y)=f'(x^2y)(2xydx+x^2dy),$$

又　$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

则　$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xyf'(x^2y),\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^2f'(x^2y).$$

消去 $f'(x^2y)$便得　$x\frac{\partial z}{\partial x}=2y\frac{\partial z}{\partial y}$.

25. 如果有某个常数 p，使得对参数 λ 的一切值有 $F(\lambda x,\lambda y)=\lambda^pF(x,y)$，且 F 可微. 证明：
$$x(\partial F/\partial x)+y(\partial F/\partial y)=pF.$$

证明 ☞　设 $\lambda x=u$，$\lambda y=v$，则
$$F(u,v)=\lambda^pF(x,y). \tag{1}$$

(1) 式左边关于 λ 的导数为
$$\frac{\partial F}{\partial\lambda}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\lambda}=\frac{\partial F}{\partial u}x+\frac{\partial F}{\partial v}y.$$

(1) 式右边关于 λ 的导数为 $p\lambda^{p-1}F$，故
$$x\frac{\partial F}{\partial u}+y\frac{\partial F}{\partial v}=p\lambda^{p-1}F. \tag{2}$$

在(2)式中令 $\lambda=1$，得 $u=x$，$v=y$，于是有
$$x(\partial F/\partial x)+y(\partial F/\partial y)=pF.$$

26. 假如 $F(x,y)=x^4y^2\arcsin y/x$，验证：$x(\partial F/\partial x)+y(\partial F/\partial y)=6F$.

证明 ☞　由于 $F(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^4(\lambda y)^2\arcsin\lambda y/\lambda x=\lambda^6x^4y^2\arcsin y/x=\lambda^6F(x,y)$，故由习题 25 便得所证结论($p=6$). 当然，也能通过直接求偏导数来验证.

27. 假设 f 和 g 至少二次可微，a 是任一常数.
证明：$Y=f(x+at)+g(x-at)$满足$\partial^2Y/\partial t^2=a^2(\partial^2Y/\partial x^2)$.

证明 ☞　设 $u=x+at$，$v=x-at$，则 $Y=f(u)+g(v)$. 因此，若 $f'(u)\equiv df/du$，$g'(v)\equiv dg/dv$，则有
$$\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}=af'(u)-ag'(v),$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f'(u)+g'(v)$$

再一次求导，并使用符号 $f''(u)\equiv d^2f/du^2$，$g''(v)\equiv d^2g/dv^2$，得

(1) $$\frac{\partial^2Y}{\partial t^2}=\frac{\partial Yt}{\partial t}=\frac{\partial Yt}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial Yt}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$$
$$=\frac{\partial}{\partial u}\{af'(u)-af'(v)\}(a)+\frac{\partial}{\partial v}(af'(u)-ag'(v)\}(-a)$$
$$=a^2f''(u)+a^2g''(v),$$

(2) $$\frac{\partial^2Y}{\partial x^2}=\frac{\partial Yx}{\partial x}=\frac{\partial Yx}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial Yx}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$=\frac{\partial}{\partial u}\{f'(u)+g'(v)\}+\frac{\partial}{\partial v}\{f'(u)+g'(v)\}=f''(u)+g''(v).$$

由(1)和(2),便得$\partial^2 Y/\partial t^2 = a^2(\partial^2 Y/\partial x^2)$.

28. 若 $x=2r-s$, $y=r+2s$,借助于对 r 和 s 的偏导数求$\dfrac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$.

解 ☞ 从 $x=2r-s, y=r+2s$ 中解出 r 和 s,得

$$r=(2x+y)/5,\ s=(2y-x)/5.$$

于是,$\dfrac{\partial r}{\partial x}=2/5, \dfrac{\partial s}{\partial x}=-1/5, \dfrac{\partial r}{\partial y}=1/5, \dfrac{\partial s}{\partial y}=2/5$.

从而,有

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{2}{5}\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{1}{5}\frac{\partial U}{\partial s},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2}{5}\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{1}{5}\frac{\partial U}{\partial s}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{2}{5}\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{1}{5}\frac{\partial U}{\partial s}\right)\frac{\partial s}{\partial y}$$

$$=\left(\frac{2}{5}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}-\frac{1}{5}\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial s}\right)\left(\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}\frac{\partial^2 U}{\partial s\partial r}-\frac{1}{5}\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{25}\left(2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+3\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial s}-2\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\right).$$

(这里,假定了 U 有连续的二阶偏导数).

隐函数与雅可比式

29. 设 $U=x^3y$,且(1) $x^5+y=t$, (2) $x^2+y^3=t^2$, 求 dU/dt.

解 ☞ 由于(1)和(2)确定了 x 和 y 为 t 的(隐)函数,故对 t 求导,得

(3) $5x^4(dx/dt)+dy/dt=1$, (4) $2x(dx/dt)+3y^2(dy/dt)=2t$.

从(3)和(4)的联立方程中解出 dx/dt 和 dy/dt,得

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2t & 3y^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5x^4 & 1\\ 2x & 3y^2\end{vmatrix}}=\frac{3y^2-2t}{15x^4y^2-2x},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{\begin{vmatrix}5x^4 & 1\\ 2x & 2t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5x^4 & 1\\ 2x & 3y^2\end{vmatrix}}=\frac{10x^4t-2x}{15x^4y^2-2x},$$

于是$\dfrac{dU}{dt}=\dfrac{\partial U}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial U}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}=(3x^2y)\left(\dfrac{3y^2-2t}{15x^4y^2-2x}\right)+(x^3)\left(\dfrac{10x^4t-2x}{15x^4y^2-2x}\right)$.

30. 假如 $F(x,y,z)=0$ 在 xy 平面上的某区域 $\mathscr{R}$ 内确定了 z 为 x 和 y 的一个隐函数,证明:

(a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-F_x/F_z$, (b) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-F_y/F_z$,(其中 $F_z\neq 0$).

证明 ☞ 由于 z 是 x 和 y 的函数,故 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$. 于是 $dF=\dfrac{\partial F}{\partial x}dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}dy+\dfrac{\partial F}{\partial z}dz=$ $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)dy=0$. 而 x 和 y 是自变量,故

(1) $\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$, (2) $\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$,

由此便得所需结果. 如果愿意的话,方程(1)和(2)也能直接求出.

31. 假如 $F(x,y,u,v)=0$,且 $G(x,y,u,v)=0$,求:(a) $\partial u/\partial x$,(b) $\partial u/\partial y$, (c) $\partial v/\partial x$, (d) $\partial v/\partial y$.

解 ☞ 一般地,这两个方程确定了因变量 u 和 v 为自变量 x 和 y 的(隐)函数,用下标符号,我们有

(1) $dF=F_xdx+F_ydy+F_udu+F_vdv=0$,

(2) $dG=G_xdx+G_ydy+G_udu+G_vdv=0$.

又因为 u 和 v 为 x 和 y 的函数,故

(3) $du = u_x dx + u_y dy$, (4) $dv = v_x dx + v_y dy$.

将(3)和(4)代入(1)和(2),得

(5) $dF = (F_x + F_u u_x + F_v v_x)dx + (F_y + F_u u_y + F_v v_y)dy = 0$,

(6) $dG = (G_x + G_u u_x + G_v v_x)dx + (G_y + G_u u_y + G_v v_y)dy = 0$.

由于 x 和 y 为自变量,故(5)和(6)中 dx 和 dy 的系数为零,因而可得

$$(7)\begin{cases} F_u u_x + F_v v_x = -F_x, \\ G_u u_x + G_v v_x = -G_x, \end{cases} \quad (8)\begin{cases} F_u u_y + F_v v_y = -F_y, \\ G_u u_y + G_v v_y = -G_y. \end{cases}$$

解(7)和(8),便得

$$(a)\ u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\quad (b)\ v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_x \\ G_u & -G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},$$

$$(c)\ u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} -F_y & F_v \\ -G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\quad (d)\ v_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_y \\ G_u & -G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}.$$

函数行列式 $\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$ 记为 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$ 或 $J\left(\dfrac{F,G}{u,v}\right)$,它是 F 和 G 关于 u 和 v 的雅可比式并假定其不等于零.

注意:只要想好记忆规则,便能利用雅可比式立即写出所求的偏导数(还可参见习题 33).

32. 假如 $u^2 - v = 3x + y$ 且 $u - 2v^2 = x - 2y$. 求:(a) $\partial u/\partial x$, (b) $\partial v/\partial x$, (c) $\partial u/\partial y$, (d) $\partial v/\partial y$.

解 解法 1:将 u 和 v 看作是 x 和 y 的函数,对给定的方程关于 x 求导,得

$$(1)\ 2u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 3,\quad (2)\ \frac{\partial u}{\partial x} - 4v\frac{\partial v}{\partial x} = 1.$$

解之,得 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1-12v}{1-8uv}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{2u-3}{1-8uv}$.

而关于 y 求导,得

$$(3)\ 2u\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 1,\quad (4)\ \frac{\partial u}{\partial y} - 4v\frac{\partial v}{\partial y} = -2.$$

解之,得 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-2-4v}{1-8uv}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{-4u-1}{1-8uv}$.

当然,我们假定了 $1-8uv \neq 0$.

解法 2:由于已知方程为:$F = u^2 - v - 3x - y = 0$, 及 $G = u - 2v^2 - x + 2y = 0$. 因此,若假定 $1-8uv \neq 0$,则由习题 31,得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -4v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -1 \\ 1 & -4v \end{vmatrix}} = \frac{1-12v}{1-8uv}.$$

其他的偏导数也可类似地获得.

33. 假如 $F(u,v,w,x,y)=0$, $G(u,v,w,x,y)=0$, $H(u,v,w,x,y)=0$. 求:(a) $\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_x$, (b) $\left.\dfrac{\partial x}{\partial v}\right|_u$, (c) $\left.\dfrac{\partial w}{\partial u}\right|_y$.

解 ☞　由含有 5 个变量的三个方程,我们能(至少是理论上)通过其中的 2 个变量来确定其余的 3 个变量. 因此,三个变量是因变量,2 个变量为自变量. 如果要确定$\partial v/\partial y$, 那么我们知道 v 是因变量,而 y 是自变量,但另一个自变量我们却并不知道. 不过,特殊记号$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x$ 帮着指明了我们是在保持 x 不变的情况下获得$\frac{\partial v}{\partial y}$的,即 x 为另一个自变量.

(a) 视 x 为常量,关于 y 对给定的方程求导,得

(1) $F_u u_y + F_v v_y + F_w w_y + F_y = 0$, (2) $G_u u_y + G_v v_y + G_w w_y + G_y = 0$,

(3) $H_u u_y + H_v v_y + H_w w_y + H_y = 0$.

从联立方程中解出 v_y,得

$$v_y = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y & F_w \\ G_u & G_y & G_u \\ H_u & H_y & H_w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial(F,\ G,\ H)}{\partial(u,\ y,\ w)}}{\dfrac{\partial(F,\ G,\ H)}{\partial(u,\ v,\ w)}}.$$

方程(1)、(2)、(3)也能像习题 31 中那样利用微分获得.

正如在本题和习题 31 中所看到的那样,雅可比法在要立即写出所需结果时是十分富于启发性的. 注意到计算$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x$ 的结果为:每个雅可比式的商的负数,其中分子包含自变量 y,而分母则在相应位置上包含因变量 v,利用这种组合,便有

(b) $\left.\dfrac{\partial x}{\partial v}\right|_w = -\dfrac{\dfrac{\partial(F,\ G,\ H)}{\partial(v,\ y,\ u)}}{\dfrac{\partial(F,\ G,\ H)}{\partial(x,\ y,\ u)}}$, (c) $\left.\dfrac{\partial w}{\partial u}\right|_y = -\dfrac{\dfrac{\partial(F,\ G,\ H)}{\partial(u,\ x,\ v)}}{\dfrac{\partial(F,\ G,\ H)}{\partial(w,\ x,\ v)}}$.

34. 假如 $z^3 - xz - y = 0$,证明:$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{3z^2 + x}{(3z^2 - x)^3}$.

证明 ☞　视 y 为常量并牢记 z 是依赖于自变量 x 和 y 的因变量,关于 x 求导,求得

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial x} - z = 0 \text{ 且 } (1)\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{3z^2 - x}.$$

视 x 为常量,关于 y 求导,求得

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0 \text{ 且 } (2)\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3z^2 - x}.$$

对(2)关于 x 求导并利用(1),得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{(3z^2 - x)^2}\left(6z\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right) = \frac{1 - 6z[z/(3z^2 - x)]}{(3z^2 - x)^2} = -\frac{3z^2 + x}{(3z^2 - x)^3}$$

这个结果也能通过对(1)关于 y 求导并利用(2)得到.

35. 设 $u = f(x,\ y)$且 $v = g(x,\ y)$,其中 f 和g 在某区域$\mathscr{R}$内连续可微. 证明:u 和 v 之间存在形如 $\phi(u,\ v) = 0$ 的函数关系的充要条件是雅可比式为零,即恒有$\dfrac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)} = 0$.

证明 ☞　**必要性**　我们要证:如果函数关系 $\phi(u,\ v) = 0$ 存在,则雅可比式$\dfrac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)} \equiv 0$. 为了做到这一点,我们注意到

$$\begin{aligned} d\phi &= \phi_u du + \phi_v dv = \phi_u(u_x dx + u_y dy) + \phi_v(v_x dx + v_y dy) \\ &= (\phi_u u_x + \phi_v v_x)dx + (\phi_u u_y + \phi_v v_y)dy = 0, \end{aligned}$$

故　(1) $\phi_u u_x + \phi_v v_x = 0$, (2) $\phi_u u_y + \phi_v v_y = 0$.

现 ϕ_u 和 ϕ_v 不能全为零,因为否则 u 和 v 便不存在函数关系,与假设矛盾. 由此,从(1)和(2)推出

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \equiv 0.$$

充分性　我们要证:如果雅可比式 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \equiv 0$,则 u 和 v 之间存在函数关系,即 $\phi(u, v)=0$.

先假设 $u_x=0$ 且 $u_y=0$. 此时,雅可比式恒为零且 u 是一个常数 C_1,故得到平凡的函数关系 $u=C_1$.

现假设 u_x 和 u_y 至少有一个不为零;为明确起见,假定 $u_x \neq 0$. 则根据 p.98 的定理 1,可从方程 $u=f(x, y)$ 中解出 x 得 $x=F(u, y)$,由此推出:

(1) $u=f\{F(u, y), y\}$, (2) $v=g\{F(u, y), y\}$.

于是,分别有

(3) $du=u_x dx+u_y dy=u_x(F_u du+F_y dy)+u_y dy=u_x F_u du+(u_x F_y+u_y)dy$,

(4) $dv=v_x dx+v_y dy=v_x(F_u du+F_y dy)+v_y dy=v_x F_u du+(v_x F_y+v_y)dy$.

由(3)得 $u_x F_u=1$ 且 $u_x F_y+u_y=0$ 或(5) $F_y=-u_y/u_x$. 利用此式,(4)变为

(6) $dv=v_x F_u du+\{v_x(-u_y/u_x)+v_y\}dy=v_x F_u du+\left(\frac{u_x v_y-u_y v_x}{u_x}\right)dy$.

但由假设 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=u_x v_y-u_y v_x \equiv 0$,故(6)又变成 $dv=v_x F_u du$. 这本质上意味着(2)的 $\frac{\partial v}{\partial y}=0$,也就是说 v 只依赖于 u 而与 y 无关,即 v 是 u 的函数,换句话说函数关系 $\phi(u, v)=0$ 的确存在.

36. (a) 若 $u=\frac{x+y}{1-xy}$ 且 $v=\arctan x+\arctan y$,求 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.

(b) u 和 v 有函数关系吗? 如有,求此关系.

解 (a) $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1+y^2}{(1-xy)^2} & \frac{1+x^2}{(1-xy)^2} \\ \frac{1}{1+x^2} & \frac{1}{1+y^2} \end{vmatrix}=0$ (如 $xy \neq 1$).

(b) 由于雅可比式在一个区域内恒为零,故由习题 35 题:u 和 v 之间必存在函数关系. 可以看出 $\tan v=u$,即 $\phi(u, v)=u-\tan v=0$. 我们能直接证明这一点,方法是:先从其中的一个方程中解出(比如说)x,再将其代入另一个方程. 例如,从 $v=\arctan x+\arctan y$,可求出 $\arctan x=v-\arctan y$,即

$$x=\tan(v-\arctan y)=\frac{\tan v-\tan(\arctan y)}{1+\tan v\tan(\arctan y)}=\frac{\tan v-y}{1+y\tan v}.$$

再将其代入 $u=(x+y)/(1-xy)$ 并加以简化得 $u=\tan v$.

37. (a) 设 $x=u-v+w$, $y=u^2-v^2-w^2$, $z=u^3+v$. 计算雅可比式 $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ 并(b)解释该雅可比式不为零的含义.

解 (a) $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2u & -2v & -2w \\ 3u^2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$=6wu^2+2u+6u^2v+2w.$$

(b) 如果该雅可比式在一个区域 $\mathscr{R}$ 内不为零,则在 $\mathscr{R}$ 内,借助于 x, y, z 便可从给定的方程中同时解出 u, v, w.

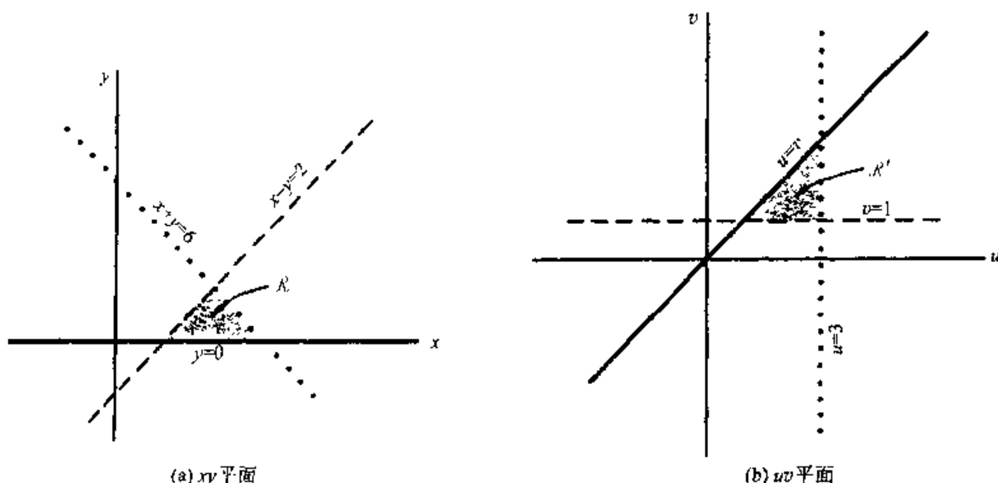
变换,曲线坐标

38. 设 xy 平面上的区域 $\mathscr{R}$ 由 $x+y=6$, $x-y=2$ 及 $y=0$ 围成(a)确定 uv 平面上的区域 $\mathscr{R}'$,

使得 $\mathscr{R}$ 在变换 $x=u+v, y=u-v$ 下映成 $\mathscr{R}'$.(b) 计算$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.(c) 将 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}'$ 的面积之比与(b)的结果作比较.

解 (a) 区域 $\mathscr{R}$ 如图 6-6(a)所示,是一个由直线 $x+y=6$, $x-y=2$ 及 $y=0$ 围成的三角形,为了便于区别,这三条直线分别以点线、虚线及粗线标出.

在给定的变换下,直线 $x+y=6$ 变换成$(u+v)+(u-v)=6$,即 $2u=6$ 或 $u=3$,这是 uv 平面上的一条直线(以点线标出),见图 6-6(b).



(a) xy 平面　(b) uv 平面

图 6-6

类似地,$x-y=2$ 成为$(u+v)-(u-v)=2$ 或 $v=1$,这是 uv 平面上的一条直线(以虚线标出).同样地,$y=0$ 成为 $u-v=0$ 或 $u=v$,它是 uv 平面上以粗线标出的一条直线.因此,所求的区域由 $u=3$, $v=1$ 及 $u=v$ 围成,如图 6-6(b)所示.

$$(b)\ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u+v)\\ \frac{\partial}{\partial u}(u-v) & \frac{\partial}{\partial v}(u-v)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2.$$

(c) 三角形区域 $\mathscr{R}$ 的面积为 4,而三角形区域 $\mathscr{R}'$ 的面积为 2.因此,它们的比值为 $4/2=2$,与(b)中雅可比式的绝对值一致.由于这里的雅可比式是常数,故 xy 平面上任一区域 $\mathscr{R}$ 的面积都是由其映成的 uv 平面上对应区域 $\mathscr{R}'$ 的面积的两倍.

39. 设 xy 平面上的区域由 $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=b^2$, $x=0$ 及 $y=0$ 围成,其中 $0<a<b$.(a)确定在变换 $x=\rho\cos\phi, y=\rho\sin\phi$(其中 $\rho>0, 0\leqslant\phi<2\pi$)下由 $\mathscr{R}$ 所映成的区域 $\mathscr{R}'$.(b)讨论 $a=0$ 时发生的情况.(c)计算$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \phi)}$.(d)计算$\frac{\partial(\rho, \phi)}{\partial(x, y)}$.

解 (a)区域 $\mathscr{R}$[如上面的图 6-7(a)所示]由 $x=0$(点线),$y=0$(点划线),$x^2+y^2=a^2$(虚线),$x^2+y^2=b^2$(粗线)围成.

在给定的变换下,$x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+y^2=b^2$ 分别成为 $\rho^2=a^2$ 和 $\rho^2=b^2$ 或 $\rho=a$ 或 $\rho=b$,又 $x=0$, $a\leqslant y\leqslant b$ 成为 $\phi=\frac{\pi}{2}$, $a\leqslant\rho\leqslant b$; $y=0$, $a\leqslant x\leqslant b$ 成为 $\phi=0, a\leqslant\rho\leqslant b$.

所求区域 $\mathscr{R}'$ 如图 6-7(b)所示.

另一解法:利用事实:ρ 是到 xy 平面上原点 O 的距离;ϕ 是与 x 轴正向的夹角,则所求的区域显然由 $a\leqslant\rho\leqslant b, 0\leqslant\phi\leqslant\pi/2$ 给出,与图 6-7(b)所指出的相同.

(b) 若 $a=0$,则区域 $\mathscr{R}$ 变成了半径为 b 的圆形区域的四分之一(由 3 边围成),而 $\mathscr{R}'$ 仍是矩形区域.为此,点 $x=0$, $y=0$ 映成 $\rho=0$,ϕ 不确定,故该变换在这点不是一对一的,这种点有时称为奇点.

$$(c)\ \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \phi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cos\phi) & \frac{\partial}{\partial\phi}(\rho\cos\phi)\\ \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\sin\phi) & \frac{\partial}{\partial\phi}(\rho\sin\phi)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\phi & -\rho\sin\phi\\ \sin\phi & \rho\cos\phi\end{vmatrix}$$

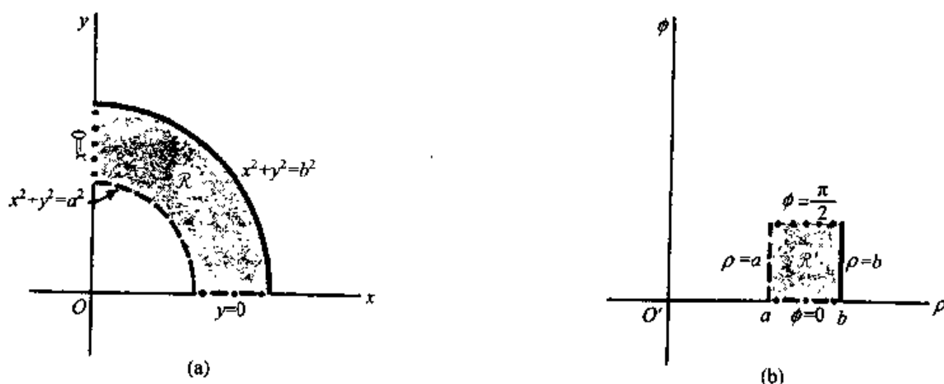


图 6-7

$$=\rho(\cos^2\phi+\sin^2\phi)=\rho.$$

(d) 由习题 45(b)并在其中令 $u=\rho,\ v=\phi$,得

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(\rho,\ \phi)}\frac{\partial(\rho,\ \phi)}{\partial(x,\ y)}=1,\text{ 于是,由(c)得}\frac{\partial(\rho,\ \phi)}{\partial(x,\ y)}=\frac{1}{\rho}.$$

这也能通过直接求导得到.

注意:由这些变换的雅可比式不难找出 $\rho=0$(即 $x=0,\ y=0$)为奇点的原由.

中值定理,泰勒定理

40. 证明二元函数的第一中值定理.

证明 ☞　设 $F(t)=f(x_0+ht,\ y_0+kt)$. 由一元函数的中值定理,得

$$F(1)-F(0)=F'(\theta),\ 0<\theta<1. \tag{1}$$

如果 $x=x_0+ht,\ y=y_0+kt$,则 $F(t)=f(x,\ y)$,故由习题 17,得

$$F'(t)=f_x\left(\frac{dx}{dt}\right)+f_y\left(\frac{dy}{dt}\right)=hf_x+kf_y$$

及

$$F'(\theta)=hf_x(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)+kf_y(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k),$$

其中 $0<\theta<1$. 因此,(1)成为

$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)=hf_x(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)+kf_y(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k), \tag{2}$$

其中 $0<\theta<1$,此即为所求.

值得注意的是:(2)与习题 14 当 $h=\Delta x$ 时的(1)相似,但由于只涉及一个数 θ,因而比之更为对称(也就更为有用).

41. 证明二元函数的泰勒中值定理.

证明 ☞　与习题 40 中一样,令 $F(t)=f(x_0+ht,\ y_0+kt)$. 由一元函数的泰勒中值定理,得

$$F(t)=F(0)+F'(0)t+\frac{F''(0)t^2}{2!}+\cdots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n+\frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}t^{n+1},\ 0<\theta<t. \tag{1}$$

令 $t=1$,得

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{F''(0)}{2!}+\cdots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}+\frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!},\ 0<\theta<1. \tag{2}$$

由习题 40,可得

$$F'(0)=hf_x(x_0,\ y_0)+kf_y(x_0,\ y_0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,\ y_0),$$

其中我们采用了符号算子记号. 类似地,并考虑到二阶偏导数的连续性,可得

$$F''(t)=\frac{d}{dt}F'(t)=\frac{d}{dt}(hf_x+kf_y)$$

$$=h\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)+k\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}.$$

由此,得出

$$F''(0) = h^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2hkf_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f_{yy}(x_0, y_0)$$
$$= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0).$$

同样地,我们能证明(由数学归纳法)对所有的正整数 n,有

$$F^{(n)}_{(0)} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0),\ F^{(n+1)}_{(\theta)} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k),$$

其中 $0<\theta<1$. 将这些导数表达式代入(2),便得所求结果.

42. 将 $x^2y+3y-2$ 按 $x-1$ 和 $y+2$ 的幂次展开.

解☞ 利用带有 $h=x-x_0$, $k=y-y_0$ 的泰勒中值定理,其中 $x_0=1$, $y_0=-2$,则

$f(x, y)=x^2y+3y-2$, $f_x=2xy$, $f_y=x^2+3$, $f_{xx}=2y$, $f_{xy}=2x$, $f_{yy}=0$, $f_{xxx}=0$, $f_{xxy}=2$, $f_{xyy}=0$,

$f_{yyy}=0$,而所有更高阶的偏导数全为零,因此

$$f(1, -2)=-10,\ f_x(1, -2)=-4,\ f_y(1, -2)=4,\ f_{xx}(1, -2)=-4,$$
$$f_{yyy}(1, -2)=0,\ f_{xy}(1, -2)=2,\ f_{yy}(1, -2)=0,$$
$$f_{xxx}(1, -2)=0,\ f_{xxy}(1, -2)=2,\ f_{xyy}(1, -2)=0.$$

由泰勒定理

$$f(x, y) = f(1, -2) + hf_x(1, -2) + kf_y(1, -2)$$
$$+\frac{1}{2!}\{h^2 f_{xx}(1, -2) + 2hkf_{xy}(1, -2) + k^2 f_{yy}(1, -2)\}$$
$$+\frac{1}{3!}\{h^3 f_{xxx}(1, -2) + 3h^2 kf_{xxy}(1, -2) + 3hk^2 f_{xyy}(1, -2) + k^3 f_{yyy}(1, -2)\} + R_3,$$

其中 R_3 是余项且此处为零.

将上面求得的导数值代入,便得

$$x^2y+3y-2 = -10-4(x-1)+4(y+2)-2(x-1)^2$$
$$+2(x-1)(y+2)+(x-1)^2(y+2).$$

这能用代数方法直接加以验证.

杂题

43. 设 $f(x, y)=\begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & (x, y)\neq(0, 0), \\ 0, & (x, y)=(0, 0), \end{cases}$

计算:(a) $f_x(0, 0)$, (b) $f_y(0, 0)$, (c) $f_{xx}(0, 0)$, (d) $f_{yy}(0, 0)$, (e) $f_{xy}(0, 0)$, (f) $f_{yx}(0, 0)$.

解☞ (a) $f_x(0, 0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h, 0)-f(0, 0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h}=0.$

(b) $f_y(0, 0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(0, k)-f(0, 0)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{0}{k}=0.$

如果 $(x, y)\neq(0,0)$,

$$f_x(x, y)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\right\}=xy\left(\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right)+y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right),$$

$$f_y(x, y)=\frac{\partial}{\partial y}\left\{xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\right\}=xy\left(\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right)+x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y}\right),$$

于是

(c) $f_{xx}(0, 0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f_x(h, 0)-f_x(0, 0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h}=0.$

(d) $f_{yy}(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f_y(0,k)-f_y(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0}{k}=0.$

(e) $f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{-k}{k}=-1.$

(f) $f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=1.$

注意,在(0,0)处 $f_{xy}\neq f_{yx}$,参见习题 13.

44. 证明:在变换 $x=\rho\cos\phi$, $y=\rho\sin\phi$ 下,方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \text{ 变为} \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}=0.$$

证明☞　我们有

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y}. \tag{2}$$

记住 ρ 和 ϕ 是 x 和 y 的函数,对 $x=\rho\cos\phi, y=\rho\sin\phi$ 关于 x 求导,得

$$1=-\rho\sin\phi\frac{\partial \phi}{\partial x}+\cos\phi\frac{\partial \rho}{\partial x},\ 0=\rho\cos\phi\frac{\partial \phi}{\partial x}+\sin\phi\frac{\partial \rho}{\partial x},$$

解此联立方程,得

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}=\cos\phi,\ \frac{\partial \phi}{\partial x}=-\frac{\sin\phi}{\rho}. \tag{3}$$

类似地,关于 y 求导,则

$$0=-\rho\sin\phi\frac{\partial \phi}{\partial y}+\cos\phi\frac{\partial \rho}{\partial y},\ 1=\rho\cos\phi\frac{\partial \phi}{\partial y}+\sin\phi\frac{\partial \rho}{\partial y}.$$

解此联立方程,得

$$\frac{\partial \rho}{\partial y}=\sin\phi,\ \frac{\partial \phi}{\partial y}=\frac{\cos\phi}{\rho}. \tag{4}$$

那么,由(1)和(2)得

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\cos\phi\frac{\partial V}{\partial \rho}-\frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\sin\phi\frac{\partial V}{\partial \rho}+\frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}. \tag{6}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x}\\&=\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\cos\phi\frac{\partial V}{\partial \rho}-\frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\cos\phi\frac{\partial V}{\partial \rho}-\frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x}\\&=\left(\cos\phi\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}+\frac{\sin\phi}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial \phi}-\frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\partial \phi}\right)(\cos\phi)\\&\quad+\left(-\sin\phi\frac{\partial V}{\partial \rho}+\cos\phi\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\partial \phi}-\frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}-\frac{\sin\phi}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right)\left(-\frac{\sin\phi}{\rho}\right).\end{aligned}$$

化简,得

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\cos^2\phi\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}+\frac{2\sin\phi\cos\phi}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial \phi}-\frac{2\sin\phi\cos\phi}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\partial \phi}+\frac{\sin^2\phi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}+\frac{\sin^2\phi}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}. \tag{7}$$

类似地,有

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\sin^2\phi\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}-\frac{2\sin\phi\cos\phi}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial \phi}+\frac{2\sin\phi\cos\phi}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\partial \phi}+\frac{\cos^2\phi}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}+\frac{\cos^2\phi}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}. \tag{8}$$

将(7)和(8)相加,便得所需结果:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}=0.$$

45. (a) 若 $x=f(u,v)$, $y=g(u,v)$,其中 $u=\phi(r,s)$, $v=\psi(r,s)$,证明:$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)}$.

(b) 假定$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$,证明:$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1$,并作几何说明.

解 ☞ (a) 假定各偏导数存在,并利用行列式的乘积定理(见习题 115),得

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)}=\begin{vmatrix} x_r & x_s \\ y_r & y_s \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_u u_r+x_v v_r & x_u u_s+x_v v_s \\ y_u u_r+y_v v_r & y_u u_s+y_v v_s \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u_r & u_s \\ v_r & v_s \end{vmatrix}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)}.$$

(b) 将 $r=x$, $s=y$ 代入(a)的结论中,则

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}=1.$$

方程 $x=f(u,v)$, $y=g(u,v)$在 xy 平面上的点(x,y)与 uv 平面上的点(u,v)之间定义了一个变换. 其逆变换由 $u=\phi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$给出. 上面获得的结果表明:这两个变换的雅可比式互为倒数.

46. 证明:$F(xy,z-2x)=0$ 在适当条件下满足方程 $x(\partial z/\partial x)-y(\partial z/\partial y)=2x$. 请问这些条件是什么?

证明 ☞ 设 $u=xy$, $v=z-2x$. 则 $F(u,v)=0$ 且

(1) $dF=F_u du+F_v dv=F_u(xdy+ydx)+F_v(dz-2dx)=0$.

取 z 为因变量,而 x 和 y 为自变量,则有 $dz=z_x dx+z_y dy$. 将其代入(1)得

$$(yF_u+F_v z_x-2F_v)dx+(xF_u+F_v z_y)dy=0.$$

由于 x 和 y 是自变量,故有

(2) $yF_u+F_v z_x-2F_v=0$, (3) $xF_u+F_v z_y=0$.

从(3)中解出 F_u 并代入(2),则再除以 F_v(假设其不等于零)便得所需结论 $xz_x-yz_y=2x$.

只要假定 $F(u,v)$连续可微且 $F_v\neq 0$,则所述结论一定成立.

补 充 习 题

函数与图形

47. 设 $f(x,y)=\frac{2x+y}{1-xy}$, 求:(a) $f(1,-3)$, (b) $\frac{f(2+h,3)-f(2,3)}{h}$, (c) $f(x+y,xy)$.

48. 设 $g(x,y,z)=z^2-yz+3xy$,求: (a) $g(1,-2,2)$, (b) $g(x+1,y-1,z^2)$, (c) $g(xy,xz,x+y)$.

49. 求使下列函数有定义并取实值的定义域,且对定义域作几何说明:

(a) $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2-1}$, (b) $f(x,y)=\ln(x+y)$, (c) $f(x,y)=\arcsin\left(\frac{2x-y}{x+y}\right)$.

50. (a) 函数 $f(x,y,z)=\sqrt{\frac{x+y+z-1}{x^2+y^2+z^2-1}}$在什么范围内有定义并取实值?

(b) 对这个定义域作出几何说明.

51. 指出下列每个方程在 3 维空间中所代表的曲面的名称并画出草图:

(a) $3x+2z-12$, (b) $4z=x^2+y^2$, (c) $z=x^2-4y^2$, (d) $x^2+z^2=y^2$,

(e) $x^2+y^2+z^2=16$, (f) $x^2-4y^2-4z^2=36$, (g) $x^2+y^2=2y$, (h) $z=x+y$,

(i) $y^2=4z$, (j) $x^2+y^2+z^2-4x+6y+2z-2=0$.

52. 作出由 $x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+z^2=a^2$ 所围的区域的图形,其中 a 是一常数.

53. 对满足下列关系式的点(x, y, z)的集合作出几何描述:

(a) $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=z^2$; (b) $x^2+y^2<z<x+y$.

54. 函数 $z=f(x, y)$的等位线是指由 $f(x, y)=c$(c 为任一常数)确定的 xy 平面上的曲线. 等位线从几何上提供了表示函数的一个方法. 类似地,$w=f(x, y, z)$的等位面是指由 $f(x, y, z)=c$(c 为任一常数)确定的空间直角坐标系(xyz)下的曲面. 描述下列每个函数的等位线(或等位面)并作出其图形:

(a) $f(x, y)=\ln(x^2+y^2-1)$, (b) $f(x, y)=4xy$, (c) $f(x, y)=\arctan y/(x+1)$,

(d) $f(x, y)=x^{2/3}+y^{2/3}$, (e) $f(x, y, z)=x^2+4y^2+16z^2$, (f) $f(x, y, z)=\sin(x+z)/(1-y)$.

极限与连续

55. 利用定义证明:(a) $\lim\limits_{\substack{x\to4\\y\to-1}}(3x-2y)=14$, (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}(xy-3x+4)=0$

56. 设$\lim f(x, y)=A$ 且 $\lim g(x, y)=B$,其中 lim 表示求当$(x, y)\to(x_0, y_0)$时的极限,证明:

(a) $\lim\{f(x, y)+g(x, y)\}=A+B$, (b) $\lim\{f(x, y)g(x, y)\}=AB$.

57. 在什么条件下,两个函数的商的极限等于它们极限的商? 证明你的答案.

58. 下列极限是否存在? 如存在,求其值.

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to2}}\dfrac{3-x+y}{4+x-2y}$,　　(b) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{3x-2y}{2x-3y}$,

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to4\\y\to\pi}}x^2\sin\dfrac{y}{x}$,　　(d) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$,

(e) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}e^{-1/x^2(y-1)^2}$,　　(f) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}$,

(g) $\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to1^-}}\dfrac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}}$,　　(h) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to1}}\dfrac{\arcsin(xy-2)}{\arctan(3xy-6)}$.

59. 分别叙述三元函数、n 元函数的极限的定义.

60. 当$(x, y, z)\to(0,0,0)$时,$\lim\dfrac{4x+y-3z}{2x-5y+2z}$是否存在? 证明你的答案.

61. 讨论下列函数在指定点处的连续性:

(a) x^2+y^2; (x_0, y_0). (b) $\dfrac{x}{3x+5y}$; $(0, 0)$.

(c) $f(x, y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x, y)\neq(0, 0)\\ 0, & (x, y)=(0, 0);\end{cases}$　$(0,0)$.

62. 利用定义,证明 $f(x, y)=xy+6x$ 在下列点处连续:

(a) $(1, 2)$, (b) (x_0, y_0).

63. 证明:习题 62 中的函数在由 $0\leqslant x\leqslant1$, $0\leqslant y\leqslant1$ 所确定的方形区域内一致连续.

偏导数

64. 设 $f(x, y)=\dfrac{x-y}{x+y}$,用定义求其在$(2,-1)$处的(a)$\dfrac{\partial f}{\partial x}$及(b)$\dfrac{\partial f}{\partial y}$,并用求导法则检验你的答案.

65. 设 $f(x, y)=\begin{cases}(x^2-xy)/(x+y), & (x, y)\neq(0,0)\\ 0, & (x, y)=(0, 0)\end{cases}$,求:(a) $f_x(0, 0)$, (b) $f_y(0, 0)$.

66. 对上一题中的函数,研究极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x, y)$并说明这个极限(如存在)等于或不等于 $f_x(0, 0)$的理由.

67. 设 $f(x, y)=(x-y)\sin(3x+2y)$,计算$(0, \pi/3)$处的(a) f_x, (b) f_y, (c) f_{xx}, (d) f_{yy}, (e) f_{xy}, (f) f_{yx}.

68. (a)对$(x, y)\neq(0,0)$,通过直接求导证明 $z=xy\tan(y/x)$满足方程 $x\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)+y\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=2z$. (b) 若在$(0, 0)$处,$z=0$,试讨论(a)在其他点的情况.

69. 对函数(a) $(2x-y)/(x+y)$, (b) $x\tan xy$ 及(c) $\cosh(y+\cos x)$检验 $f_{xy}=f_{yx}$ 的正确性,指出可能的例外点并对这些点进行讨论.

70. 证明 $z=\ln\{(x-a)^2+(y-b)^2\}$除点$(a,\ b)$外满足$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

71. 证明 $z=x\cos(y/x)+\tan(y/x)$除了 $x=0$ 的点外,均满足 $x^2 z_{xx}+2xyz_{xy}+y^2 z_{yy}=0$.

72. 证明:如果 $w=\left(\dfrac{x-y+z}{x+y-z}\right)^n$,则(a) $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+y\dfrac{\partial w}{\partial y}+z\dfrac{\partial w}{\partial z}=0$, (b) $x^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+y^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+z^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}+2xy\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+2xz\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}+2yz\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}=0$. 指出可能的例外点.

微分

73. 设 $z=x^3-xy+3y^2$, 对 $x=5,\ y=4,\ \Delta x=-0.2,\ \Delta y=0.1$,计算(a) Δz, (b) dz. 说明 Δz 和dz 近似相等的原因. (c) 求 $x=5,\ y=4,\ \Delta x=-2,\Delta y=1$ 时的 Δz 和dz.

74. 利用微分,计算$\sqrt[5]{(3\cdot 8)^2+2(2\cdot 1)^3}$的近似值.

75. 设(a) $F(x,\ y)=x^3y-4xy^2+8y^3$, (b) $G(x,\ y,\ z)=8xy^2z^3-3x^2yz$,
(c) $F(x,\ y)=xy^2\ln(y/x)$, 求 dF 和dG.

76. 证明:(a) $d(UV)=UdU+VdU$, (b) $d(U/V)=(VdU-UdV)/V^2$, (c) $d(\ln U)=(dU)/U$, (d) $d(\arctan V)=(dV)/(1+V^2)$,其中 U 和V 是二元或三元以上的函数.

77. 确定下列表达式是否为某个函数的恰当微分,如是的话,求此函数:
(a) $(2xy^2+3y\cos 3x)dx+(2x^2y+\sin 3x)dy$, (b) $(6xy-y^2)dx+(2xe^y-x^2)dy$,
(c) $(z^3-3y)dx+(12y^2-3x)dy+3xz^2dz$.

复合函数的求导法则

78. (a) 设 $U(x,\ y,\ z)=2x^2-yz+xz^2$, $x=2\sin t$, $y=t^2-t+1$, $z=3e^{-t}$,求$\left.\dfrac{dU}{dt}\right|_{t=0}$.
(b) 设 $H(x,\ y)=\sin(3x-y)$,$x^3+2y=2t^3$, $x-y^2=t^2+3t$,求$\dfrac{dH}{dt}$.

79. 设 $F(x,\ y)=(2x+y)/(y-2x)$, $x=2u-3v$, $y=u+2v$, 在 $u=2,v=1$ 处求(a) $\partial F/\partial u$, (b) $\partial F/\partial v$, (c) $\partial^2 F/\partial u^2$, (d) $\partial^2 F/\partial v^2$, (e) $\partial^2 F/\partial u\partial v$.

80. 设 $U=x^2F(y/x)$,在对 F 作出适当的限制下,证明:$x(\partial U/\partial x)+y(\partial U/\partial y)=2U$.

81. 设 $x=u\cos\alpha-v\sin\alpha$ 且$y=u\sin\alpha+v\cos\alpha$,其中 α 是常数,证明:$\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial V}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial v}\right)^2$.

82. 证明:若 $x=\rho\cos\phi$,$y=\rho\sin\phi$,则方程$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$成为$\dfrac{\partial u}{\partial \rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \phi}$, $\dfrac{\partial v}{\partial \rho}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \phi}$.

83. 利用习题82 证明:在变换 $x=\rho\cos\phi$, $y=\rho\sin\phi$ 下,方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 成为$\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0$.

隐函数和雅可比式

84. 设 $F(x,\ y)=0$,证明 $dy/dx=-F_x/F_y$.

85. 设 $x^3+y^3-3xy=0$,求:(a) dy/dx, (b) d^2y/dx^2.

86. 设 $xu^2+v=y^3$, $2yu-xv^3=4x$,求:(a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, (b) $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

87. 设 $u=f(x,\ y)$, $v=g(x,\ y)$可微,证明:$\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}=1$. 解释清楚每个偏导数中哪些变量是自变量.

88. 设 $f(x,\ y,\ r,\ s)=0$, $g(x,\ y,\ r,\ s)=0$,证明:$\dfrac{\partial y}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x}=0$,说明哪些变量是自变量. 你能使用什么符号指出所考虑的自变量?

89. 设 $F(x,\ y)=0$.证明$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$.

90. 设 $F(u,\ v)=3u^2-uv$, $G(u,\ v)=2uv^2+v^3$,求$\dfrac{\partial(F,\ G)}{\partial(u,\ v)}$的值.

91. 设 $F=x+3y^2-z^3$, $G=2x^2yz$,且 $H=2z^2-xy$, 求$\dfrac{\partial(F,\ G,\ H)}{\partial(x,\ y,\ z)}$在$(1,-1,0)$处的值.

92. 设 $u=\arcsin x+\arcsin y$ 且 $v=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$,确定 u 和v 之间是否存在函数关系,如有,求此关系式.

93. 设 $F=xy+yz+zx$,$G=x^2+y^2+z^2$,且 $H=x+y+z$,确定 F,G,H 之间是否有函数关系相连,如有,求此关系式.

94. (a) 设 $x=f(u, v, w)$, $y=g(u, v, w)$且 $z=h(u, v, w)$,并假定 $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\neq 0$, 证明: $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}=1$. (b) 借助于变换解释(a)中的结论.

95. 设 $f(x, y, z)=0$ 且 $g(x, y, z)=0$,证明:

$$\frac{dx}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}}=\frac{dy}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(z, x)}}=\frac{dz}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}}$$

(假定结论中各部分均有意义).

96. 设方程 $x+y^2=u$, $y+z^2=v$, $z+x^2=w$ 确定了 x, y, z 为 u, v, w 的二次可微函数,求:(a) $\frac{\partial x}{\partial u}$, (b) $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, (c) $\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}$.

97. 就 $u=f(x, y, z)$, $v=g(x, y, z)$, $w=h(x, y, z)$,叙述并证明类似于习题 35 中的定理.

变换,曲线坐标

98. 已知变换 $x=2u+v$, $y=u-3v$, (a) 设 xy 平面上的区域 $\mathscr{R}$ 由 $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$围成,画出在此变换下由 $\mathscr{R}$ 映成的 uv 平面上的区域 $\mathscr{R}'$的草图. (b) 计算$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$,(c)将(b)中结果与 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}'$ 的面积之比作比较.

99. (a)证明:在线性变换 $x=a_1u+a_2v$, $y=b_1u+b_2v(a_1b_2-a_2b_1\neq 0)$下,$xy$ 平面上的直线和圆分别映射成 uv 平面上的直线和圆. (b) 计算此变换的雅可比式 J 并讨论$J=0$ 的意义.

100. 已知 $x=\cos u\cosh v$, $y=\sin u\sinh v$. (a) 证明:通常 uv 平面上的坐标曲线 $u=a$ 和 $v=b$ 分别映成 xy 平面上的双曲线和椭圆. (b) 计算 $\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$. (c) 计算 $\left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right|$.

101. 已知 $x=2u+3v-w$, $y=u-2v+w$, $z=2u-2v+w$. (a) 设 $\mathscr{R}$ 是 xyz 空间由 $x=0$, $x=8$, $y=0$, $y=4$, $z=0$, $z=6$ 所围成的区域,画出在此变换下由 $\mathscr{R}$ 所映成的 uvw 空间的区域 $\mathscr{R}'$ 的草图. (b) 计算 $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$. (c)将(b)中结果与 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}'$ 的体积之比作比较.

102. 已知球坐标变换 $x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\theta$,其中 $r\geqslant 0$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\phi<2\pi$. 描述坐标曲面(a) $r=a$, (b) $\theta=b$, (c) $\phi=c$,其中 a, b, c 是任一常数.

103. (a) 对习题 102 中的球坐标变换,验证:

$$J=\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)}=r^2\sin\theta.$$

(b) 讨论 $J=0$ 的情况.

中值定理

104. 证明 $\ln\frac{x+y}{2}=\frac{x+y-2}{2+\theta(x+y-2)}$, $0<\theta<1$,其中 $x>0, y>0$.

105. 将 $f(x, y)=\sin xy$ 按 $x-1$ 和 $y-\frac{\pi}{2}$ 的幂次展开,直至二次项.

106. 将 $f(x, y)=y^2/x^3$ 按 $x-1$ 和 $y+1$ 的幂次展开,直至二次项并写出余项.

107. 证明三元函数的第一中值定理.

108. 将泰勒中值定理推广至三元函数并证明之.

杂题

109. 若 $F(P, V, T)=0$,证明:(a) $\frac{\partial P}{\partial T}\Big|_V\frac{\partial T}{\partial V}\Big|_P=-\frac{\partial P}{\partial V}\Big|_T$, (b) $\frac{\partial P}{\partial T}\Big|_V\frac{\partial T}{\partial V}\Big|_P\frac{\partial V}{\partial P}\Big|_T=-1$.

这些结果在热力学中很有用处,其中 P, V, T 对应于物理系统中的压力、体积和温度.

110. 证明 $F(x/y, z/y)=0$ 满足 $x(\partial z/\partial x)+y(\partial z/\partial y)=z$.

111. 证明 $F(x+y-z, x^2+y^2)=0$ 满足 $x(\partial z/\partial y)-y(\partial z/\partial x)=x-y$.

112. 若 $x=f(u, v)$, $y=g(u, v)$,证明$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u}$,其中 $J=\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.

113. 若 $x=f(u, v)$, $y=g(u, v)$, $z=h(u, v)$且 $F(x, y, z)=0$,证明

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}dx+\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}dy+\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}dz=0.$$

114. 若 $x=\phi(u, v, w)$, $y=\psi(u, v, w)$且 $u=f(r, s)$, $v=g(r, s)$, $w=h(r, s)$

证明:$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)}=\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)}+\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(v, w)}\dfrac{\partial(v, w)}{\partial(r, s)}+\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(w, u)}\dfrac{\partial(w, u)}{\partial(r, s)}$.

115. (a) 证明:$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix}$. 因而建立了习题 45 中涉及的二阶行列式的乘法法则. (b)将(a)中结论推广到 3,4,…阶行列式.

116. 若 x, y 和 z 是 u, v, w 的函数,而 u, v, w 又是 r, s, t 的函数,证明:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, s, t)}=\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\cdot\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(r, s, t)}.$$

117. 设 D_x 和 D_y 分别表示算子$\partial/\partial x$ 和$\partial/\partial y$,证明:若 $f(x+h, y+k)$的泰勒级数存在,则能写成形式

$$f(x+h, y+k)=e^{hD_x+kD_y}f(x, y).$$

118. 给定方程 $F_j(x_1,\cdots,x_m, y_1,\cdots,y_n)=0$,其中 $j=1,2,\cdots,n$.

证明:在关于 F_j 的适当条件下,有

$$\frac{\partial y_r}{\partial x_s}=-\frac{\partial(F_1, F_2,\cdots,F_r,\cdots,F_n)}{\partial(y_1, y_2,\cdots,x_s,\cdots,y_n)}\Bigg/\frac{\partial(F_1, F_2,\cdots,F_n)}{\partial(y_1, y_2,\cdots,y_n)}.$$

119. (a) 设 $F(x, y)$是二次齐次函数,证明:

$$x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2F.$$

(b) 利用特殊情形 $F(x, y)=x^2\ln(y/x)$作出说明.

注意:使用 $D_x=\partial/\partial x$, $D_y\equiv\partial/\partial y$,上述结果能以算子形式写成$(xD_x+yD_y)^2F=2F$. [提示:在习题 25 的方程(1)的两边,关于 λ 求导两次].

120. 习题 119 的结论可作如下推广:若 $F(x_1, x_2,\cdots,x_n)$是 p 次齐次函数,并对任一正整数 r,记 $D_{x_j}\equiv\partial/\partial x_j$,则

$$(x_1D_{x_1}+x_2D_{x_2}+\cdots+x_nD_{x_n})^rF=p(p-1)\cdots(p-r+1)F.$$

121. (a) 设 x 和 y 按照 $x+iy=(u+iv)^3$,由 u 和 v 确定. 证明:在这个变换下,方程$\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$ 成为$\dfrac{\partial^2\phi}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial v^2}=0$.

(b) 如 $x+iy=F(u+iv)$,(a)中结论是否成立? 证明你的陈述.

第七章　向　量

向量与纯量

在物理学,有些量要由大小和方向两者刻画,例如位移、速度、力和加速度. 为了描述这种量,我们引进向量的概念,向量是由一点 P 到另一点 Q 的有向线段$\overrightarrow{PQ}$,P 称为起点,Q 称为终点. 我们用黑体字母或上方带箭头的字母表示向量. 因此,$\overrightarrow{PQ}$记为 $\boldsymbol{A}$ 或$\vec{A}$,如图 7-1 所示. 向量的大小或长度记为$|\overrightarrow{PQ}|$,$\overline{PQ}$,$|\boldsymbol{A}|$或$|\vec{A}|$.

物理学中还有一些量只由大小刻画,例如质量、长度和温度. 这种量常称为纯量,以区别于向量. 但需要强调的是:必须从这些量中去除诸如米、度等单位,它们与实数并没有什么差别,因此我们能像通常那样用普通文字表示它们.

向量代数

通过适当定义,数值代数中所熟知的加法、减法、乘法运算能推广到向量代数中来,下面的定义是基本的:

1. 如果两个向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的大小和方向,则不管它们的起点如何,就称它们是相等的. 因此,在图 7-1 中 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

2. 与向量 $\boldsymbol{A}$ 的方向相反而大小相同的向量记为 $-\boldsymbol{A}$(见图 7-2).

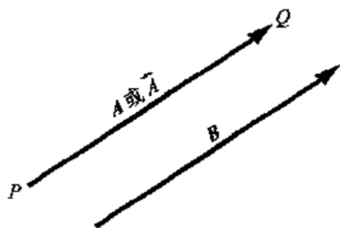


图 7-1

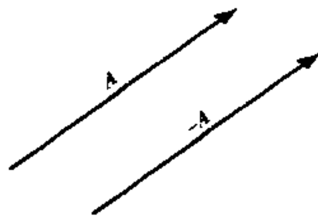


图 7-2

3. 图 7-3(a)中向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和或合成为如下形成的向量 $\boldsymbol{C}$:以 $\boldsymbol{A}$ 的终点为起点作向量 $\boldsymbol{B}$ 并由 $\boldsymbol{A}$ 的起点连向 $\boldsymbol{B}$ 的终点[见下面的图 7-3(b)]. 和向量 $\boldsymbol{C}$ 写成 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. 这个定义与向量加法的平行四边形法则(如图 7-3(c)所示)是等价的.

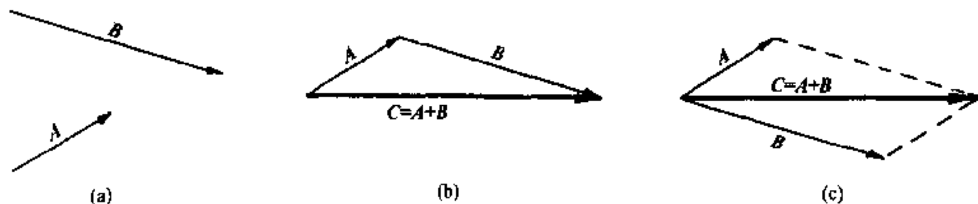


图 7-3

向量的加法可立即推广到两个以上的向量. 例如,图 7-4 显示了获取向量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 的和或合成 $\boldsymbol{E}$ 的方法.

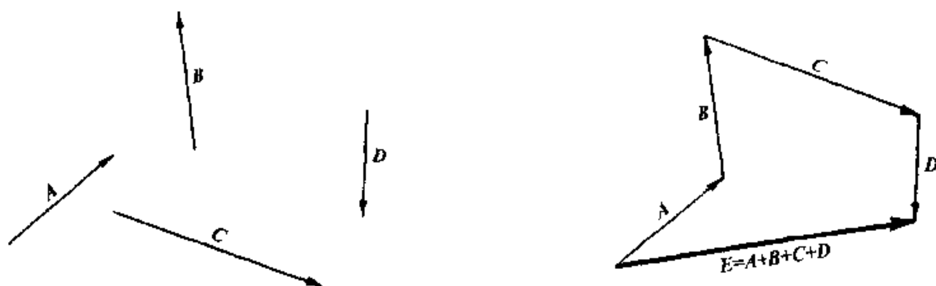


图 7-4

4．向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差，由 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 表示，它是这样的一个向量 $\boldsymbol{C}$：与 $\boldsymbol{B}$ 相加便得 $\boldsymbol{A}$．等价地，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可定义为 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$．如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 定义为零向量并用符号 $\boldsymbol{O}$ 表示．这是一个大小为零但方向不确定的向量．

5．向量 $\boldsymbol{A}$ 与纯量 m 相乘产生向量 $m\boldsymbol{A}$，其大小为 $\boldsymbol{A}$ 的大小的 $|m|$ 倍，其方向当 m 为正时与 $\boldsymbol{A}$ 相同，当 m 为负时与 $\boldsymbol{A}$ 相反．如 $m=0$，则 $m\boldsymbol{A}=0$，即为零向量．

向量代数定律

如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为向量，且 m,n 为纯量，则

1．$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$，加法的交换律，

2．$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$，加法的结合律，

3．$m(n\boldsymbol{A})=(mn)\boldsymbol{A}=n(m\boldsymbol{A})$，乘法的结合律，

4．$(m+n)\boldsymbol{A}=m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{A}$，分配律，

5．$m(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=m\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}$，分配律．

注意：在这些定律中，只定义了一个向量与一个或多个纯量的乘积，在 p.123，我们将定义向量与向量的乘积．

单位向量

具有单位长度的向量称为单位向量，如果 $\boldsymbol{A}$ 是任意一个长度 $A>0$ 的向量，则 $\boldsymbol{A}/A$ 为一个单位向量，记为 $\boldsymbol{a}$，它与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的方向，故 $\boldsymbol{A}=A\boldsymbol{a}$．

基本单位向量

基本单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为与直角坐标系中 x,y,z 轴的正向一致的单位向量（参见图 7-5）．除非另作说明，我们均使用右手直角坐标系．这种坐标系的名称源自于事实：当右手的四个手指由 Ox 旋转 90°至 Oy 时，大姆指指向 z 轴的正向．一般地，设三个向量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 有相同的起点且不共面，如果当右手的四个手指由 $\boldsymbol{A}$ 旋转小于 180°的角至 $\boldsymbol{B}$ 时，大姆指指向 $\boldsymbol{C}$ 的方向（见图 7-6），则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 形成右手系或右旋系．

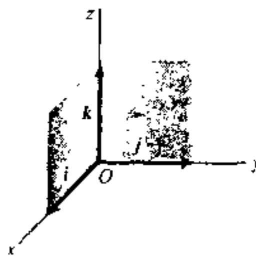


图 7-5

向量的分量

3 维空间中任一向量 $\boldsymbol{A}$ 均可表示为以直角坐标系的原点 $\boldsymbol{O}$ 为起点的向量（见图 7-7）．设 (A_1,A_2,A_3) 是以 O 为起点的向量 $\boldsymbol{A}$ 的终点的直角坐标，向量 $A_1\boldsymbol{i},A_2\boldsymbol{j},A_3\boldsymbol{k}$ 分别称为 $\boldsymbol{A}$ 在 x,y,z 方向上的直角分向量或简称为分向量．而 A_1,A_2,A_3 分别称为 $\boldsymbol{A}$ 在 x，y，z 方向上的直角分量或简称为分量．

由于 $A_1\boldsymbol{i}$，$A_2\boldsymbol{j},A_3\boldsymbol{k}$ 的和或合成为向量 $\boldsymbol{A}$，故 $\boldsymbol{A}$ 能写为

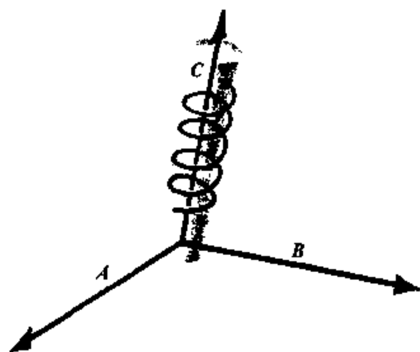


图 7-6

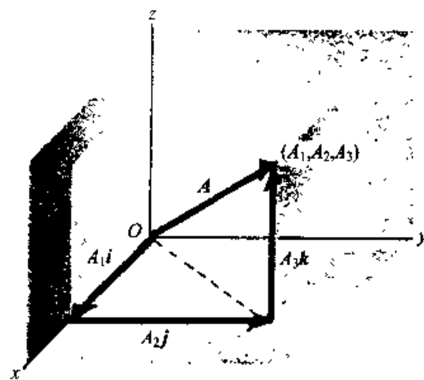


图 7-7

$$A = A_1 i + A_2 j + A_3 k, \tag{1}$$

A 的大小为

$$A = |A| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}. \tag{2}$$

特别,由 O 到点 (x, y, z) 的位置向量或径向量 r 写为

$$r = xi + yj + zk, \tag{3}$$

且其大小为 $r=|r|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

点积或纯量积

两个向量 A 与 B 的点积或纯量积定义为 A 与 B 的大小及其夹角余弦的乘积,记为 $A\cdot B$(读作 A 点 B). 用符号表示为

$$A \cdot B = AB\cos\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \tag{4}$$

注意 $A\cdot B$ 是纯量而不是向量.

下列定律成立:

1. $A\cdot B=B\cdot A$,点积的交换律,
2. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$,分配律,
3. $m(A\cdot B)=(mA)\cdot B=A\cdot(mB)=(A\cdot B)m$,其中 m 是纯量,
4. $i\cdot i=j\cdot j=k\cdot k=1$, $i\cdot j=j\cdot k=k\cdot i=0$,
5. 如 $A=A_1 i+A_2 j+A_3 k$ 且 $B=B_1 i+B_2 j+B_3 k$, 则

$$A \cdot B = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3,$$

$$A \cdot A = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2,$$

$$B \cdot B = B^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2,$$

6. 如 $A\cdot B=0$ 且 A 与 B 为非零向量,则 A 与 B 垂直.

叉积或向量积

A 与 B 的叉积或向量积定义为一个向量 $C=A\times B$(读作 A 叉 B),其大小为 A 与 B 的大小及其夹角正弦的乘积,其方向垂直于 A 与 B 所在的平面且使 A, B, C 形成右手系. 用符号可表示为

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = AB\sin\theta\boldsymbol{u},\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi, \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 为与 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 方向一致的单位向量. 如 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{A}$ 平行 $\boldsymbol{B}$,则 $\sin\theta=0$,因此我们定义 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$

下列定律成立:

1. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$,(叉积的交换律不成立),
2. $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$,分配律,
3. $m(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(m\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times(m\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})m$, 其中 m 为纯量,
4. $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$,
5. 如 $\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k}$ 且 $\boldsymbol{B}=B_1\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+B_3\boldsymbol{k}$, 则

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix},$$

6. $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$ = 以 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为边的平行四边形的面积,
7. 如 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不是零向量,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 平行.

三重积

三个向量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 之间的点乘和叉乘可以产生形如 $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 及 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 的有意义的乘积. 并成立下列定律:

1. 一般 $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$.
2. $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$ = 以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为棱的平行六面体的体积或这个体积的负数,这取决于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是否形成右手系. 如果 $\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B}=B_1\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+B_3\boldsymbol{k}$ 且 $\boldsymbol{C}=C_1\boldsymbol{i}+C_2\boldsymbol{j}+C_3\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

3. $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\neq(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$,(叉积的结合律不成立).
4. $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$,

$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$.

积 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 有时称为纯量三重积或框积并可记为 $[\boldsymbol{ABC}]$. 而积 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 称为向量三重积.

在 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 中,有时可略去圆括号并记成 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$,但在 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 中的圆括号必须使用(见习题 29). 注意到 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$,这一点常表述为:在纯量三重积中,点乘号和叉乘号可交换位置而不影响结果(见习题 26).

向量分析的公理化方法

从上面的讨论中可以看出:当一个向量 $\boldsymbol{r}$ 相对于某个坐标系的 3 个分量 $(x,\ y,\ z)$ 已知时,便可确定该向量为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 因此,采用下面给出的公理化方法便是十分自然的了:

定义 一 3 维向量为一实数的三元有序数组 (A_1,A_2,A_3).

由此,我们就能定义向量相等、向量加法和减法等. 因而,如 $\boldsymbol{A}=(A_1,\ A_2,\ A_3)$ 且 $\boldsymbol{B}=(B_1,B_2,B_3)$,则定义

1. $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ 当且仅当 $A_1=B_1$, $A_2=B_2$, $A_3=B_3$,

2. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=(A_1+B_1, A_2+B_2, A_3+B_3)$,

3. $\mathbf{A}-\mathbf{B}=(A_1-B_1, A_2-B_2, A_3-B_3)$,

4. $\mathbf{O}=(0,0,0)$,

5. $m\mathbf{A}=m(A_1, A_2, A_3)=(mA_1, mA_2, mA_3)$,

6. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3$,

7. $\mathbf{A}$ 的长度或大小 $=|\mathbf{A}|=\sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}=\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}$.

从这些内容,我们可获得向量的其他性质,如 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$, $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$, $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ 等. 通过定义单位向量

$$\boldsymbol{i}=(1, 0, 0),\ \boldsymbol{j}=(0, 1, 0),\ \boldsymbol{k}=(0, 0, 1), \tag{7}$$

我们能证明

$$\mathbf{A}=A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k}. \tag{8}$$

同样地,可定义 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(A_2B_3-A_3B_2, A_3B_1-A_1B_3, A_1B_2-A_2B_1)$.

在建立了这套公理化方法之后,我们便能对有关结论作出几何或物理解释. 例如,能证明 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB\cos\theta$, $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=AB\sin\theta$ 等.

在上面,我们考虑的是三维向量. 很容易将向量的概念推广到更高的维数. 例如,四维向量定义为四元有序数组 (A_1, A_2, A_3, A_4).

向量函数

如果对于纯量 u 的每个值,都有一个向量 $\mathbf{A}$ 与之对应,则称 $\mathbf{A}$ 为 u 的函数,记为 $\mathbf{A}(u)$,在三维空间中,可将 $\mathbf{A}(u)$ 写成 $\mathbf{A}(u)=A_1(u)\boldsymbol{i}+A_2(u)\boldsymbol{j}+A_3(u)\boldsymbol{k}$.

容易对这样的函数概念作出推广,如果对每个点 (x, y, z),都存在向量 $\mathbf{A}$ 与之对应,则 $\mathbf{A}$ 为 (x, y, z) 的函数,表示为 $\mathbf{A}(x, y, z)=A_1(x, y, z)\boldsymbol{i}+A_2(x, y, z)\boldsymbol{j}+A_3(x, y, z)\boldsymbol{k}$.

由于向量函数 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 对某区域内的每一点都对应于一个向量,故有时就称向量函数确定了一个向量场. 类似地,由于 $\phi(x, y, z)$ 对某区域内的每一点都对应了一个纯量,故称其确定了一个纯量场.

向量函数的极限,连续与导数

向量函数的极限、连续与导数所遵循的规则类似于对纯量函数所作的讨论. 下列陈述证实了这种相似的存在:

1. 如果对任一给定的正数 ϵ,存在某个正数 δ,使得当 $|u-u_0|<\delta$ 时有 $|\mathbf{A}(u)-\mathbf{A}(u_0)|<\epsilon$,则称向量函数 $\mathbf{A}(u)$ 在 u_0 连续. 这等价于 $\lim\limits_{u\to u_0}\mathbf{A}(u)=\mathbf{A}(u_0)$.

2. 假如极限 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\mathbf{A}(u+\Delta u)-\mathbf{A}(u)}{\Delta u}$ 存在,则将此极限定义为 $\mathbf{A}(u)$ 的导数,记为 $\dfrac{d\mathbf{A}}{du}$. 当 $\mathbf{A}(u)=A_1(u)\boldsymbol{i}+A_2(u)\boldsymbol{j}+A_3(u)\boldsymbol{k}$ 时,有 $\dfrac{d\mathbf{A}}{du}=\dfrac{dA_1}{du}\boldsymbol{i}+\dfrac{dA_2}{du}\boldsymbol{j}+\dfrac{dA_3}{du}\boldsymbol{k}$. 更高阶的导数,如 $d^2\mathbf{A}/du^2$ 等,也能类似地定义.

3. 若 $\mathbf{A}(x, y, z)=A_1(x, y, z)\boldsymbol{i}+A_2(x, y, z)\boldsymbol{j}+A_3(x, y, z)\boldsymbol{k}$,则 $\mathbf{A}$ 的微分为 $d\mathbf{A}=\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}dy+\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}dz$.

4. 乘积的求导法则也类似于纯量函数. 但当涉及到叉积时,要注意叉积的次序. 举例如下:

(a) $\frac{d}{du}(\phi\boldsymbol{A})=\phi\frac{d\boldsymbol{A}}{du}+\frac{d\phi}{du}\boldsymbol{A}$,

(b) $\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial y}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}\cdot\boldsymbol{B}$,

(c) $\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial z}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}\times\boldsymbol{B}$.

向量导数的几何解释

如果 $\boldsymbol{r}$ 为连接坐标系原点 O 和点 (x, y, z) 的向量，则向量函数 $\boldsymbol{r}(u)$ 的表示式定义了 x, y, z 为 u 的函数. 当 u 变化时，$\boldsymbol{r}$ 的终点描出一条空间曲线(见图 7-8)，其参数方程为 $x=x(u)$, $y=y(u)$, $z=z(u)$. 如果参数 u 为从曲线上某定点开始度量的弧长 s，则

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{T} \tag{9}$$

为一单位向量，其方向为相切于曲线的方向，并称之为单位切向量. 如果 u 是时间 t，则

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{v} \tag{10}$$

就是描出该曲线的 $\boldsymbol{r}$ 的终点的运动速度. 我们有

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dt}\boldsymbol{T}=v\boldsymbol{T}. \tag{11}$$

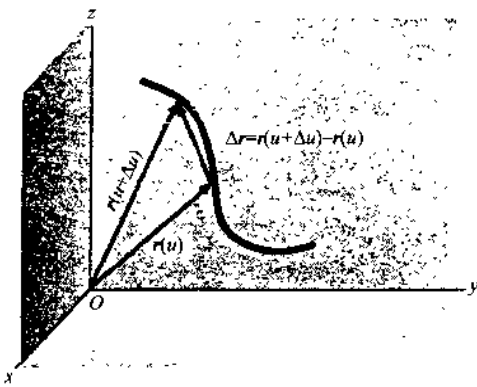


图 7-8

由此，可以看出 $\boldsymbol{v}$ 的大小为 $v=ds/dt$. 类似地，有

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{a}, \tag{12}$$

这是描出该曲线的 $\boldsymbol{r}$ 的终点的加速度. 这些概念在力学和微分几何中有着重要的应用.

梯度，散度和旋度

考虑由下式定义的向量算子∇(倒三角形)

$$\nabla\equiv\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{13}$$

那么，当 $\phi(x, y, z)$和 $A(x, y, z)$在一区域内有连续的一阶偏导数(这个条件在许多场合都比所需要的条件要强)时，我们便能作如下定义：

1. 梯度 ϕ 的梯度定义为

$$\begin{aligned}\text{grad}\phi=\nabla\phi&=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi=\boldsymbol{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\\&=\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}.\end{aligned} \tag{14}$$

一个有趣的解释是：如果 $\phi(x, y, z)=C$ 为一曲面的方程，则$\nabla\phi$ 是这个曲面的法向(见习题 36).

2. 散度 A 的散度定义为

$$\text{dir}\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k})$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}. \tag{15}$$

3. 旋度 $\boldsymbol{A}$ 的旋度定义为

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \tag{16}$$

注意:在行列式的表达式中,算子$\frac{\partial}{\partial x}$,$\frac{\partial}{\partial y}$,$\frac{\partial}{\partial z}$必须位于$A_1, A_2, A_3$ 的前面.

有关∇的公式

如 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, U, V$ 的偏导数存在,则

1. $\nabla(U+V) = \nabla U + \nabla V$ 或 $\operatorname{grad}(U+V) = \operatorname{grad}U + \operatorname{grad}V$,

2. $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \nabla\cdot\boldsymbol{A} + \nabla\cdot\boldsymbol{B}$ 或 $\operatorname{dir}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \operatorname{div}\boldsymbol{A} + \operatorname{div}\boldsymbol{B}$,

3. $\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \nabla\times\boldsymbol{A} + \nabla\times\boldsymbol{B}$ 或 $\operatorname{curl}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \operatorname{curl}\boldsymbol{A} + \operatorname{curl}\boldsymbol{B}$,

4. $\nabla\cdot(U\boldsymbol{A}) = (\nabla U)\cdot\boldsymbol{A} + U(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$,

5. $\nabla\times(U\boldsymbol{A}) = (\nabla U)\times\boldsymbol{A} + U(\nabla\times\boldsymbol{A})$,

6. $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$,

7. $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})$,

8. $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$,

9. $\nabla\cdot(\nabla U) \equiv \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$称为 V 的拉普拉斯值,而$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$称为拉普拉斯算子,

10. $\nabla\times(\nabla U) = 0$. U 的梯度的旋度为零,

11. $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0$. $\boldsymbol{A}$ 的旋度的散度为零,

12. $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$.

雅可比式的向量解释,正交曲线坐标

变换方程

$$x = f(u_1, u_2, u_3), y = g(u_1, u_2, u_3), z = h(u_1, u_2, u_3) \tag{17}$$

(其中我们假设 f, g, h 连续,有连续的偏导数且有单值逆变换)建立了直角坐标系 xyz 中

的点与 $u_1u_2u_3$ 中的点之间的一一对应. 用向量符号,变换(17)可写成

$$r = xi + yj + zk = f(u_1,u_2,u_3)i + g(u_1,u_2,u_3)j + h(u_1,u_2,u_3)k, \tag{18}$$

则图 7-9 中的点不仅可由直角坐标(x,y,z)确定,而且也可以由坐标(u_1,u_2,u_3)确定. 我们称(u_1,u_2,u_3)为该点的曲线坐标.

如果 u_2 和 u_3 是常数,则当 u_1 变化时,$\boldsymbol{r}$ 所描出的曲线称为 u_1 坐标曲线. 类似地可定义过 P 点的 u_2 和 u_3 坐标曲线.

由(18),得

$$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}du_3. \tag{19}$$

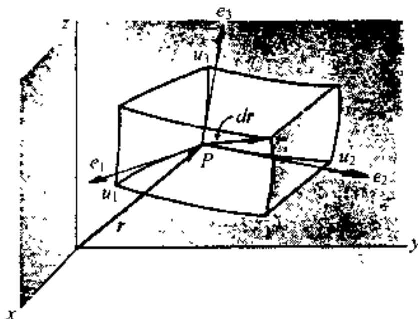


图 7-9

向量$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}$与 u_1 坐标曲线在 P 点相切. 若 $\boldsymbol{e}_1$ 是 P 点在 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}$方向上的单位向量,则我们可记$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} = h_1\boldsymbol{e}_1$,其中 $h_1 = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\right|$. 类似地,分别可记$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} = h_2\boldsymbol{e}_2$ 及$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3} = h_3\boldsymbol{e}_3$,其中 $h_2 = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\right|$且 $h_3 = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}\right|$. 因而,(19)可记成

$$d\boldsymbol{r} = h_1du_1\boldsymbol{e}_1 + h_2du_2\boldsymbol{e}_2 + h_3du_3\boldsymbol{e}_3. \tag{20}$$

有时,称 h_1,h_2,h_3 为比例因子.

如果在任一点 P,有 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 互相垂直,则称该曲线坐标是正交的,此时,弧长元素 ds 由下式给出:

$$ds^2 = d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = h_1^2du_1^2 + h_2^2du_2^2 + h_3^2du_3^2, \tag{21}$$

它对应于图 7-9 中平行六面体对角线长度的平方.

另外,在曲线坐标正交情况下,该平行六面体的体积由下式给出:

$$dV = |(h_1du_1\boldsymbol{e}_1)\cdot(h_2du_2\boldsymbol{e}_2)\times(h_3du_3\boldsymbol{e}_3)| = h_1h_2h_3du_1du_2du_3. \tag{22}$$

上式也可写成:

$$dV = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}\right|du_1du_2du_3 = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}\right|du_1du_2du_3, \tag{23}$$

其中$\partial(x,y,z)/\partial(u_1,u_2,u_3)$为变换的雅可比式.

显然,当雅可比式为零时,平行六面体便不存在,这就是第六章中提及过的雅可比式为零的几何意义.

正交曲线坐标中的梯度,散度,旋度和拉普拉斯算符

如果 Φ 和$\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3$ 分别为正交曲线坐标 u_1,u_2,u_3 的纯量函数和向量函数,则有下列结果:

1. $\nabla\Phi = \text{grad}\Phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\boldsymbol{e}_3,$

2. $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \text{div}\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right],$

3. $\nabla\times\boldsymbol{A}=\mathrm{curl}\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}$,

4. $\nabla^2\Phi=\Phi$ 的拉普拉斯值

$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\right)\right].$$

如果由(x,y,z)代替(u_1,u_2,u_3),此时 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 由 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 代替且$h_1=h_2=h_3=1$,则上述各式简化为通常直角坐标下的表达式.

特殊曲线坐标

1.柱坐标(ρ,ϕ,z),见图 7-10.

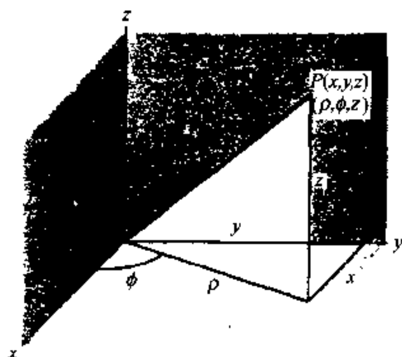


图 7-10

变换方程:

$$x=\rho\cos\phi,y=\rho\sin\phi,z=z,$$

其中 $\rho\geqslant0,0\leqslant\phi<2\pi,-\infty<z<+\infty$.

比例因子:$h_1=1,h_2=\rho,h_3=1$.

弧长元素:$ds^2=d\rho^2+\rho^2d\phi^2+dz^2$. 雅可比式:$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,z)}=\rho$.

体积元素:$dV=\rho\,d\rho\,d\phi\,dz$.

拉普拉斯值:

$$\nabla^2U=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2U}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}$$

$$=\frac{\partial^2U}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2U}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}.$$

注意:略去对 z 的依赖,便可获得平面上极坐标下的对应结果. 在此情况下,例如,$ds^2=d\rho^2+\rho^2d\phi^2$,而体积元素由面积元素 $dA=\rho\,d\rho\,d\phi$ 代替.

2.球坐标(r,θ,ϕ). 见图 7-11. 变换方程:

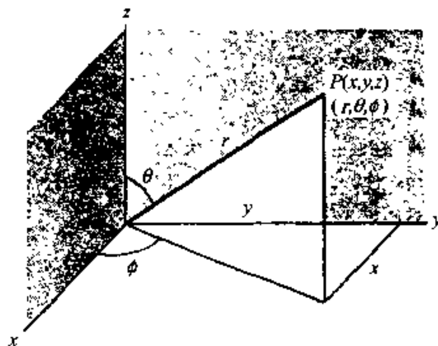


图 7-11

$$x=r\sin\theta\cos\phi,y=r\sin\theta\sin\phi,z=r\cos\theta,$$

其中 $r\geqslant0,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\phi<2\pi$.

比例因子:$h_1=1,\ h_2=r,\ h_3=r\sin\theta$.

弧长元素:

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2.$$

雅可比式:$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=r^2\sin\theta$.

体积元素:$dV=r^2\sin\theta drd\theta d\phi$.

拉普拉斯值:$\nabla^2U=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial U}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}$ $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\times\left(\sin\theta\dfrac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2U}{\partial\phi^2}$. 还可有其他类型的坐标系.

习题与解答

向量代数

1. 证明：向量加法是可交换的，即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

证明 ☞　如图 7-12.

$\boldsymbol{OP}+\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{OQ}$ 或 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，

且 $\boldsymbol{OR}+\boldsymbol{RQ}=\boldsymbol{OQ}$ 或 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$.

故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

2. 证明：向量加法是可结合的，即 $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$.

证明 ☞　如图 7-13.

$$\boldsymbol{OP}+\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{OQ}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\text{ 且 }\boldsymbol{PQ}+\boldsymbol{QR}=\boldsymbol{PR}=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}).$$

由于　$\boldsymbol{OP}+\boldsymbol{PR}=\boldsymbol{OR}=\boldsymbol{D}$，即 $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{D}$，

　　$\boldsymbol{OQ}+\boldsymbol{QR}=\boldsymbol{OR}=\boldsymbol{D}$，即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$，

故　$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$.

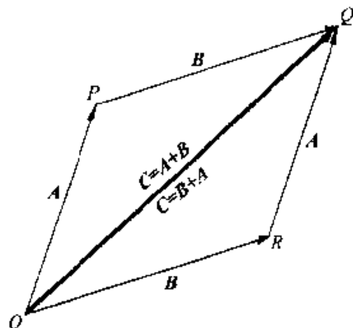


图 7-12

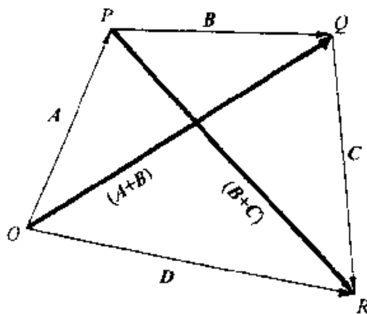


图 7-13

习题 1 和 2 结论的推广表明：任意有限个向量相加，其次序是无关紧要的.

3. 一人驾驶汽车先向正北方向行驶了 3 公里，然后又向东北方向行驶了 5 公里，如图 7-14 所示. 作图表示这些位移并分别用(a)几何方法和(b)分析方法确定这两个位移的合成位移.

解 ☞　用向量 $\boldsymbol{OP}$ 或 $\boldsymbol{A}$ 表示向正北方向 3 公里的位移，$\boldsymbol{PQ}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 表示向东北方向 5 公里的位移，向量 $\boldsymbol{OQ}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 表示所求的合成位移或向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的和，即 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，这是向量加法的三角形法则.

合成向量 $\boldsymbol{OQ}$ 也可以通过作以 $\boldsymbol{OP}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{OR}$(等于向量 $\boldsymbol{PQ}$ 或 $\boldsymbol{B}$)为边的平行四边形 $OPQR$ 的对角线获得. 这是向量加法的平行四边形法则.

(a) 合成的图形确定法. 在向量 $\boldsymbol{OQ}$ 上标出 1 公里单位，便可求出其大小约为 7.4 公里. 用量角器求出角 $EOQ=61.5^\circ$. 故向量 $\boldsymbol{OQ}$ 的大小为 7.4 公里，方向为由东向北 61.5°角.

(b) 合成的分析确定法. 在三角形 OPQ 中，将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的大小记为 A,B,C，利用余弦定理得 $C^2=A^2+B^2-2AB\cdot\cos\angle OPQ=3^2+5^2-2(3)(5)\cos(135^\circ)=34+15\sqrt{2}=55.21$，且 $C=7.43$(近似).

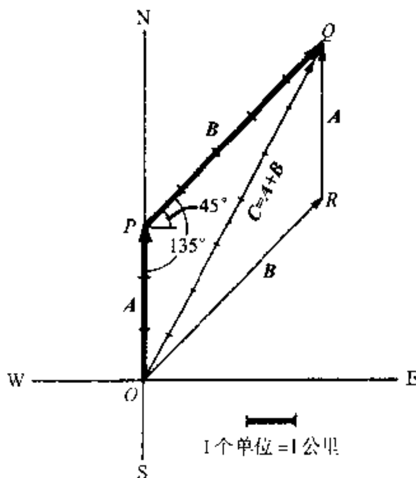


图 7-14

由正弦定理，$\dfrac{A}{\sin\angle OQP}=\dfrac{C}{\sin\angle OPQ}$. 故

$$\sin\angle OQP = \frac{A\sin\angle OPQ}{C} = \frac{3(0.707)}{7.43} = 0.2855 \text{ 且 } \angle OPQ = 16°35'.$$

因此,向量 OQ 的大小为 7.43 公里,方向为由东向北$(45° + 16°35') = 61°35'$角.

4. 证明:如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线,则当 $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ 时,$x = y = 0$.

证明 ☞　假设 $x \neq 0$,则由 $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ 得 $x\boldsymbol{a} = -y\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a} = -(y/x)\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行于同一条直线(共线),与假设矛盾. 因此 $x = 0$;于是 $y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$,由此得 $y = 0$.

5. 如果 $x_1\boldsymbol{a} + y_1\boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{a} + y_2\boldsymbol{b}$,其中 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线. 则 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$.

证明 ☞　$x_1\boldsymbol{a} + y_1\boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{a} + y_2\boldsymbol{b}$ 可改写为

$$x_1\boldsymbol{a} + y_1\boldsymbol{b} - (x_2\boldsymbol{a} + y_2\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0} \text{ 或 } (x_1 - x_2)\boldsymbol{a} + (y_1 - y_2)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

因此,由习题 4 得 $x_1 - x_2 = 0, y_1 - y_2 = 0$ 或 $x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

可将此结论作推广(见习题 49).

6. 证明:平行四边形的对角线互相平分.

证明 ☞　设 $ABCD$ 为给定的平行四边形,其对角线相交于 P 点,如图 7-15 所示.

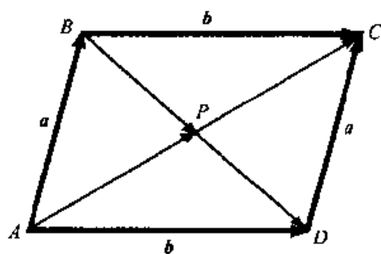


图 7-15

由于 $BD + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, $BD = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, 故 $BP = x(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$. 又 $AC = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $AP = y(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$. 但 $AB = AP + PB = AP - BP$,即

$\boldsymbol{a} = y(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - x(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = (x + y)\boldsymbol{a} + (y - x)\boldsymbol{b}$.

由于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线,故由习题 5 得 $x + y = 1$ 且 $y - x = 0$,即 $x = y = \frac{1}{2}$,因此 P 是两条对角线的中点.

7. 证明:三角形两边中点的连线平行于第三边,其长度为第三边的一半.

证明 ☞　由图 7-16,得 $AC + CB = AB$ 或 $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$.

设 $DE = \boldsymbol{d}$ 为 AC 和 CB 边中点的连线,则

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{DC} + \boldsymbol{CE} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{c}.$$

因此,$\boldsymbol{d}$ 平行于 $\boldsymbol{c}$ 且长度为 $\boldsymbol{c}$ 的一半.

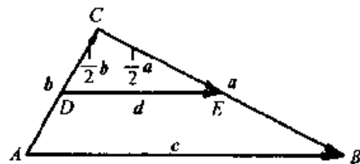


图 7-16

8. 证明:向量 $\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k}$ 的大小 A 为 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$.

证明 ☞　如图 7-17,根据勾股定理得

$$(\overline{OP})^2 = (\overline{OQ})^2 + (\overline{QP})^2,$$

其中 $\overline{OP}$ 表示向量 $\boldsymbol{OP}$ 的大小,等等. 类似地有 $(OQ)^2 = (\overline{OR})^2 + (RQ)^2$. 故 $(\overline{OP})^2 = (\overline{OR})^2 + (\overline{RQ})^2 + (\overline{QP})^2$ 或 $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$,即 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$.

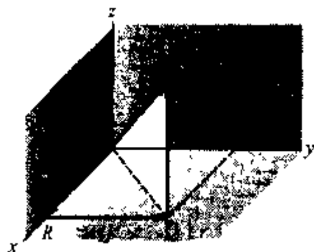


图 7-17

9. 确定以点 $P(x_1, y_1, z_1)$ 为起点. 以点 $Q(x_2, y_2, z_2)$ 为终点的向量并求其大小,如图 7-18.

解 ☞　P 的位置向量 $\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$. Q 的位置向量 $\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$. $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{PQ} = \boldsymbol{r}_2$. 或

$$\boldsymbol{PQ} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k})$$
$$= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}.$$

$\boldsymbol{PQ}$ 的大小 $= \overline{PQ}$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

注意:这是 P 和 Q 两点之间的距离.

点积或纯量积

10. 证明：A 在 B 上的投影等于 $A\cdot b$，其中 b 是 B 方向上的单位向量.

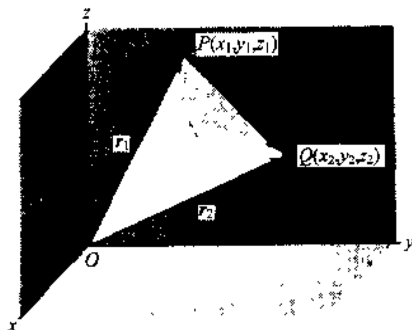


图 7-18

证明 ☞　如图 7-19 所示，分别过 $\boldsymbol{A}$ 的起点、终点作垂直于 $\boldsymbol{B}$ 的平面，交点为 G、H；则

$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的投影 $=\overline{GH}=\overline{EF}=A\cos\theta=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{b}$.

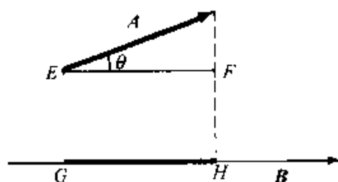


图 7-19

11. 证明：$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$

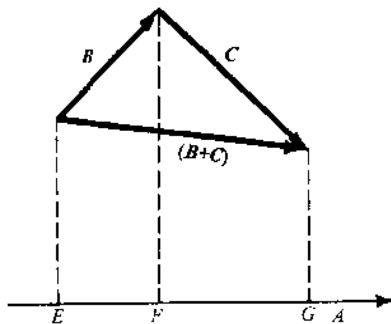


图 7-20

证明 ☞　如图 7-20 所示，设 $\boldsymbol{a}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 方向上的单位向量，则 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 上的投影 $=\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 上的投影 $+\boldsymbol{C}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 上的投影，即 $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{a}$，同乘以 A 得 $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\cdot A\boldsymbol{a}=\boldsymbol{B}\cdot A\boldsymbol{a}+\boldsymbol{C}\cdot A\boldsymbol{a}$，即 $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}$，故由点积的交换律得 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$，从而分配律成立.

12. 证明：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}$.

证明 ☞　由习题 11，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})+\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}$.
普通的代数运算法则对点积都是成立的.

13. 求下列各式的值：

(a) $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=|\boldsymbol{i}||\boldsymbol{i}|\cos0°=(1)(1)(1)=1$,

(b) $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=|\boldsymbol{i}||\boldsymbol{k}|\cos90°=(1)(1)(0)=0$,

(c) $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{j}|\cos90°=(1)(1)(0)=0$,

(d) $\boldsymbol{j}\cdot(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}$
$=0-3+0=-3$,

(e) $(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})\cdot(3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})=2\boldsymbol{i}\cdot(3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})-\boldsymbol{j}\cdot(3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})$
$=6\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}-3\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}$
$=6+0-0-0=6$.

14. 若 $\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k}$ 且 $\boldsymbol{B}=B_1\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+B_3\boldsymbol{k}$，证明：$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3$.

证明 ☞　由于 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$ 且所有其他的两两点积全为零，故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}&=(A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k})\cdot(B_1\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+B_3\boldsymbol{k})\\&=A_1\boldsymbol{i}\cdot(B_1\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+B_3\boldsymbol{k})+A_2\boldsymbol{j}\cdot(B_1\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+B_3\boldsymbol{k})+A_3\boldsymbol{k}\cdot(B_1\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+B_3\boldsymbol{k})\\&=A_1B_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+A_1B_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+A_1B_3\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+A_2B_1\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+A_2B_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+A_2B_3\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+A_3B_1\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+A_3B_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+A_3B_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3.\end{aligned}$$

15. 若 $\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k}$，证明：$A=\sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}=\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}$.

证明 ☞　$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=(A)(A)\cos0°=A^2$，故 $A=\sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$.

又由习题 14 并取 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，得

$$A\cdot A=(A_1 i+A_2 j+A_3 k)\cdot(A_1 i+A_2 j+A_3 k)$$
$$=(A_1)(A_1)+(A_2)(A_2)+(A_3)(A_3)=A_1^2+A_2^2+A_3^2,$$

于是,A 的大小$A=\sqrt{A\cdot A}=\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}$. 有时将 $A\cdot A$ 记为A^2.

叉积或向量积

16. 证明:$A\times B=-B\times A$.

证明 ☞ $A\times B=C$ 的大小为$AB\sin\theta$,其方向使 A,B 和C形成右手系(图 7-21(a)).

$B\times A=D$ 的大小为$BA\sin\theta$,其方向使 B,A 和D 形成右手系(图 7-21(b)).

因此,D 与C 大小相同但方向相反,即 $C=-D$ 或$A\times B=-B\times A$.

叉积的交换律不成立.

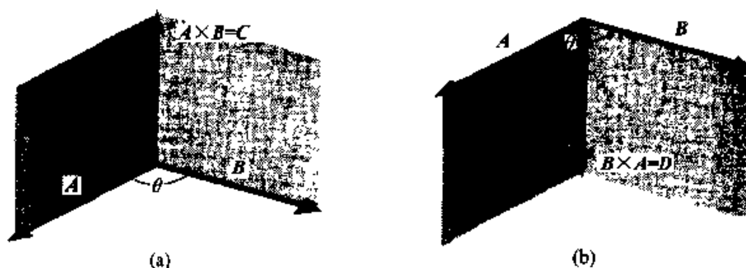


图 7-21

17. 就 A 垂直于B 又垂直于C 的情形. 证明:$A\times(B+C)=A\times B+A\times C$.

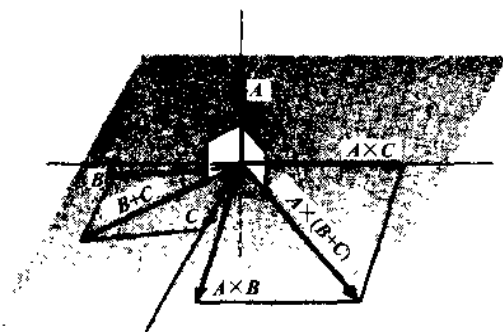


图 7-22

证明 ☞ 由于 A 垂直于B,故向量 $A\times B$ 垂直于 A 和 B 所在的平面. 其大小为 $AB\sin 90°=AB$ 或等于AB 的大小. 这相当于用 A 乘以B 并将所得向量旋转 90°至如图 7-22 所示位置.

类似于,$A\times C$ 可通过用A 乘以C 并将所得向量旋转 90°至所示位置.

同样,$A\times(B+C)$可通过用 A 乘以$B+C$ 并将所得向量旋转 90°至所示位置.

由于 $A\times(B+C)$是以 $A\times B$ 和$A\times C$ 为边的平行四边形的对角线,故

$$A\times(B+C)=A\times B+A\times C.$$

18. 对 A,B,C 不共面这一更一般情形,证明:

$$A\times(B+C)=A\times B+A\times C.$$

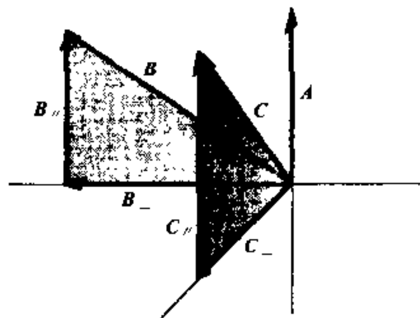


图 7-23

证明 ☞ 如图 7-23,将 B 分解成两个分向量,一个垂直于 A,另一个平行于 A,并分别记为 $B_\perp$ 和 $B_\parallel$,则 $B=B_\perp+B_\parallel$.

如 θ 是A 与B 的夹角,则 $B_\perp=B\sin\theta$,因而 $A\times B_\perp$ 的大小为 $AB\sin\theta$,与 $A\times B$ 的大小相同. 又 $A\times B_\perp$ 的方向与 $A\times B$ 的方向一致. 故 $A\times B_\perp=A\times B$.

类似地,如 C 分解成两个分向量$C_\parallel$ 和 $C_\perp$,分别平行、垂直于 A,则 $A\times C_\perp=A\times C$.

又因为 $B+C=B_\perp+B_\parallel+C_\perp+C_\parallel=(B_\perp+C_\perp)+(B_\parallel$

$+C_{\perp})$，因而可得 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}_{\perp}+\boldsymbol{C}_{\perp})=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

现在 $\boldsymbol{B}_{\perp}$ 和 $\boldsymbol{C}_{\perp}$ 都垂直于 $\boldsymbol{A}$，故由习题 17 得

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}_{\perp}+\boldsymbol{C}_{\perp})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}_{\perp}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}_{\perp}.$$

于是，$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$，故分配律成立.

将该式乘以 -1，并利用习题 16，便成为 $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}$. 值得注意的是：叉积中因子的次序是至关重要的. 只有在原有次序得以保持的情况下，才能将普通的代数运算法则应用于叉积.

19. 如 $\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}-A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k}$，且 $\boldsymbol{B}=B_1\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+B_3\boldsymbol{k}$，证明：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\A_1&A_2&A_3\\B_1&B_2&B_3\end{vmatrix}.$$

证明 ☞ $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k})\times(B_1\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+B_3\boldsymbol{k})$

$$\begin{aligned}&=A_1\boldsymbol{i}\times(B_1\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+B_3\boldsymbol{k})+A_2\boldsymbol{j}\times(B_1\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+B_3\boldsymbol{k})+A_3\boldsymbol{k}\times(B_1\boldsymbol{i}\\&\quad+B_2\boldsymbol{j}+B_3\boldsymbol{k})\\&=A_1B_1\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+A_1B_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+A_1B_3\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+A_2B_1\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+A_2B_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+A_2B_3\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}\\&\quad+A_3B_1\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+A_3B_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+A_3B_3\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\\&=(A_2B_3-A_3B_2)\boldsymbol{i}+(A_3B_1-A_1B_3)\boldsymbol{j}+(A_1B_2-A_2B_1)\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\A_1&A_2&A_3\\B_1&B_2&B_3\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

20. 若 $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 且 $\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$.

解 ☞

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&2\\2&3&-1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}-1&2\\3&-1\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}3&2\\2&-1\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}3&-1\\2&3\end{vmatrix}$$

$$=-5\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k}$$

21. 证明：以 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为边的平行四边形的面积为 $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$.

证明 ☞ 平行四边形面积 $=h|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\sin\theta|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$.

注意：以 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为边的三角形的面积为 $\frac{1}{2}|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$.

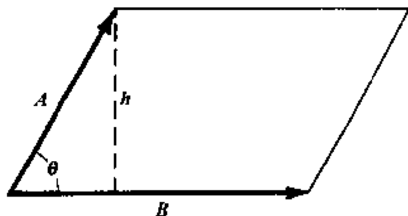


图 7-24

22. 求以 $P(2,3,5)$，$Q(4,2,-1)$，$R(3,6,4)$ 为顶点的三角形的面积.

解 ☞ $\boldsymbol{PQ}=(4-2)\boldsymbol{i}+(2-3)\boldsymbol{j}+(-1-5)\boldsymbol{k}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{PR}=(3-2)\boldsymbol{i}+(6-3)\boldsymbol{j}+(4-5)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$

故三角形面积 $=\frac{1}{2}|\boldsymbol{PQ}\times\boldsymbol{PR}|=\frac{1}{2}|(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k})\times(\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})|$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -1 & -6\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|19\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(19)^2+(-4)^2+(7)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{426}.$$

三重积



图 7-25

23. 证明：$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 的绝对值等于以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为棱的平行六面体的体积.

证明 ☞　设 $\boldsymbol{n}$ 是平行四边形 Ⅰ 的单位法向量. 方向同 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$，且 h 为 $\boldsymbol{A}$ 的终点在平行四边形 Ⅰ 上方的高度.

平行六面体的体积 = (高度 h)(平行四边形 Ⅰ 的面积)

$$=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})(|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}|)$$

$$=\boldsymbol{A}\cdot\{|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}|\boldsymbol{n}\}=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}).$$

如 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 不形成右手系，则 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}<0$，而平行六面体体积 $=|\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})|$.

24. 若 $\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k},\boldsymbol{B}=B_1\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+B_3\boldsymbol{k},\boldsymbol{C}=C_1\boldsymbol{i}+C_2\boldsymbol{j}+C_3\boldsymbol{k}$，

证明：

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}.$$

证明 ☞　$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$

$$=(A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k})\cdot[(B_2C_3-B_3C_2)\boldsymbol{i}+(B_3C_1-B_1C_3)\boldsymbol{j}+(B_1C_2-B_2C_1)\boldsymbol{k}]$$

$$=A_1(B_2C_3-B_3C_2)+A_2(B_3C_1-B_1C_3)+A_3(B_1C_2-B_2C_1)$$

$$=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}.$$

25. 求以 $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 为棱的平行六面体的体积.

解 ☞　由习题 23 和 24 得，

平行六面体的体积 $=|\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})|=\left|\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 5 & 4\end{vmatrix}\right|=|-20|=20.$

26. 证明：$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$，即点和叉可交换.

证明 ☞　由习题 24：$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$，

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix}C_1 & C_2 & C_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}.$$

由于这两个行列式相等,故有所求结论.

27. 设 $\boldsymbol{r}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_2=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_3=x_3\boldsymbol{i}+y_3\boldsymbol{j}+z_3\boldsymbol{k}$ 为点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$和 $P_3(x_3,y_3,z_3)$的位置向量. 求过点 P_1,P_2,P_3 的平面的方程.

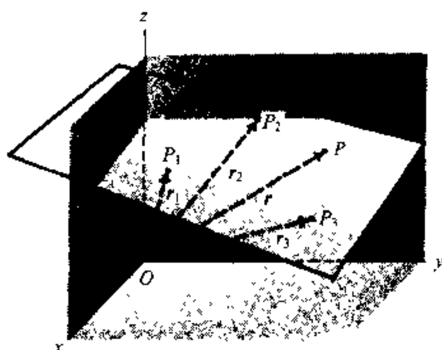


图 7-26

解☞　如图7-26,假设 P_1,P_2,P_3 不位于同一直线上;则它们确定了一个平面.

设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 表示该平面上任一点$P(x,y,z)$的位置向量. 考虑向量 $\boldsymbol{P_1P_2}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{P_1P_3}=\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{P_1P}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1$,这三个向量都位于所求平面上,故

$$\boldsymbol{P_1P}\cdot\boldsymbol{P_1P_2}\times\boldsymbol{P_1P_3}=0,$$

或 $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\cdot(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)=0$,借助于直角坐标得

$$[(x-x_1)\boldsymbol{i}+(y-y_1)\boldsymbol{j}+(z-z_1)\boldsymbol{k}]\cdot[(x_2-x_1)\boldsymbol{i}$$

$$+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}]\times[(x_3-x_1)\boldsymbol{i}+(y_3-y_1)\boldsymbol{j}+(z_3-z_1)\boldsymbol{k}]=0,$$

或利用习题24,得

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0.$$

28. 求过点 $P_1(3,1,-2)$, $P_2(-1,2,4)$, $P_3(2,-1,1)$的平面的方程.

解☞　P_1, P_2, P_3 及平面上任一点 $P(x,y,z)$的位置向量分别为

$$\boldsymbol{r}_1=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}_2=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}_3=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}=x_i+y_j+z\boldsymbol{k},$$

则 $\boldsymbol{PP}_1=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{P_2P_1}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{P_3P_1}=\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1$ 均位于所求平面上,因此所求方程为$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\cdot(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)=0$,即

$$\{(x-3)\boldsymbol{i}+(y-1)\boldsymbol{j}+(z+2)\boldsymbol{k}\}\cdot\{-4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}\}\times\{-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}\}=0,$$

$$\{(x-3)\boldsymbol{i}+(y-1)\boldsymbol{j}+(z+2)\boldsymbol{k}\}\cdot\{15\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}\}=0,$$

$$15(x-3)+6(y-1)+9(z+2)=0\ 或\ 5x+2y+3z=11.$$

另一解法:由习题27,所求方程为

$$\begin{vmatrix}x-3 & y-1 & z+2\\ -1-3 & 2-1 & 4+2\\ 2-3 & -1-1 & 1+2\end{vmatrix}=0\ 或\ 5x+2y+3z=11.$$

29. 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{C}=4\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$,求:(a) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$, (b) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$.

解☞　(a) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$,故$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -1 & -5\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=23\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$.

(b) $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=5\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$,故 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 5 & 6 & 8\end{vmatrix}=8\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

由此推出:一般$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$.

导数

30. 若 $\boldsymbol{r}=(t^3+2t)\boldsymbol{i}-3e^{-2t}\boldsymbol{j}+2\sin 5t\boldsymbol{k}$，求 $t=0$ 时的(a) $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$，(b) $\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$，(c) $\left|\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|$，(d) $\left|\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|$，并给出可能的物理意义.

解 ☞ (a) $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\dfrac{d}{dt}(t^3+2t)\boldsymbol{i}+\dfrac{d}{dt}(-3e^{-2t})\boldsymbol{j}+\dfrac{d}{dt}(2\sin 5t)\boldsymbol{k}=(3t^2+2)\boldsymbol{i}+6e^{-2t}\boldsymbol{j}+10\cos 5t\boldsymbol{k}$，当 $t=0$ 时，$d\boldsymbol{r}/dt=2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}$.

(b) 由(a)，$|d\boldsymbol{r}/dt|=\sqrt{(2)^2+(6)^2+(10)^2}=\sqrt{140}=2\sqrt{35}$ ($t=0$ 时).

(c) $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)=\dfrac{d}{dt}\{(3t^2+2)\boldsymbol{i}+6e^{-2t}\boldsymbol{j}+10\cos 5t\boldsymbol{k}\}=6t\boldsymbol{i}-12e^{-2t}\boldsymbol{j}-50\sin 5t\boldsymbol{k}$，当 $t=0$ 时，$d^2\boldsymbol{r}/dt^2=-12\boldsymbol{j}$.

(d) 由(c)，当 $t=0$ 时，$|d^2\boldsymbol{r}/dt^2|=12$.

如 t 代表时间，则这些量分别表示沿空间曲线 $x=t^3+2t$，$y=-3e^{-2t}$，$z=2\sin 5t$ 运动的质点在 $t=0$ 时的速度、速度的大小、加速度及加速度的大小.

31. 证明：$\dfrac{d}{du}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}+\dfrac{d\boldsymbol{B}}{du}+\dfrac{d\boldsymbol{A}}{du}\cdot\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 u 的可微函数.

证明 ☞ **证法1**

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})&=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{\Delta u}\\&=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{B}}{\Delta u}\\&=\lim_{\Delta u\to 0}\left(\boldsymbol{A}\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{B}}{\Delta u}+\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta u}\cdot\boldsymbol{B}+\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta u}\cdot\Delta\boldsymbol{B}\right)=\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{du}+\frac{d\boldsymbol{A}}{du}\cdot\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

证法2 设 $\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{B}=B_1\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+B_3\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})&=\frac{d}{du}(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)\\&=\left(A_1\frac{dB_1}{du}+A_2\frac{dB_2}{du}+A_3\frac{dB_3}{du}\right)+\left(\frac{dA_1}{du}B_1+\frac{dA_2}{du}B_2+\frac{dA_3}{du}B_3\right)\\&=\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{du}+\frac{d\boldsymbol{A}}{du}\cdot\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

32. 若 $\phi(x,y,z)=x^2yz$，$\boldsymbol{A}=3x^2y\boldsymbol{i}+yz^2\boldsymbol{j}-xz\boldsymbol{k}$，在点$(1,-2,-1)$求 $\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial z}(\phi\boldsymbol{A})$.

解 ☞ $\phi\boldsymbol{A}=(x^2yz)(3x^2y\boldsymbol{i}+yz^2\boldsymbol{j}-xz\boldsymbol{k})=3x^4y^2z\boldsymbol{i}+x^2y^2z^3\boldsymbol{j}-x^3yz^2\boldsymbol{k}$，

$\dfrac{\partial}{\partial z}(\phi\boldsymbol{A})=\dfrac{\partial}{\partial z}(3x^4y^2z\boldsymbol{i}+x^2y^2z^3\boldsymbol{j}-x^3yz^2\boldsymbol{k})=3x^4y^2\boldsymbol{i}+3x^2y^2z^2\boldsymbol{j}-2x^3yz\boldsymbol{k}$，

$\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial z}(\phi\boldsymbol{A})=\dfrac{\partial}{\partial y}(3x^4y^2\boldsymbol{i}+3x^2y^2z^2\boldsymbol{j}-2x^3yz\boldsymbol{k})=6x^4y\boldsymbol{i}+6x^2yz^2\boldsymbol{j}-2x^3z\boldsymbol{k}$，

当 $x=1, y=-2, z=-1$ 时，$\dfrac{\partial}{\partial y\partial z}(\phi\boldsymbol{A})=-12\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$.

33. 若 $\boldsymbol{A}=x^2\sin y\boldsymbol{i}+z^2\cos y\boldsymbol{j}-xy^2\boldsymbol{k}$，求 dA.

解 ☞ **解法1**

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}=2x\sin y\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{k},\ \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}=x^2\cos y\boldsymbol{i}-z^2\sin y\boldsymbol{j}-2xy\boldsymbol{k},\ \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}=2z\cos y\boldsymbol{i},$$

$$\begin{aligned}dA&=\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}dx+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}dy+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}dz\\&=(2x\sin y\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{k})dx+(x^2\cos y\boldsymbol{i}-z^2\sin y\boldsymbol{j}-2xy\boldsymbol{k})dy+(2z\cos y\boldsymbol{j})dz\\&=(2x\sin y dx+x^2\cos y dy)\boldsymbol{i}+(2z\cos y dz-z^2\sin y dy)\boldsymbol{j}-(y^2dx+2xy dy)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

解法 2

$$dA = d(x^2\sin y)\boldsymbol{i} + d(z^2\cos y)\boldsymbol{j} - d(xy^2)\boldsymbol{k}$$

$$= (2x\sin y dx + x^2\cos y dy)\boldsymbol{i} + (2z\cos y dz - z^2\sin y dy)\boldsymbol{j} - (y^2dx + 2xydy)\boldsymbol{k}.$$

梯度,散度和旋度

34. 若 $\phi = x^2yz^3$ 且 $\boldsymbol{A} = xz\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + 2x^2y\boldsymbol{k}$,求:(a) $\nabla\phi$, (b) $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$,(c) $\nabla\times\boldsymbol{A}$, (d) $\mathrm{div}(\phi\boldsymbol{A})$, (e) $\mathrm{curl}(\phi\boldsymbol{A})$.

解 ☞ (a) $\nabla\phi = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz^3)\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}(x^2yz^3)\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz^3)\boldsymbol{k} = 2xyz^3\boldsymbol{i} + x^2z^3\boldsymbol{j} + 3x^2yz^2\boldsymbol{k}.$$

(b) $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(xz\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + 2x^2y\boldsymbol{k})$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2x^2y) = z - 2y.$$

(c) $\nabla\times\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(xz\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + 2x^2y\boldsymbol{k})$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz & -y^2 & 2x^2y \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(2x^2y) - \frac{\partial}{\partial z}(-y^2)\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(xz) - \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y)\right)\boldsymbol{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right)\boldsymbol{k}$$

$$= 2x^2\boldsymbol{i} + (x - 4xy)\boldsymbol{j}.$$

(d) $\mathrm{div}(\phi\boldsymbol{A}) = \nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) = \nabla\cdot(x^3yz^4\boldsymbol{i} - x^2y^3z^3\boldsymbol{j} + 2x^4y^2z^3\boldsymbol{k})$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^3yz^4) + \frac{\partial}{\partial y}(-x^2y^3z^3) + \frac{\partial}{\partial z}(2x^4y^2z^3)$$

$$= 3x^2yz^4 - 3x^2y^2z^3 + 6x^4y^2z^2.$$

(e) $\mathrm{curl}(\phi\boldsymbol{A}) = \nabla\times(\phi\boldsymbol{A}) = \nabla\times(x^3yz^4\boldsymbol{i} - x^2y^3z^3\boldsymbol{j} + 2x^4y^2z^3\boldsymbol{k})$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{i} & \boldsymbol{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^3yz^4 & -x^2y^3z^3 & 2x^4y^2z^3 \end{vmatrix}$$

$$= (4x^4yz^3 + 3z^2y^3z^2)\boldsymbol{i} + (4x^3yz^3 - 8x^3y^2z^3)\boldsymbol{j} - (2xy^3z^3 + x^3z^4)\boldsymbol{k}.$$

35. 证明:$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) = (\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{A} + \phi(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$.

证明 ☞ $\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) = \nabla\cdot(\phi A_1\boldsymbol{i} + \phi A_2\boldsymbol{j} + \phi A_3\boldsymbol{k})$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_3)$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}A_1 + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_2 + \frac{\partial\phi}{\partial z}A_3 + \phi\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k}) + \phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

$$\cdot(A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k})$$

$$= (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A} + \phi(\nabla\cdot\mathbf{A}).$$

36. 证明：$\nabla\phi$ 是一个与曲面 $\phi(x, y, z)=c$ 垂直的向量，其中 c 为一常数.

证明 ☞　设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 是曲面上任一点 $P(x, y, z)$ 的位置向量，则 $d\boldsymbol{r}=dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}+dz\boldsymbol{k}$ 位于该曲面在 P 点的切平面上. 但 $d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz=0$，或 $\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}+dz\boldsymbol{k})=0$，即 $\nabla\phi\cdot d\boldsymbol{r}=0$，故 $\nabla\phi$ 垂直于 $d\boldsymbol{r}$，因而垂直于曲面.

37. 求曲面 $2x^2+4yz-5z^2=-10$ 在点 $P(3, -1, 2)$ 处的单位法向量.

解 ☞　由习题 36，曲面在 $(3, -1, 2)$ 处的一法向量为

$$\nabla(2x^2+4yz-5z^2)=4x\boldsymbol{i}+4z\boldsymbol{j}+(4y-10z)\boldsymbol{k}=12\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}.$$

因此，曲面在 P 点的一个单位法向量为 $\frac{12\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}}{\sqrt{(12)^2+(8)^2+(-24)^2}}=\frac{3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}}{7}$.

曲面在 P 点的另一个单位法向量为 $-\frac{3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}}{7}$.

38. 若 $\phi=2x^2y-xz^3$，求：(a) $\nabla\phi$，(b) $\nabla^2\phi$.

解 ☞　(a) $\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}=(4xy-z^3)\boldsymbol{i}+2x^2\boldsymbol{j}-3xz^2\boldsymbol{k}$.

(b) $\nabla^2\phi=\phi$ 的拉普拉斯值 $=\nabla\cdot\nabla\phi=\frac{\partial}{\partial x}(4xy-z^3)+\frac{\partial}{\partial y}(2x^2)+\frac{\partial}{\partial z}(-3xz^2)=4y-6xz$.

另一解法　
$$\begin{aligned}\nabla^2\phi&=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\\&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(2x^2y-xz^3)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(2x^2y-xz^3)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(2x^2y-xz^3)\\&=4y-6xz.\end{aligned}$$

39. 证明：$\text{divcurl}\mathbf{A}=0$.

证明 ☞　
$$\begin{aligned}\text{divcurl}\mathbf{A}&=\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ A_1&A_2&A_3\end{vmatrix}\\&=\nabla\cdot\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\\&=\frac{\partial^2A_3}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2A_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2A_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2A_3}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2A_2}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2A_1}{\partial z\partial y}\\&=0.\end{aligned}$$

（假定 $\mathbf{A}$ 有连续的二阶偏导数，则求导次序可不计）.

雅可比式和曲线坐标

40. 在(a)柱坐标，(b)球坐标下求 ds^2 并确定比例因子.

解 ☞　(a) **解法 1**　$x=\rho\cos\phi$，$y=\rho\sin\phi$，$z=z$

$$dx=-\rho\sin\phi d\phi+\cos\phi d\rho,\ dy=\rho\cos\phi d\phi+\sin\phi d\rho,\ dz=dz,$$

故
$$\begin{aligned}ds^2&=dx^2+dy^2+dz^2=(-\rho\sin\phi d\phi+\cos\phi d\rho)^2+(\rho\cos\phi d\phi+\sin\phi d\rho)^2+(dz)^2\\&=(d\rho)^2+\rho^2(d\phi)^2+(dz)^2=h_1^2(d\rho)^2+h_2^2(d\phi)^2+h_3^2(dz)^2\end{aligned}$$

且比例因子为 $h_1=h_\rho=1$，$h_2=h_\phi=\rho$，$h_3=h_z=1$.

解法 2 由于位置向量 $\boldsymbol{r}=\rho\cos\phi\boldsymbol{i}+\rho\sin\phi\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,故

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{r} &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}d\rho+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}d\phi+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}dz \\
&= (\cos\phi\boldsymbol{i}+\sin\phi\boldsymbol{j})d\rho+(-\rho\sin\phi\boldsymbol{i}+\rho\cos\phi\boldsymbol{j})d\phi+\boldsymbol{k}dz \\
&= (\cos\phi d\rho-\rho\sin\phi d\phi)\boldsymbol{i}+(\sin\phi d\rho+\rho\cos\phi d\phi)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}dz,
\end{aligned}
$$

因而, $ds^2=d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=(\cos\phi d\rho-\rho\sin\phi d\phi)^2+(\sin\phi d\rho+\rho\cos\phi d\phi)^2+(dz)^2$

$$=(d\rho)^2+\rho^2(d\phi)^2+(dz)^2.$$

(b) 由于 $x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\theta$,

故 $dx=-r\sin\theta\sin\phi d\phi+r\cos\theta\cos\phi d\theta+\sin\theta\cos\phi dr$,

$dy=r\sin\theta\cos\phi d\phi+r\cos\theta\sin\phi d\theta+\sin\theta\sin\phi dr$,

$dz=-r\sin\theta d\theta+\cos\theta dr$.

于是, $(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2=(dr)^2+r^2(d\theta)^2+r^2\sin^2\theta(d\phi)^2$,

比例因子为 $h_1=h_r=1$, $h_2=h_\theta=r$, $h_3=h_\phi=r\sin\theta$.

41. 求在(a)柱坐标,(b)球坐标下的体积元素 dV 并画出草图.

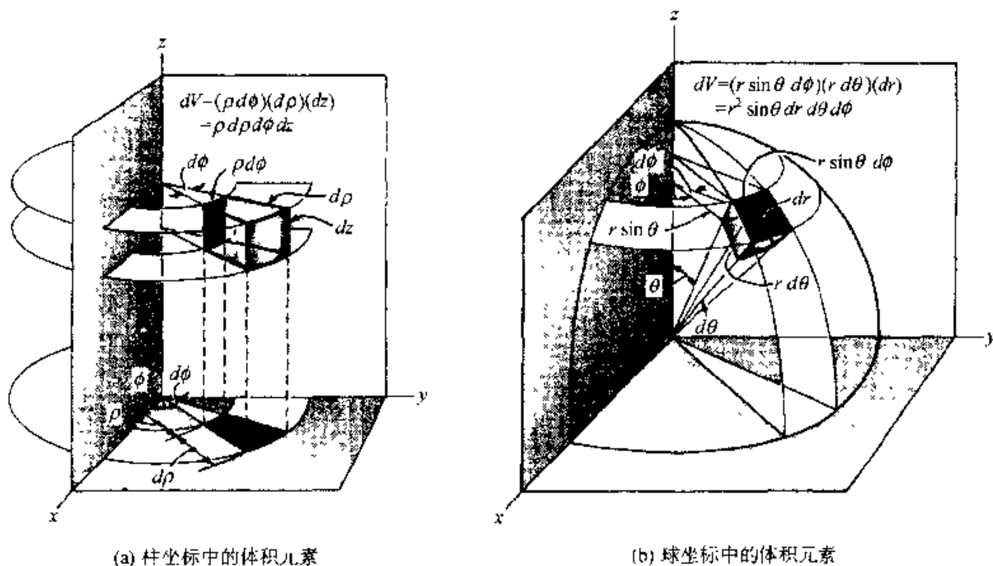
解 ☞ 由于在正交曲线坐标 u_1, u_2, u_3 下的体积元素为 $dV=h_1h_2h_3du_1du_2du_3=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}\right|du_1du_2du_3$. 于是,(a) 在柱坐标下,$u_1=\rho$, $u_2=\phi$, $u_3=z$, $h_1=1$, $h_2=\rho$, $h_3=1$ (见习题 40(a)),从而 $dV=(1)(\rho)(1)d\rho d\phi dz=\rho d\rho d\phi dz$.

这也可以由图 7-27(a)直接获得.

(b) 在球坐标下,$u_1=r$, $u_2=\theta$, $u_3=\phi$, $h_1=1$, $h_2=r$, $h_3=r\sin\theta$(见习题 40(b)),从而有

$$dV=(1)(r)(r\sin\theta)drd\theta d\phi=r^2\sin\theta drd\theta d\phi.$$

这也可以由图 7-27(b)直接获得.



(a) 柱坐标中的体积元素　　(b) 球坐标中的体积元素

图 7-27

42. 求(a) $\text{grad}\Phi$, (b) $\text{div}\boldsymbol{A}$, (c) $\nabla^2\Phi$ 在柱坐标下的表达式.

解 ☞ 在 p.138~p.139 结论 1,2,4 中设 $u_1=\rho$, $u_2=\phi$, $u_3=z$, $h_1=1$, $h_2=\rho$, $h_3=1$(见习题 40(a)),则

(a) $\text{grad}\Phi=\nabla\Phi=\frac{1}{1}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{1}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{e}_3=\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_2+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{e}_3$, 其中 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 分别是 ρ,

ϕ, z 增加方向上的单位向量.

$$(b)\ \operatorname{div}\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{(1)(\rho)(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}((\rho)(1)A_1)+\frac{\partial}{\partial\phi}((1)(1)A_2)+\frac{\partial}{\partial z}((1)(\rho)A_3)\right]$$

$$=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_1)+\frac{\partial A_2}{\partial\phi}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right],$$

其中 $\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{e}_1+A_2\boldsymbol{e}_2+A_3\boldsymbol{e}_3$.

$$(c)\ \nabla^2\Phi=\frac{1}{(1)(\rho)(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{(\rho)(1)}{(1)}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{(1)(1)}{(\rho)}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{(p)(\ )}{(1)}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

杂题

43. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 且 $f'(r)=df/dr$ 存在,证明:

证明 ☞

$$\operatorname{grad}f(r)=\frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r}.$$

$$\operatorname{grad}f(r)=\nabla f(r)=\frac{\partial}{\partial x}f(r)\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}f(r)\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial x}f(r)\boldsymbol{k}$$

$$=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{i}+f'(r)\frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{j}+f'(r)\frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$=f'(r)\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+f'(r)\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+f'(r)\frac{z}{r}\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{f'(r)}{r}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=\frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r}.$$

另一解法:在正交曲线坐标 u_1, u_2, u_3 下,我们有

$$\nabla\Phi=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\boldsymbol{e}_3. \tag{1}$$

特别对球坐标,有 $u_1=r,\ u_2=\theta,\ u_3=\phi$,故如令 $\Phi=f(r)$,即 Φ 仅是 r 的函数,得(1)右边的最后两项为零,注意到 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{r}/r$ 且 $h_1=1$. 便得结果

$$\nabla f(r)=\frac{1}{1}\frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{f'(r)}{r}=\boldsymbol{r}. \tag{2}$$

44. (a) 求 $\phi=f(r)$的拉普拉斯值,(b) 证明 $\phi=\dfrac{1}{r}$为拉普拉斯方程$\nabla^2\phi=0$ 的解.

解 ☞ (a) 由习题 43,$\nabla\phi=\nabla f(r)=\dfrac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r}$.

假定 $f(r)$有连续的二阶偏导数,并根据习题 35,得

$$\phi\text{ 的拉普拉斯值}=\nabla^2\phi=\nabla\cdot(\nabla\phi)=\nabla\cdot\left\{\frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r}\right\}$$

$$=\nabla\left\{\frac{f'(r)}{r}\right\}\cdot\boldsymbol{r}+\frac{f'(r)}{r}(\nabla\cdot\boldsymbol{r})$$

$$=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{\frac{f'(r)}{r}\right\}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}+\frac{f'(r)}{r} \tag{3}$$

$$=\frac{rf''(r)-f'(r)}{r^3}r^2+\frac{3f'(r)}{r}=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r).$$

另一解法　在球坐标下,我们有

$$\nabla^2U=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2U}{\partial\phi^2}.$$

如果 $U=f(r)$,则上式右边最后两项为零. 便得$\nabla^2f(r)=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}(r^2f'(r))=f''(r)+\dfrac{2}{r}f'(r)$.

(b) 由(a)中结果,得

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{2}{r^3}-\frac{2}{r^3}=0.$$

这说明 $1/r$ 是拉普拉斯方程的解.

45. 一质点沿空间曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 运动,其中 t 是从某初始时刻开始计时的时间. 如果 $v=|d\boldsymbol{r}/dt|=ds/dt$ 为质点速度的大小(s 为沿该空间曲线从某初始位置开始度量的弧长),证明:质点的加速度 $\boldsymbol{a}$ 由下式给出:

$$\boldsymbol{a}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{T}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{N},$$

其中 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 为空间曲线的单位切向量和法向量且

$$\rho=\left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right|^{-1}=\left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}^{-1/2}.$$

证明 ☞　质点的速度由 $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{T}$ 给出,故加速度由下式给出:

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(v\boldsymbol{T})=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{T}+v\frac{d\boldsymbol{T}}{dt}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{T}+v\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{T}+v^2\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}. \tag{1}$$

由于 $\boldsymbol{T}$ 为单位向量,故 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}=1$,对 s 求导得 $\boldsymbol{T}\cdot\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}+\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}\cdot\boldsymbol{T}=0, 2\boldsymbol{T}\cdot\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}=0$ 或 $\boldsymbol{T}\cdot\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}=0$.
由此推出 $d\boldsymbol{T}/ds$ 垂直于 $\boldsymbol{T}$. 将 $d\boldsymbol{T}/ds$ 方向上的单位向量记为 $\boldsymbol{N}$,称之为空间曲线的主法向,则

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}=\kappa\boldsymbol{N}, \tag{2}$$

其中 κ 为 $d\boldsymbol{T}/ds$ 的大小. 又由于 $\boldsymbol{T}=d\boldsymbol{r}/dt$(见 p.126 方程(9)),故 $d\boldsymbol{T}/ds=d^2\boldsymbol{r}/ds^2$,因而

$$\kappa=\left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right|=\left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}^{1/2}.$$

定义 $\rho=1/\kappa$, (2)成为 $d\boldsymbol{T}/ds=\boldsymbol{N}/\rho$. 于是,由(1)便得所求结果:

$$\boldsymbol{a}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{T}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{N}.$$

在 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 方向上的分量 dv/dt 和 v^2/ρ 称为加速度的切向和法向分量,后者有时也称为向心加速度. 量 ρ 和 κ 分别称为空间曲线的曲率半径和曲率.

补 充 习 题

向量代数

46. 任意给定两个向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$,说明等式 $4\boldsymbol{A}+3(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}$ 的几何意义.

47. 某人先向东北行走 25 公里,再向正东行走 15 公里,后向正南行走 10 公里. 通过适当比例用几何方法确定(a)此人距初始位置的距离,(b)相对于初始位置的方位. 能否用分析法确定所求答案?

48. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为任意两个不同方向的非零向量,证明向量 $m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{B}$ 位于由 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所确定的平面上.

49. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为不共面向量(不位于同一平面上的向量)且 $x_1\boldsymbol{A}+y_1\boldsymbol{B}+z_1\boldsymbol{C}=x_2\boldsymbol{A}+y_2\boldsymbol{B}+z_2\boldsymbol{C}$,证明必有 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$.

50. 设 $ABCD$ 为任一四边形. 其各边的中点依次为 P, Q, R, S. 证明:(a) $PQRS$ 为平行四边形,(b) $PQRS$ 的周长等于 $ABCD$ 的对角线的长度之和.

51. 证明:三角形的中线相交于一点,该点为每条中线的三等分点.

52. 求在向量 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{C}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 的和向量方向上的单位向量.

点积或纯量积

53. 若 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, 求$|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})|$的值.

54. 证明三角形的余弦定理[提示:取三条边为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$,其中 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$. 然后利用 $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$].

55. 求 a，使得 $2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 与 $3\boldsymbol{i}+a\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 垂直.

56. 若 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{C}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的投影.

57. 一三角形以 $A(2,3,1)$，$B(-1,1,2)$，$C(1,-2,3)$ 为顶点. 求：(a)由 B 向 AC 边所引中线的长度，(b)该中线与 BC 边所夹的锐角.

58. 证明：菱形的对角形互相垂直.

59. 证明：$(A\boldsymbol{B}+B\boldsymbol{A})/(A+B)$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的角平分线.

叉积或向量积

60. 若 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，求 $|(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B})|$.

61. 求垂直于向量 $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 所在平面的单位向量.

62. 若 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$，是否必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$?

63. 求顶点为 $(2,-3,1)$，$(1,-1,2)$，$(-1,2,3)$ 的三角形面积.

64. 求从点 $(3,2,1)$ 到由 $(1,1,0)$，$(3,-1,1)$，$(-1,0,2)$ 所确定的平面的最短距离.

三重积

65. 若 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求：(a) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$，(b) $\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$，(c) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$，(d) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$.

66. 证明：(a) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$，

(b) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$.

67. 求过点 $(2,-1,-2)$，$(-1,2,-3)$，$(4,1,0)$ 的平面方程.

68. 求顶点为 $(2,1,1)$，$(1,-1,2)$，$(0,1,-1)$，$(1,-2,1)$ 的四面体体积.

69. 证明：$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})+(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{D})+(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D})=0$.

导数

70. 一质点沿空间曲线 $\boldsymbol{r}=e^{-t}\cos t\boldsymbol{i}+e^{-t}\sin t\boldsymbol{j}+e^{-t}\boldsymbol{k}$ 运动，求在任一时刻 t (a)速度，(b)加速度的大小.

71. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 u 的可微函数，证明：

$$\frac{d}{du}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{du}+\frac{d\boldsymbol{A}}{du}\times\boldsymbol{B}.$$

72. 求与空间曲线 $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$ 在 $t=1$ 的点相切的单位向量.

73. 若 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\cos\omega t+\boldsymbol{b}\sin\omega t$，其中 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为任意不共线的常向量，ω 为常数，证明：

(a) $\boldsymbol{r}\times\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\omega(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，(b) $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}+\omega^2\boldsymbol{r}=0$.

74. 若 $\boldsymbol{A}=x^2\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{B}=y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}-xyz\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}+x^3z\boldsymbol{k}$，在点 $(1,-1,2)$ 处，求：

(a) $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$，(b) $d[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]$.

75. 若 $\boldsymbol{R}=x^2y\boldsymbol{i}-2y^2z\boldsymbol{j}+xy^2z^2\boldsymbol{k}$，在点 $(2.1,-2)$ 求 $\left|\dfrac{\partial^2\boldsymbol{R}}{\partial x^2}\times\dfrac{\partial^2\boldsymbol{R}}{\partial y^2}\right|$.

梯度，散度和旋度

76. 若 $U,V,\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有连续的偏导数，证明：

(a) $\nabla(U+V)=\nabla U+\nabla V$，(b) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla\cdot\boldsymbol{B}$，

(c) $\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times\boldsymbol{B}$.

77. 若 $\phi=xy+yz+zx$ 且 $\boldsymbol{A}=x^2y\boldsymbol{i}+y^2z\boldsymbol{j}+z^2x\boldsymbol{k}$，在点 $(3,-1,2)$ 处求：

(a) $\boldsymbol{A}\cdot\nabla\phi$，(b) $\phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 及(c) $(\nabla\phi)\times\boldsymbol{A}$.

78. 证明：$\nabla\times(r^2\boldsymbol{r})=0$，其中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 且 $r=|\boldsymbol{r}|$.

79. 证明：(a) $\nabla\times(U\boldsymbol{A})=(\nabla U)\times\boldsymbol{A}+U(\nabla\times\boldsymbol{A})$，

(b) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$.

80. 对 U 附加适当条件，证明 $\text{curl grad}\,U=0$.

81. 求曲面 $x^2y-2xz+2y^2z^4=10$ 在点 $(2,1,-1)$ 处的单位法向量.

82. 若 $\boldsymbol{A}=3xz^2\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+(x+2z)\boldsymbol{k}$，求 $\text{curl curl}\boldsymbol{A}$.

83. (a) 证明：$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=-\nabla^2\boldsymbol{A}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$. (b) 若 $\boldsymbol{A}$ 如习题 82 所给，验证(a)中结论.

雅可比式和曲线坐标

84. 证明：$\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}\right|=\left|\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_1}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_2}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u_3}\right|$.

85. 用球坐标表示:(a) $\mathrm{grad}\Phi$, (b) $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$, (c) $\nabla^2\Phi$.

86. 从直角坐标到抛物柱坐标的变换由方程 $x=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$, $y=uv$, $z=z$ 确定,(a) 证明抛物柱面坐标是正交的,(b) 求 ds^2 和比例因子,(c) 求变换的雅可比式和体积元素.

87. 在抛物柱坐标下,写出(a) $\nabla^2\Phi$ 和(b) $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$.

88. 对正交曲线坐标,证明:

$$\nabla\Phi=\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}+\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}+\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}$$

[提示:设 $\nabla\Phi=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$ 并利用事实:$d\Phi=\nabla\Phi\cdot d\boldsymbol{r}$ 在直角坐标和曲线坐标下都成立].

89. 用向量解释第六章习题 35 中的定理.

杂题

90. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 u 的可微函数且 $|\boldsymbol{A}(u)|=1$,证明 $\frac{d\boldsymbol{A}}{du}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 垂直.

91. 证明 p.127 中的公式 6,7,8.

92. 若 ρ 和 ϕ 是极坐标,A,B 和 n 为任意常数,证明 $U=\rho^n(A\cos n\phi+B\sin n\phi)$ 满足拉普拉斯方程.

93. 若 $V=\frac{2\cos\theta+3\sin^3\theta\cos\phi}{r^2}$,求 ∇^2V.

94. 求满足拉普拉斯方程的(a)柱坐标 ρ,(b)球坐标 r, (c)球坐标 θ 的最一般函数.

95. 设 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 分别表示空间曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)$ 的单位切向量和单位主法向量,这里假定 $\boldsymbol{r}(u)$ 可微. 定义向量 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$,称其为空间曲线的单位副法向量. 证明:

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}=\kappa\boldsymbol{N},\ \frac{d\boldsymbol{B}}{ds}=-\tau\boldsymbol{N},\ \frac{d\boldsymbol{N}}{ds}=\tau\boldsymbol{B}-\kappa\boldsymbol{T}.$$

这些公式称为弗莱纳-雪利(Frenet-Serret)公式,它们在微分几何中有着基础性的作用. 公式中的 κ 称为曲率,τ 称为挠率;而它们的倒数 $\rho=1/\kappa$,$\sigma=1/\tau$ 分别称为曲率半径和挠率半径.

96. (a) 设 $f(x)$ 可微,证明平面曲线 $y=f(x)$, $z=0$ 在任一点处的曲率半径为

$$\rho=\left|\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\right|.$$

(b) 求曲线 $y=\sin x$, $z=0$ 在点 $(\pi/2,\ 1,\ 0)$ 处的曲率半径.

97. 证明:质点沿空间曲线的加速度在(a)柱坐标,(b)球坐标下的表达式分别为

$$(\ddot\rho-\rho\dot\phi^2)\boldsymbol{e}_\rho+(\rho\ddot\phi+2\dot\rho\dot\phi)\boldsymbol{e}_\phi+\ddot z\boldsymbol{e}_z\ 及$$

$$(\ddot r-r\dot\theta^2-r\dot\phi^2\sin^2\theta)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta-r\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta)\boldsymbol{e}_\theta+(2\dot r\dot\phi\sin\theta+2r\dot\theta\dot\phi\cos\theta+r\ddot\phi\sin\theta)\boldsymbol{e}_\phi,$$

其中点表示导数阶数,而 $\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\phi,\boldsymbol{e}_z,\ \boldsymbol{e}_r,\ \boldsymbol{e}_\theta,\ \boldsymbol{e}_\phi$ 分别为 $\rho,\phi,z,\ r,\ \theta,\ \phi$ 增加方向上的单位向量.

98. 设向量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 相对于位置和时间有连续的偏导数(至少二阶),且满足方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0,\ \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0,\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t},\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},\qquad(1)$$

证明 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 满足方程

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\qquad(2)$$

[向量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 在电磁理论中称为电场向量和磁场向量,方程(1)是麦克斯韦尔(Maxwell)方程的特殊情形. 结果(2)导致麦克斯韦尔得出了光是一种电磁现象的结论. 常数 c 为光速.]

99. 利用习题 98 中的关系式证明:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}(E^2+H^2)\right\}+c\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=0.$$

100. 设向量 $\boldsymbol{A}$ 在带有单位向量 $\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3$(通常的向量 $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$)的直角坐标系 xyz 下的分量为 A_1,A_2,A_3,而在带有单位向量 $\boldsymbol{i}'_1,\boldsymbol{i}'_2,\boldsymbol{i}'_3$ 的直角坐标系 $x'y'z'$ 下的分量为 A'_1,A'_2,A'_3. 其中坐标系 $x'y'z'$ 与坐标系 xyz 有相同的原点,并由后者旋转而得. 证明下列关系式(常称为不变关系式)一定成立:

$$A_n=l_{1n}A'_1+l_{2n}A'_2+l_{3n}A'_3,\quad n=1,2,3,$$

其中 $\boldsymbol{i}'_m \cdot \boldsymbol{i}_n = l_{mn}$.

101. 若 $\boldsymbol{A}$ 为习题 100 中的向量,证明 $\boldsymbol{A}$ 的散度,即$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 为一不变量(常称为纯量不变量),也就是要证明:

$$\frac{\partial A'_1}{\partial x'} + \frac{\partial A'_2}{\partial y'} + \frac{\partial A'_3}{\partial z'} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}.$$

这题和上一题的结论清楚地表明:需要注意研究不依赖于坐标系的物理量.这种想法的推广导致了一个重要学科(称为张量分析)的产生,该学科是相对论的基础.

102. 证明:在习题 100 的变换下,(a) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, (b) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, (c) $\nabla \times \boldsymbol{A}$ 均是不变的.

103. 若 u_1, u_2, u_3 是正交曲线坐标,证明:

(a) $\dfrac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x, y, z)} = \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3$, (b) $\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}\right)(\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3) = 1$.

并借助于雅可比式给出它们的含义.

104. 利用向量的公理化方法证明 p.125 的关系式(8).

105. 对于向量组 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_n$,如果存在一组不全为零的数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$,使得 $c_1\boldsymbol{A}_1 + c_2\boldsymbol{A}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{A}_n = 0$ 成立,则称其为线性相关,否则称其为线性无关.(a) 证明向量 $\boldsymbol{A}_1 = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{A}_3 = 3\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} + 12\boldsymbol{k}$ 线性相关.(b)证明:任意 4 个 3 维向量线性相关.(c)证明:向量 $\boldsymbol{A}_1 = a_1\boldsymbol{i} + b_1\boldsymbol{j} + c_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{A}_2 = a_2\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + c_2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{A}_3 = a_3\boldsymbol{i} + b_3\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$ 线性无关的充要条件为 $\boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 \times \boldsymbol{A}_3 \neq 0$,并对此给出几何解释.

106. 复数可被定义为实数 a 和 b 的有序对(a, b),这种序对关于加法和乘法要服从某些运算法则.(a)这些法则是什么?(b)如何利用(a)中法则定义减法和除法?(c)说明复数可作为二维向量考虑的理由.(d)叙述复数运算与本章中考虑的向量运算之间的异同.

第八章　偏导数的应用

几何应用

1. 曲面的切平面

设 $F(x, y, z)=0$ 为曲面 S 的方程,如图 8-1 所示.除非另加说明,我们在本章中总假定 F 及其他函数均连续可微.假设要求 S 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$处的切平面方程.在该点垂直于 S 的一个向量为$\boldsymbol{N}_0=\nabla F|_P$,下标 P 表明所求的是在点 $P(x_0, y_0, z_0)$处的梯度.

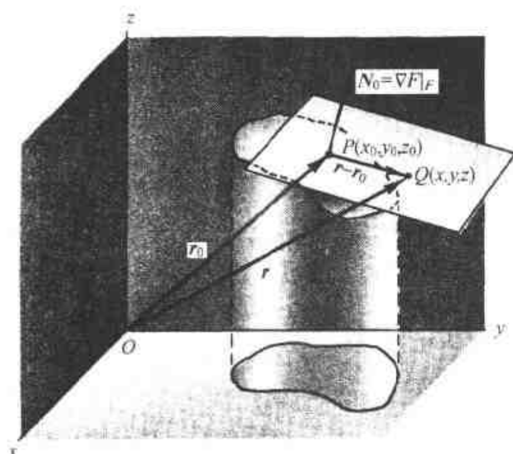


图 8-1

如果 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{r}$ 分别为由点O 到切平面上点 $P(x_0, y_0, z_0)$和 $Q(x, y, z)$的向量,则由 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 垂直于 $\boldsymbol{N}_0$ 得切平面方程为

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{N}_0=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\nabla F|_P=0. \tag{1}$$

在直角坐标下便是

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P(y-y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_P(z-z_0)=0. \tag{2}$$

当曲面方程由形如 $F(u_1, u_2, u_3)=0$ 的正交曲线坐标给出时,切平面方程可通过利用 p.138 在这种坐标中的梯度来获得.见习题 4.

2. 曲面的法线

假设要求曲面 S 在$P(x_0, y_0, z_0)$处的法线方程.如果现设 $\boldsymbol{r}$ 为由图 8-1 中点 O 到法向 $\boldsymbol{N}_0$ 上任一点(x, y, z)的向量,则可以看到 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{N}_0$ 共线,故所求法线方程为

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{N}_0=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times\nabla F|_P=0. \tag{3}$$

在直角坐标系下便是

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_P}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_P}. \tag{4}$$

令这些比值等于一个参数(如 t 或u)并解出 x, y, z 便得法线的参数方程.

当曲面方程用正交曲线坐标表出时,也能写出相应的法线方程.

3. 曲线的切线

设图 8-2 中曲线 C 的参数方程为$x=f(u), y=g(u), z=h(u)$,其中的 f, g, h 除非另加说明,我们总假定它们是连续可微的.我们要求 C 在点$P(x_0, y_0, z_0)$处的切线方程,其中 $u=u_0$.

如果 $\boldsymbol{R}=f(u)\boldsymbol{i}+g(u)\boldsymbol{j}+h(u)\boldsymbol{k}$,则 C 在点P 的切向量由 $\boldsymbol{T}_0=\left.\frac{d\boldsymbol{R}}{du}\right|_P$ 给出.现设 $\boldsymbol{r}_0$ 和

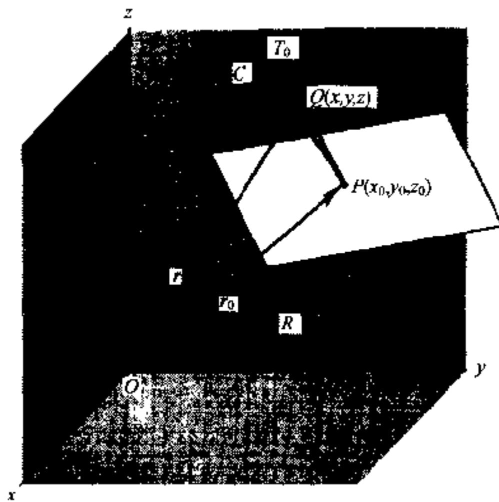


图 8-2

$\boldsymbol{r}$ 分别表示由点 O 到切线上点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 和 $Q(x, y, z)$ 的向量，则由 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{T}_0$ 共线得

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{T}_0=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times\left.\frac{d\boldsymbol{R}}{du}\right|_P=0. \tag{5}$$

在直角坐标系下，上式便成为

$$\frac{x-x_0}{f'(u_0)}=\frac{y-y_0}{g'(u_0)}=\frac{z-z_0}{h'(u_0)}. \tag{6}$$

令比值等于 u 便得切线方程的参数形式.

如果曲线 C 表示为两个曲面的交，即由方程 $F(x, y, z)=0$ 及 $G(x, y, z)=0$ 给出，则对应的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_P}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_P}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_P}. \tag{7}$$

注意：(1) 中的行列式为雅可比式. 当这里的曲面方程由正交曲线坐标给出时，也可求出类似的结果.

4. 曲线的法平面

假设我们要求图 8-2 中曲线 C 在 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的法平面（即垂直于 C 在该点处的切线的平面）方程. 令 $\boldsymbol{r}$ 表示从 O 到法平面上任一点 (x, y, z) 的向量，则可得 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 垂直于 $\boldsymbol{T}_0$. 于是，所求方程为

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{T}_0=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\left.\frac{d\boldsymbol{R}}{du}\right|_P=0. \tag{8}$$

在直角坐标系下，当曲线由参数方程 $x=f(u)$, $y=g(u)$, $z=h(u)$ 给出时，上式成为

$$f'(u_0)(x-x_0)+g'(u_0)(y-y_0)+h'(u_0)(z-z_0)=0. \tag{9}$$

而当曲线由 $F(x, y, z)=0$, $G(x, y, z)=0$ 确定时，(8)成为

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_P (x-x_0)+\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_P (y-y_0)+\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_P (z-z_0)=0. \tag{10}$$

5. 包络

如果 $\phi(x, y, \alpha)=0$ 为 xy 平面上一个参数的曲线簇，则有可能存在一曲线 E，它在每一点都与簇中某曲线相切，并使簇中每条曲线都相切于 E. 如果 E 确实存在，则它的方程可通过解联立方程

$$\phi(x, y, \alpha)=0, \phi_\alpha(x, y, \alpha)=0 \tag{11}$$

求出，且称 E 为该曲线簇的包络.

这个结果可推广用来确实一个参数的曲面簇 $\phi(x, y, z, \alpha)=0$ 的包络. 这个包络可从

$$\phi(x, y, z, \alpha)=0,\ \phi_\alpha(x, y, z, \alpha)=0 \tag{12}$$

求出. 也可将上面的讨论推广到两个(或更多个)参数的情形.

方向导数

假设 $F(x, y, z)$ 在给定的空间曲线 C 上的点 (x, y, z) 处有定义，并设 $F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ 为该点在 C 上邻近点处的函数值，而 Δs 表示这两点之间的曲线弧的长度. 则当极限

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-F(x, y, z)}{\Delta s} \tag{13}$$

存在时，便称该极限为 F 在点 (x, y, z) 沿曲线 C 的方向导数并由下式给出：

$$\frac{dF}{ds}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{ds}. \tag{14}$$

用向量形式，上式可写成：

$$\frac{dF}{ds}=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(\frac{dx}{ds}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{ds}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{ds}\boldsymbol{k}\right)=\nabla F\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\nabla F\cdot\boldsymbol{T}. \tag{15}$$

由此可推出：方向导数 $\frac{dF}{ds}$ 由 ∇F 在 C 的切向上的分量给定.

方向导数的最大值为 $|\nabla F|$.

取得方向导数最大值的方向为曲面 $F(x, y, z)=c$（c 为常数）的法向，有时，称该曲面为等位面或水平面.

积分号下的微分法

设
$$\phi(\alpha)=\int_{u_1}^{u_2} f(x, \alpha)dx,\ a\leqslant\alpha\leqslant b, \tag{16}$$

其中 u_1 和 u_2 可为参数 α 的函数. 如果 $f(x, \alpha)$ 和 $\partial f/\partial\alpha$ 在包含 $u_1\leqslant x\leqslant u_2, a\leqslant x\leqslant b$ 的 $x\alpha$ 平面上的某区域内连续，u_1 和 u_2 在 $a\leqslant\alpha\leqslant b$ 内连续并有连续的导数，则当 $a\leqslant\alpha\leqslant b$ 时，有

$$\frac{d\phi}{d\alpha}=\int_{u_1}^{u_2}\frac{\partial f}{\partial\alpha}dx+f(u_2, \alpha)\frac{du_2}{d\alpha}-f(u_1, \alpha)\frac{du_1}{d\alpha}. \tag{17}$$

当 u_1 和 u_2 为常数时，(17)的最后两项为零.

结论(17)，称为莱布尼兹法则，常用来求定积分的值(见习题 15,29).

积分号下的积分法

如果 $\phi(\alpha)$由(16)确定且 $f(x, \alpha)$关于 x 和α 在包含$u_1 \leqslant x \leqslant u_2$, $a \leqslant \alpha \leqslant b$ 的区域内连续,则当 u_1 和 u_2 为常数时,有

$$\int_a^b \phi(\alpha)d\alpha = \int_a^b \left\{\int_{u_1}^{u_2} f(x, \alpha)dx\right\}d\alpha = \int_{u_1}^{u_2}\left\{\int_a^b f(x, \alpha)d\alpha\right\}dx. \tag{18}$$

这个结果便是所谓的交换积分次序法或积分号下的积分法.

极大和极小

如果存在充分小的正数 δ,使得当 h 和k 满足 $0<|h|<\delta$,$0<|k|<\delta$ 时有$f(x_0+h, y_0+k)<f(x_0, y_0)$或 $f(x_0+h, y_0+k)>f(x_0, y_0)$则称点$(x_0, y_0)$为 $f(x, y)$的极大值或极小值.

可微函数 $f(x, y)$有极大值或极小值的必要条件为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{19}$$

如果(x_0, y_0)为满足方程(19)的点(称为临界点)且 Δ 定义为

$$\Delta = \left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2\right\}\bigg|_{(x_0, y_0)}, \tag{20}$$

则

1. 当 $\Delta>0$ 且$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0, y_0)}<0\left(或\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0, y_0)}<0\right)$时,$(x_0, y_0)$为极大值点;
2. 当 $\Delta>0$ 且$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0, y_0)}>0\left(或\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0, y_0)}>0\right)$时,$(x_0, y_0)$为极小值点;
3. 当 $\Delta<0$ 时,(x_0, y_0)既不是极大值点,也不是极小值点.此时,称(x_0, y_0)为鞍点;
4. 当 $\Delta=0$ 时,得不出什么结论(此时,需要作进一步的研究).

求极大值和极小值的拉格朗日乘子法

求函数 $F(x, y, z)$满足约束条件 $\phi(x, y, z)=0$ 的极大值和极小值的方法是:作辅助函数

$$G(x, y, z) \equiv F(x, y, z) + \lambda\phi(x, y, z) \tag{21}$$

并使其满足条件:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0, \frac{\partial G}{\partial y} = 0, \frac{\partial G}{\partial z} = 0. \tag{22}$$

这是取得极大值和极小值的必要条件.参数 λ 独立于x, y, z,称为拉格朗日乘子.

可将该方法推广.如果要求函数 $F(x_1, x_2,\cdots,x_n)$满足约束条件 $\phi_1(x_1, x_2,\cdots,x_n)=0$, $\phi_2(x_1, x_2,\cdots,x_n)=0$, $\cdots$,$\phi_k(x_1, x_2,\cdots,x_n)=0$ 的极大值和极小值.则可作辅助函数

$$G(x_1, x_2,\cdots,x_n) \equiv F + \lambda_1\phi_1 + \cdots + \lambda_k\phi_k, \tag{23}$$

使其满足(必要)条件:

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial G}{\partial x_2} = 0, \cdots, \frac{\partial G}{\partial x_n} = 0, \tag{24}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 独立于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，称为拉格朗日乘子.

在误差中的应用

当 x,y,z 等的误差已知时，可将微分理论用于求 x,y,z 等的函数的误差. 见习题 28.

习题与解答

曲面的切平面和法线

1. 求曲面 $x^2yz+3y^2=2xz^2-8z$ 在点 $(1,2,-1)$ 处的(a)切平面和(b)法线方程.

解 (a) 曲面方程为 $F=x^2yz+3y^2-2xz^2+8z=0$. 曲面在点 $(1,2,-1)$ 处的法向为

$$N_0=\nabla F\Big|_{(1,2,-1)}=(2xyz-2z^2)\boldsymbol{i}+(x^2z+6y)\boldsymbol{j}+(x^2y-4xz+8)\boldsymbol{k}\Big|_{(1,2,-1)}$$
$$=-6\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}+14\boldsymbol{k}.$$

借助于图 8-1：

从 O 到切平面上任一点 (x,y,z) 的向量为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

从 O 到切平面上点 $(1,2,-1)$ 的向量为 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

故向量 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=(x-1)\boldsymbol{i}+(y-2)\boldsymbol{j}+(z+1)\boldsymbol{k}$ 位于切平面上并垂直于 N_0.

于是，所求方程为：

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot N_0=0\ 即\ \{(x-1)\boldsymbol{i}+(y-2)\boldsymbol{j}+(z+1)\boldsymbol{k}\}\cdot\{-6\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}+14\boldsymbol{k}\}=0$$
$$-6(x-1)+11(y-2)+14(z+1)=0\ 或\ 6x-11y-14z+2=0.$$

(b) 设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 为从点 O 到法向 N_0 上任一点 (x,y,z) 的向量. 从 O 到法向 N_0 上点 $(1,2,-1)$ 的向量为 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$. 向量 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=(x-1)\boldsymbol{i}+(y-2)\boldsymbol{j}+(z+1)\boldsymbol{k}$ 与 N_0 共线：则

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times N_0=0\quad 即\ \begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x-1&y-2&z+1\\-6&11&14\end{vmatrix}=0.$$

这等价于方程

$$11(x-1)=-6(y-2),\ 14(y-2)=11(z+1),\ 14(x-1)=-6(z+1).$$

这些方程可改写成

$$\frac{x-1}{-6}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{14}.$$

此种形式常称为直线方程的标准式.

令这些比值等于参数 t，有 $x=1-6t,\ y=2+11t,\ z=14t-1$. 此种形式称为直线的参数方程.

2. 习题 1(b) 中的法线在哪一点与平面 $x+3y-2z=10$ 相交？

解 将习题 1(b) 的参数方程代入平面方程，得

$$1-6t+3(2+11t)-2(14t-1)=10\ 或\ t=-1,$$

则 $x=1-6t=7,\ y=2+11t=-9,\ z=14t-1=-15$ 且所求的点为 $(7,-9,-15)$.

3. 证明：曲面 $x^2-2yz+y^3=4$ 与曲面簇 $x^2+1=(2-4a)y^2+az^2$ 中每个曲面在交点 $(1,-1,2)$ 处垂直.

证明 将两个曲面方程改写为

$$F=x^2-2yz+y^3-4=0\ 及\ G=x^2+1-(2-4a)y^2-az^2=0,$$

则 $\nabla F=2x\boldsymbol{i}+(3y^2-2z)\boldsymbol{j}-2y\boldsymbol{k},\ \nabla G=2x\boldsymbol{i}-2(2-4a)y\boldsymbol{j}-2az\boldsymbol{k}$.

因此，两个曲面在 $(1,-1,2)$ 处的法向为

$$N_1=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},\ N_2=2\boldsymbol{i}+2(2-4a)\boldsymbol{j}-4a\boldsymbol{k}.$$

由于 $N_1 \cdot N_2 = (2)(2) - 2(2-4a) - (2)(4a) \equiv 0$，故由此推出：

对所有的 a，N_1 与 N_2 垂直，于是便得所求结果.

4. 一曲面在球坐标中的方程为 $F(r, \theta, \phi) = 0$，这里假定 F 是连续可微的.(a)求曲面在点 (r_0, θ_0, ϕ_0) 处的切平面方程.(b)求曲面 $r = 4\cos\theta$ 在点 $(2\sqrt{2}, \pi/4, 3\pi/4)$ 处的切平面方程.(c)求(b)中曲面在指定点处的法线方程.

解 ☞ (a) Φ 在正交曲线坐标下的梯度为

$$\nabla\Phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}e_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}e_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}e_3,$$

其中 $\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_1}$，$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_2}$，$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_3}$(见 p.128).

在球坐标中 $u_1 = r$，$u_2 = \theta$，$u_3 = \phi$，$h_1 = 1$，$h_2 = r$，$h_3 = r\sin\theta$ 且 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = r\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{i} + r\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{j} + r\cos\theta\boldsymbol{k}$，

$$\text{则}\quad\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{e}_2 = \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{j} - \sin\theta\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{e}_3 = -\sin\phi\boldsymbol{i} + \cos\phi\boldsymbol{j}, \end{cases} \tag{1}$$

$$\text{且}\quad \nabla F = \frac{\partial F}{\partial r}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_3. \tag{2}$$

如 p.146 所指出的，所求方程为 $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\cdot\nabla F|_P = 0$. 现将(1)代入(2)中，得

$$\begin{aligned}\nabla F|_P = &\left\{\left.\frac{\partial F}{\partial r}\right|_P \sin\theta_0\cos\phi_0 + \frac{1}{r_0}\left.\frac{\partial F}{\partial \theta}\right|_P \cos\theta_0\cos\phi_0 - \frac{\sin\phi_0}{r_0\sin\theta_0}\left.\frac{\partial F}{\partial \phi}\right|_P\right\}\boldsymbol{i} + \\ &\left\{\left.\frac{\partial F}{\partial r}\right|_P \sin\theta_0\sin\phi_0 + \frac{1}{r_0}\left.\frac{\partial F}{\partial \theta}\right|_P \cos\theta_0\sin\phi_0 + \frac{\cos\phi_0}{r_0\sin\theta_0}\left.\frac{\partial F}{\partial \phi}\right|_P\right\}\boldsymbol{j} \\ &+ \left\{\left.\frac{\partial F}{\partial r}\right|_P \cos\theta_0 - \frac{1}{r_0}\left.\frac{\partial F}{\partial \theta}\right|_P \sin\theta_0\right\}\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

将花括号中的表达式分别记为 A, B, C，则 $\nabla F|_P = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$，于是所求方程为 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. 利用 x，y，z 在球坐标中的变换方程，切平面方程也可按球坐标写出.

(b) 由于 $F = r - 4\cos\theta = 0$，故 $\frac{\partial F}{\partial r} = 1$，$\frac{\partial F}{\partial \theta} = 4\sin\theta$，$\frac{\partial F}{\partial \phi} = 0$. 而 $r_0 = 2\sqrt{2}$，$\theta_0 = \pi/4$，$\phi_0 = 3\pi/4$，从(a)得 $\nabla F|_P = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$.

由变换方程可得，给定点的直角坐标为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$，故 $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = (x + \sqrt{2})\boldsymbol{i} + (y - \sqrt{2})\boldsymbol{j} + (z - 2)\boldsymbol{k}$.

因而，所求平面方程为 $-(x + \sqrt{2}) + (y - \sqrt{2}) = 0$ 或 $y - x = 2\sqrt{2}$. 按球坐标便是 $r\sin\theta\sin\phi - r\sin\theta\cos\phi = 2\sqrt{2}$.

在直角坐标系中，方程 $r = 4\cos\theta$ 成为 $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$，切平面可由此如习题 1 那样确定. 然而，在其他情况下，要获得直角坐标系中的方程也许不会这样容易，因而在此情况下，利用(a)中的方法更简单一些.

(c) 法线方程可表示为：

$$\frac{x + \sqrt{2}}{-1} = \frac{y - \sqrt{2}}{1} = \frac{z - 2}{0}.$$

右边部分的含义就是指直线位于平面 $z = 2$ 上. 因此，所求直线方程为

$$\frac{x + \sqrt{2}}{-1} = \frac{y - \sqrt{2}}{1},\ z = 2 \text{ 或 } x + y = 0,\ z = 2.$$

曲线的切线和法平面

5. 求曲线 $x = t - \cos t$，$y = 3 + \sin 2t$，$z = 1 + \cos 3t$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 的点处的(a)切线方程，(b)法平面方程.

解 ☞ (a) 由原点 O(见图 8-2)到曲线 C 上任一点处的向量为 $\boldsymbol{R} = (t - \cos t)\boldsymbol{i} + (3 + \sin 2t)\boldsymbol{j} + (1 +$

$\cos3t)\boldsymbol{k}$.故在 $t=\frac{\pi}{2}$ 的点与 C 相切的向量为

$$\boldsymbol{T}_0=\left.\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=(1+\sin t)\boldsymbol{i}+2\cos2t\boldsymbol{j}-3\sin3t\boldsymbol{k}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},$$

由 O 到 $t=\frac{\pi}{2}$ 的点的向量为 $\boldsymbol{r}_0=\frac{\pi}{2}\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,

由 O 到切线上任一点(x, y, z)的向量为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,

故 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{i}+(y-3)\boldsymbol{j}+(z-1)\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{T}_0$ 共线,于是,所求方程为$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{T}_0=0$,即

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x-\frac{\pi}{2} & y-3 & z-1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

从而,所求方程为 $\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{3}$ 或参数形式 $x=2t+\frac{\pi}{2}$, $y=3-2t$, $z=3t+1$.

(b) 设由 O 到法平面上任一点(x, y, z)的向量为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,由 O 到 $t=\frac{\pi}{2}$ 的点的向量 $\boldsymbol{r}_0=\frac{\pi}{2}\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,则向量 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{i}+(y-3)\boldsymbol{j}+(z-1)\boldsymbol{k}$ 位于法平面上,因而垂直于 $\boldsymbol{T}_0$.于是,所求方程为$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{T}_0=0$ 或 $2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-2(y-3)+3(z-1)=0$.

6. 求曲线 $3x^2y+y^2z=-2$, $2xz-x^2y=3$ 在点$(1,-1,1)$处的(a)切线方程,(b)法平面方程.

解☞ (a) 相交于给定曲线的两个曲面方程为

$$F=3x^2y+y^2z+2=0,\ G=2xz-x^2y-3=0,$$

它们在点 $P(1,-1,1)$的法向分别为

$$\boldsymbol{N}_1=\nabla F|_P=6xy\boldsymbol{i}+(3x^2+2yz)\boldsymbol{j}+y^2\boldsymbol{k}=-6\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{N}_2=\nabla G|_P=(2z-2xy)\boldsymbol{i}-x^2\boldsymbol{j}+2x\boldsymbol{k}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

则曲线在 P 的切向量为

$$\boldsymbol{T}_0=\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2=(-6\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\times(4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})=3\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

因此,像习题 5(a)一样,切线方程为

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{T}_0=0\text{ 或 }\{(x-1)\boldsymbol{i}+(y+1)\boldsymbol{j}+(z-1)\boldsymbol{k}\}\times\{3\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}\}=0,$$

即 $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{16}=\frac{z-1}{2}$ 或 $x=1+3t$, $y=16t-1$, $z=2t+1$.

(b) 像习题 5(b)一样,法平面方程为

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{T}_0=0\text{ 或 }\{(x-1)\boldsymbol{i}+(y+1)\boldsymbol{j}+(z-1)\boldsymbol{k}\}\cdot\{3\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}\}=0,$$

即 $3(x-1)+16(y+1)+2(z-1)=0$ 或 $3x+16y+2z=-11$.

(a)和(b)中的结果也可分别利用 p.147~p.148 的方程(7)和(10)获得.

7. 建立 p.148 的方程(10).

解☞ 假设曲线由方程分别为 $F(x, y, z)=0$,$G(x, y, z)=0$ 的两个相交曲面确定,并假定 F 和 G 连续可微.

两个曲面在 P 点的法向分别由 $\boldsymbol{N}_1=\nabla F|_P$ 和 $\boldsymbol{N}_2=\nabla G|_P$ 给定,则曲线在 P 点的切向量为 $\boldsymbol{T}_0=\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2=\nabla F|_P\times\nabla G|_P$.因此,法平面方程为$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{T}_0=0$.现在

$$\boldsymbol{T}_0=\nabla F|_P\times\nabla G|_P=\{(F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k})\times(G_x\boldsymbol{i}+G_y\boldsymbol{j}+G_z\boldsymbol{k})\}|_P$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_P i + \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_P j + \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_P k,$$

故所求方程为

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_P (x-x_0) + \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_P (y-y_0) + \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_P (z-z_0) = 0.$$

包络

8. 如果曲线簇 $\phi(x, y, \alpha)=0$ 的包络存在,证明其可通过解联立方程 $\phi=0$ 和 $\phi_\alpha=0$ 获得.

证明☞ 假设包络的参数方程为 $x=f(\alpha)$, $y=g(\alpha)$,则 $\phi(f(\alpha), g(\alpha), \alpha)=0$ 恒成立,关于 α 求导(假定 ϕ, f, g 都有连续的导数)得

$$\phi_x f'(x)+\phi_y g'(\alpha)+\phi_\alpha=0. \tag{1}$$

曲线簇中任一曲线在(x, y)处的斜率由 $\phi_x dx+\phi_y dy=0$ 或$\frac{dy}{dx}=-\frac{\phi_x}{\phi_y}$给出.而包络在$(x, y)$处的斜率为$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\alpha}{dx/d\alpha}=\frac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)}$.因此,由包络在任一点处都与簇中一曲线相切知,必有

$$-\frac{\phi_x}{\phi_y}=\frac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)} \text{ 或 } \phi_x f'(\alpha)+\phi_y g'(\alpha)=0. \tag{2}$$

比较(1)和(2),可看出 $\phi_\alpha=0$,于是便得所求结果.

9. (a) 求曲线簇 $x\sin\alpha+y\cos\alpha=1$ 的包络.(b)对结果作几何说明.

解☞ (a) 由习题 8,如果包络存在,它可由解联立方程 $\phi(x, y, \alpha)=x\sin\alpha+y\cos\alpha-1=0$ 和 $\phi_\alpha(x, y, \alpha)=x\cos\alpha-y\sin\alpha=0$ 得到.解这两个方程求得 $x=\sin\alpha$,
$y=\cos\alpha$ 或$x^2+y^2=1$.

(b) 给定的曲线簇由一簇直线组成,部分直线如图 8-3 所示,其包络为圆 $x^2+y^2=1$.

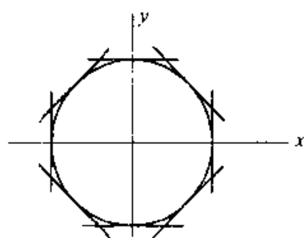


图 8-3

10. 求曲面簇 $z=2\alpha x-\alpha^2 y$ 的包络.

解☞ 由习题 8 的推广知,如果所求包络存在,则它可由解联立方程

$$(1)\ \phi=2\alpha x-\alpha^2 y-z=0 \text{ 和 } (2)\ \phi_\alpha=2x-2\alpha y=0$$

获得.由(2)得 $\alpha=x/y$,代入(1)便得所求包络为 $x^2=yz$.

11. 求两个参数的曲面簇 $z=\alpha x+\beta y-\alpha\beta$ 的包络.

解☞ 如果簇 $F(x, y, z, \alpha, \beta)=0$ 的包络存在,则它可由方程 $F=0$, $F_\alpha=0$, $F_\beta=0$ 消去 α 和β获得(见习题43).现

$$F=z-\alpha x-\beta y+\alpha\beta=0,\ F_\alpha=-x+\beta=0,\ F_\beta=-y+\alpha=0,$$

故 $\beta=x$, $\alpha=y$.因而有 $z=xy$.

方向导数

12. 求 $F=x^2yz^3$ 在曲线 $x=e^{-u}$, $y=2\sin u+1$, $z=u-\cos u$ 上 $u=0$ 的点 P 处沿该曲线的方向导数.

解☞ 对应于 $u=0$ 的点 P 为$(1,1,-1)$,则

$$\nabla F|_P=2xyz^3 i+x^2z^3 j+3x^2yz^2 k|_P=-2i-j+3k.$$

曲线的切向量为

$$\left.\frac{dr}{du}\right|_P=\frac{d}{du}\{e^{-u}i+(2\sin u+1)j+(u-\cos u)k\}\Big|_P$$

$$= -e^{u}\boldsymbol{i} + 2\cos u\boldsymbol{j} + (1+\sin u)\boldsymbol{k}\big|_{u} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},$$

而在该方向上的单位切向量为 $\boldsymbol{T}_0 = \dfrac{-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{6}}$，

故方向导数 $= \nabla F\cdot \boldsymbol{T}_0 = (-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\cdot\left(\dfrac{-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{6}}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

由于它是正的，所以 F 沿这个方向是增加的.

13. 证明：F 沿向量 ∇F 的方向的变化速率最大，即方向导数取最大值，且该值为 ∇F 的大小.

证明 ☞ $\dfrac{dF}{ds} = \nabla F\cdot\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ 是 ∇F 在方向 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ 上的投影，当 ∇F 和 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ 的方向一致时，投影为最大. 故 $\dfrac{dF}{ds}$ 的最大值产生在 ∇F 的方向上. 且该最大值为 $|\nabla F|$.

14. (a) 求 $U = 2x^3y - 3y^2z$ 在 $P(1,2,-1)$ 沿指向 $Q(3,-1,5)$ 的方向的方向导数. (b) 由 P 指向哪个方向的方向导数最大？(c) 最大方向导数的大小是多少？

解 ☞ (a) $\nabla U|_P = 6x^2y\boldsymbol{i} + (2x^3 - 6yz)\boldsymbol{j} - 3y^2\boldsymbol{k}|_P = 12\boldsymbol{i} + 14\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}$,

从 P 到 Q 的向量 $= (3-1)\boldsymbol{i} + (-1-2)\boldsymbol{j} + [5-(-1)]\boldsymbol{k}$

$= 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$.

从 P 到 Q 的单位向量 $= T = \dfrac{2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2)^2+(-3)^2+(6)^2}} = \dfrac{2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}}{7}$.

则在 P 的方向导数 $= (12\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k})\cdot\left(\dfrac{2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}}{7}\right) = -\dfrac{90}{7}$,

即 U 在该方向上是减少的

(b) 由习题 13，沿 $12\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$ 的方向的方向导数为最大.

(c) 由习题 13，方向导数的最大值为

$$|12\boldsymbol{i} + 14\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}| = \sqrt{144+196+144} = 22.$$

积分号下的微分法

15. 证明：积分号下微分的莱布尼兹法则.

证明 ☞ 设 $\phi(\alpha) = \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x,\alpha)dx$，则

$$\Delta\phi = \phi(\alpha+\Delta\alpha) - \phi(\alpha) = \int_{u_1(\alpha+\Delta\alpha)}^{u_2(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx - \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x,\alpha)dx$$

$$= \int_{u_1(\alpha+\Delta\alpha)}^{u_1(\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx + \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx$$

$$+ \int_{u_2(\alpha)}^{u_2(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx - \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x,\alpha)dx$$

$$= \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} [f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)]dx + \int_{u_2(\alpha)}^{u_2(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx$$

$$- \int_{u_1(\alpha)}^{u_1(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx.$$

由积分中值定理，我们得

$$\int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} [f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)]dx = \Delta\alpha\int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f_\alpha(x,\xi)dx, \tag{1}$$

$$\int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx = f(\xi_1,\alpha+\Delta\alpha)[u_1(\alpha+\Delta\alpha) - u_1(\alpha)], \tag{2}$$

$$\int_{u_2(\alpha)}^{u_2(\alpha+\Delta\alpha)} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx = f(\xi_2,\alpha+\Delta\alpha)[u_2(\alpha+\Delta\alpha) - u_2(\alpha)], \tag{3}$$

其中 ξ 在 α 和 $\alpha+\Delta\alpha$ 之间，ξ_1 在 $u_1(\alpha)$ 和 $u_1(\alpha+\Delta\alpha)$ 之间，ξ_2 在 $u_2(\alpha)$ 和 $u_2(\alpha+\Delta\alpha)$ 之间.

于是

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta\alpha}=\int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)}f_\alpha(x,\ \xi)dx+f(\xi_2,\ \alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta u_2}{\Delta\alpha}-f(\xi_1,\ \alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta u_1}{\Delta\alpha},$$

当 $\Delta\alpha\to0$ 时,取极限,并利用假定函数有连续导数这一事实,得

$$\frac{d\phi}{d\alpha}=\int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)}f_\alpha(x,\ \alpha)dx+f[u_2(\alpha),\ \alpha]\frac{du_2}{d\alpha}-f[u_1(\alpha),\alpha]\frac{du_1}{d\alpha}.$$

16. 若 $\phi(\alpha)=\int_\alpha^{\alpha^2}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$, 求 $\phi'(\alpha)$(其中 $\alpha\neq0$).

解☞ 由莱布尼兹法则

$$\phi'(\alpha)=\int_\alpha^{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)dx+\frac{\sin(\alpha\cdot\alpha^2)}{\alpha^2}\frac{d}{d\alpha}(\alpha^2)-\frac{\sin(\alpha\cdot\alpha)}{\alpha}\frac{d}{d\alpha}(\alpha)$$

$$=\int_\alpha^{\alpha^2}\cos\alpha x dx+\frac{2\sin\alpha^3}{\alpha}-\frac{\sin\alpha^2}{\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\bigg|_\alpha^{\alpha^2}+\frac{2\sin\alpha^3}{\alpha}-\frac{\sin\alpha^2}{\alpha}=\frac{3\sin\alpha^3-2\sin\alpha^2}{\alpha}.$$

17. 若 $\int_0^\pi\frac{dx}{\alpha-\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, $\alpha>1$,求 $\int_0^\pi\frac{dx}{(2-\cos x)^2}$(见第五章习题 62).

解☞ 由莱布尼兹法则,若 $\phi(\alpha)=\int_0^\pi\frac{dx}{\alpha-\cos x}=\pi(\alpha^2-1)^{-1/2}$, 则

$$\phi'(\alpha)=-\int_0^\pi\frac{dx}{(\alpha-\cos x)^2}=-\frac{\pi}{2}(\alpha^2-1)^{-3/2}2\alpha=\frac{-\pi\alpha}{(\alpha^2-1)^{3/2}},$$

因此,$\int_0^\pi\frac{dx}{(\alpha-\cos x)^2}=\frac{\pi\alpha}{(\alpha^2-1)^{3/2}}$, 由此可得 $\int_0^\pi\frac{dx}{(2-\cos x)^2}=\frac{2\pi}{3\sqrt3}$.

积分号下的积分法

18. 对积分号下的积分,证明 p.149 的结论(18).

证明☞ 考虑(1)$\psi(\alpha)=\int_{u_1}^{u_2}\left\{\int_a^\alpha f(x,\ \alpha)d\alpha\right\}dx$.

由莱布尼兹法则,得

$$\psi'(\alpha)=\int_{u_1}^{u_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\int_a^\alpha f(x,\ \alpha)d\alpha\right\}dx=\int_{u_1}^{u_2}f(x,\ \alpha)dx=\phi(\alpha),$$

通过积分,得(2)$\psi(\alpha)=\int_a^\alpha\phi(\alpha)d\alpha+c$

而由(1)$\psi(a)=0$,故(2)中 $c=0$.因此,由(1)和(2)及 $c=0$,得出

$$\int_{u_1}^{u_2}\left\{\int_a^\alpha f(x,\ \alpha)d\alpha\right\}dx=\int_a^\alpha\left\{\int_{u_1}^{u_2}f(x,\ \alpha)dx\right\}d\alpha,$$

令 $\alpha=b$, 便得所求结论.

19. 若 a, $b>1$,证明 $\int_0^\pi\ln\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\right)dx=\pi\ln\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}$.

证明☞ 由第五章的习题 62, $\int_0^\pi\frac{dx}{\alpha-\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, $\alpha>1$. 对其左边从 a 到 b 关于 α 积分,得

$$\int_0^\pi\left\{\int_a^b\frac{d\alpha}{\alpha-\cos x}\right\}dx=\int_0^\pi\ln(\alpha-\cos x)\bigg|_a^b dx=\int_0^\pi\ln\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\right)dx,$$

对其右边从 a 到 b 关于 α 积分,得

$$\int_0^\pi\frac{\pi d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}=\pi\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)\bigg|_a^b=\pi\ln\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}},$$

于是,可得所求结论.

极大值和极小值

20. 证明：$f(x, y)$在(x_0, y_0)处有极值(极大值或极小值)的必要条件为 $f_x(x_0, y_0)=0$，$f_y(x_0, y_0)=0$.

证明 ☞　如果 $f(x_0, y_0)$是 $f(x, y)$的一个极值，则它一定既是 $f(x, y_0)$也是 $f(x_0, y)$的极值. 但这两个函数在 $x=x_0$ 及 $y=y_0$ 有极值的必要条件分别为 $f_x(x_0, y_0)=0$，$f_y(x_0, y_0)=0$(利用一元函数的结果).

21. 设 $f(x, y)$在包含点(x_0, y_0)的某区域 $\mathscr{R}$ 内连续，并至少有二阶连续偏导数. 证明：$f(x_0, y_0)$为极大值的充分条件是 $\Delta=f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0)-f_{xy}^2(x_0, y_0)>0$ 且 $f_{xx}(x_0, y_0)<0$.

证明 ☞　由泰勒中值定理(见 p.99)，并利用 $f_x(x_0, y_0)=0$，$f_y(x_0, y_0)=0$，得

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)=\frac{1}{2}(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy}), \tag{1}$$

其中右边的 2 阶导数在 $x_0+\theta h$，$y_0+\theta k(0<\theta<1)$处取值. 将(1)的右边配方，得

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)=\frac{1}{2}f_{xx}\left\{\left(h+\frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2+\left(\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{f_{xx}^2}\right)k^2\right\}. \tag{2}$$

现由假设得，存在(x_0, y_0)的一个邻域，使 $f_{xx}<0$. 而由假设及 $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$ 得，花括号中的和式一定是正的. 因而，由此推出：对所有充分小的 h 和 k，有 $f(x_0+h, y_0+k)\leqslant f(x_0, y_0)$. 这说明 $f(x_0, y_0)$为极大值.

类似地，我们可建立极小值的充分条件.

22. 求 $f(x, y)=x^3+y^3-3x-12y+20$ 的极大值和极小值.

解 ☞　当 $x=\pm1$ 时，$f_x=3x^2-3=0$；当 $6=\pm2$ 时，$f_y=3y^2-12=0$.

故临界点为 $P(1,2)$，$Q(-1,2)$，$R(1,-2)$，$Q(-1,-2)$.

$$f_{xx}=6x, f_{yy}=6y, f_{xy}=0, 故\ \Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=36xy.$$

在 $P(1,2)$处，$\Delta>0$ 且 $f_{xx}>0$(或 $f_{yy}>0$)，于是 P 是极小值点；

在 $Q(-1,2)$处，$\Delta<0$，于是 Q 既不是极大值点也不是极小值点；

在 $R(1,-2)$处，$\Delta<0$，于是 R 既不是极大值点也不是极小值点；

在 $S(-1,-2)$处，$\Delta>0$，且 $f_{xx}<0$(或 $f_{yy}<0$)，于是 S 是极大值点.

因此，$f_{(x,y)}$ 在 P 点取得极小值 2，而在 S 点取得极大值 38，点 Q 和 R 为鞍点.

23. 一无盖的长方体箱子的体积为 32，问它具有怎样的尺寸才使表面积最小？

解 ☞　设长方体的棱长为 x, y, z(如图 8-4)，则

(1)箱子体积 $=V=xyz=32$

(2)箱子表面积 $=S=xy+2yz+2zx$



图 8-4

或由(1)得 $z=\dfrac{32}{xy}$，代入(2)得 $S=xy+\dfrac{64}{x}+\dfrac{64}{y}$.

由 $\dfrac{\partial S}{\partial x}=y-\dfrac{64}{x^2}=0$ 得　(3)$x^2y=64$，

由 $\dfrac{\partial S}{\partial y}=x-\dfrac{64}{y^2}=0$ 得　(4)$xy^2=64$，

将(3)和(4)相除，得 $y=x$，故 $x^3=64$，从而得，$x=y=4$，$z=2$.

由于当 $x=y=4$ 时，$\Delta=S_{xx}S_{yy}-S_{xy}^2=\left(\dfrac{128}{x^3}\right)\left(\dfrac{128}{y^3}\right)-1>0$，且 $S_{xx}=\dfrac{128}{x^3}>0$，故当箱子的尺寸为 $4\times4\times2$ 时，它的表面积最小.

求极大值和极小值的拉格朗日乘子法

24. 考虑满足约束条件 $G(x, y, z)=0$ 的函数 $F(x, y, z)$，证明 $F(x, y, z)$有极值的必要条件为 $F_xG_y-F_yG_x=0$.

证明 ☞　由于 $G(x, y, z)=0$，故可考虑将 z 作为 x 和 y 的函数，比方说 $z=f(x, y)$. $F[x, y, f(x,$

$y)$]有极值的必要条件为关于 x 和 y 的偏导数为零.即

$$(1)F_x + F_z z_x = 0,\ (2)F_y + F_z z_y = 0.$$

又 $G(x,y,z)=0$,故有

$$(3)G_x + G_z z_x = 0,\ (4)G_y + G_z z_y = 0.$$

由(1)和(3),得　(5) $F_x G_z F_z G_x = 0$,由(2)和(4),得　(6) $F_y G_z - F_z G_y = 0$.因而由(5)和(6),便得 $F_x G_y - F_y G_x = 0$.

只有当 $F_z \neq 0, G_z \neq 0$ 时,上述结论才成立.

25. 接上题,证明:所叙述的条件等价于条件 $\phi_x = 0,\ \phi_y = 0$,其中 $\phi = F + \lambda G$,λ 为常数.

证明 ☞　如 $\phi_x = 0$,则 $F_x + \lambda G_x = 0$.又如 $\phi_y = 0$,则 $F_y + \lambda G_y = 0$.从这两个方程中消去 λ 便得 $F_x G_y - F_y G_x = 0$.

乘数 λ 为拉格朗日乘子.如有必要,也可等价地考虑 $\phi = \lambda F + G$,其中 $\phi_x = 0, \phi_y = 0$.

26. 求从原点到抛物线 $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225, z = 0$ 的最短距离.

解 ☞　我们要求 $x^2 + y^2$(从原点到 xy 平面上任一点距离的平方)满足约束条件 $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$ 的极小值.

根据拉格朗日乘子法,考虑函数

$$\phi = x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 + \lambda(x^2 + y^2),$$

则

$$\phi_x = 2x + 8y + 2\lambda x = 0 \text{ 或(1) } (\lambda + 1)x + 4y = 0,$$

$$\phi_y = 8x + 14y + 2\lambda y = 0 \text{ 或(2) } 4x + (\lambda + 7)y = 0.$$

由于 $(x,y) \neq (0,0)$,故由(1)和(2)得

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 & 4 \\ 4 & \lambda + 7 \end{vmatrix} = 0, \text{即 } \lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0 \text{ 或 } \lambda = 1, -9.$$

情形1:$\lambda = 1$.由(1)或(2)得 $x = -2y$,代入 $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$ 便有 $-5y^2 = 225$,不存在实数解.

情形2:$\lambda = -9$.由(1)或(2)得 $y = 2x$,代入 $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$ 有 $45x^2 = 225$.于是 $x^2 = 5, y^2 = 4x^2 = 20$,从而 $x^2 + y^2 = 25$.因此,所求的最短距离为 $\sqrt{25} = 5$.

27. (a)求 $x^2 + y^2 + z^2$ 满足约束条件 $x^2/4 + y^2/5 + z^2/25 = 1$ 和 $z = x + y$ 的最大值和最小值.
(b)对(a)中结果给出几何解释.

解 ☞　(a)我们要求 $F = x^2 + y^2 + z^2$ 满足约束条件 $\phi_1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0$ 和 $\phi_2 = x + y - z = 0$ 的极值.此时,利用两个拉格朗日乘子 λ_1, λ_2 并考虑函数

$$G = F + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1\right) + \lambda_2(x + y - z).$$

对 G 关于 x,y,z 求偏导数并令它们等于零,得

$$G_x = 2x + \frac{\lambda_1 x}{2} + \lambda_2 = 0,\quad G_y = 2y + \frac{2\lambda_1 y}{5} + \lambda_2 = 0, G_z = 2z + \frac{2\lambda_1 z}{25} - \lambda_2 = 0. \tag{1}$$

从中解出 x,y,z 得

$$x = \frac{-2\lambda_2}{\lambda_1 + 4},\quad y = \frac{-5\lambda_2}{2\lambda_1 + 10},\quad z = \frac{25\lambda_2}{2\lambda_1 + 50}. \tag{2}$$

由于 $\lambda_2 \neq 0$(否则,就有 $x = 0, y = 0, z = 0$,这不满足第一个约束条件),故由第2个约束条件 $x + y - z = 0$,得 $\frac{2}{\lambda_1 + 4} + \frac{5}{2\lambda_1 + 10} + \frac{25}{2\lambda_1 + 50} = 0$,两边同乘以 $2(\lambda_1 + 4)(\lambda_1 + 5)(\lambda_1 + 25)$ 并化简得

$$17\lambda_1^2 + 245\lambda_1 + 750 = 0 \text{ 或 } (\lambda_1 + 10)(17\lambda_1 + 75) = 0,$$

由此可得 $\lambda_1 = -10$ 或 $-75/17$.

情形 1: $\lambda_1=-10$.

由(2)得 $x=\frac{1}{3}\lambda_2, y=\frac{1}{2}\lambda_2, z=\frac{5}{6}\lambda_2$. 将它们代入第一个约束条件 $x^2/4+y^2/5+z^2/25=1$, 得 $\lambda_2^2=180/19$ 或 $\lambda_2=\pm 6\sqrt{5/19}$. 从而得到两个临界点 $(2\sqrt{5/19}, 3\sqrt{5/19}, 5\sqrt{5/19})$, $(-2\sqrt{5/19}, -3\sqrt{5/19}, -5\sqrt{5/19})$. $x^2-y^2+z^2$ 在这两个临界点处的值为 $(20+45+125)/19=10$.

情形 2: $\lambda_1=-75/17$.

由(2)得 $x=\frac{34}{7}\lambda_2, y=-\frac{17}{4}\lambda_2, z=\frac{17}{28}\lambda_2$. 将它们代入第一个约束条件 $x^2/4+y^2/5+z^2/25=1$, 得 $\lambda_2=\pm 140/(17\sqrt{646})$. 从而得到两个临界点 $(40/\sqrt{646}, -35/\sqrt{646}, 5/\sqrt{646})$, $(-40/\sqrt{646}, 35/\sqrt{646}, -5/\sqrt{646})$. $x^2+y^2+z^2$ 在这两个临界点处的值为 $(1600+1225+25)/646=75/17$.

因此,所求的最大值为 10,而最小值为 75/17.

(b)由于 $x^2+y^2+z^2$ 表示从原点 $(0,0,0)$ 到点 (x,y,z) 的距离的平方,故所解问题等价于确定从原点到椭球面 $x^2/4+y^2/5+z^2/25=1$ 与平面的交线的最大和最小距离. 由于该曲线是一个椭圆,故说明 $\sqrt{10}$ 和 $\sqrt{75/17}$ 分别为这个椭圆的长半轴和短半轴的长度.

在上面两种情形中,最大值和最小值恰好都由 $-\lambda_1$ 给出,这一事实可推导如下:将方程(1)分别乘以 x,y,z 再相加,得

$$2x^2+\frac{\lambda_1}{2}x^2+\lambda_2 x+2y^2+\frac{2\lambda_1 y^2}{5}+\lambda_2 y+2z^2+\frac{2\lambda_1 z^2}{25}-\lambda_2 z=0$$

即

$$x^2+y^2+z^2+\lambda_1\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}\right)+\lambda_2(x+y-z)=0$$

因此,利用约束条件,得 $x^2+y^2+z^2=-\lambda_1$.

有关这个习题的一个推广,见习题 76.

在误差中的应用

28. 一个长为 l 的单摆的周期 T 由 $T=2\pi\sqrt{l/g}$ 给出. 如果 l 和 g 的真值为 $l=1.95$ 米, $g=9.81$ 米/秒^2, 求利用 $l=2$ 米, $g=9.75$ 米/秒^2 计算 T 所产生的(a)误差,(b)百分误差.

解 ☞　(a)由于 $T=2\pi l^{1/2}g^{-1/2}$, 故

$$dT=(2\pi g^{-1/2})\left(\frac{1}{2}l^{-1/2}dl\right)+(2\pi l^{1/2})\left(-\frac{1}{2}g^{-3/2}dg\right)$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{lg}}dl-\pi\sqrt{\frac{l}{g^3}}dg, \tag{1}$$

g 的误差 $=\Delta g=dg=+0.06$; l 的误差 $=\Delta l=dl=-0.05$, T 的误差实际为 ΔT, 但在此处, 近似等于 dT. 因此,由(1)得 T 的误差为

$$dT=\frac{\pi}{\sqrt{(2)(9.75)}}(-0.05)-\pi\sqrt{\frac{2}{(9.75)^3}}(+0.06)\approx -0.0444(\text{秒}).$$

而当 $l=2, g=9.75$ 时, T 的值为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2}{9.75}}\approx 2.846(\text{秒}).$$

(b) T 的百分误差(或相对误差) $=\frac{dT}{T}=\frac{-0.0444}{2.846}=-1.56\%$.

另一解法: 由于 $\ln T=\ln 2\pi+\frac{1}{2}\ln l-\frac{1}{2}\ln g$, 故

$$\frac{dT}{T}=\frac{1}{2}\frac{dl}{l}-\frac{1}{2}\frac{dg}{g}=\frac{1}{2}\left(\frac{-0.05}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{+0.06}{9.75}\right)=-1.56\%. \tag{2}$$

与上面的结果一样. 注意:(2)可写成 T 的百分误差 $=\frac{1}{2}$(l 的百分误差) $-\frac{1}{2}$(g 的百分误差).

杂题

29. 求 $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}dx$ 的值.

解 为了计算这个积分,我们采取下列手法.定义

$$\phi(\alpha)=\int_0^1\frac{x^\alpha-1}{\ln x}dx,\quad \alpha>0,$$

则由莱布尼茨法则,得

$$\phi'(\alpha)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{x^\alpha-1}{\ln x}\right)dx=\int_0^1\frac{x^\alpha\ln x}{\ln x}dx=\int_0^1x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1},$$

关于 α 积分,得 $\phi(\alpha)=\ln(\alpha+1)+c$,但由于 $\phi(0)=0$,故 $c=0$,因而 $\phi(\alpha)=\ln(\alpha+1)$.

于是,所求积分的值为 $\phi(1)=\ln2$.

莱布尼茨法则的适用性可在这里得到验证,因为如果定义 $F(x,\alpha)=(x^\alpha-1)/\ln x, 0<x<1$, $F(0,\alpha)=0$, $F(1,\alpha)=\alpha$,则 $F(x,\alpha)$ 在 $0\leqslant x\leqslant1,\alpha>0$ 内关于 x 和 α 连续.

30. 求常数 a 和 b,使得

$$F(a,b)=\int_0^\pi\{\sin x-(ax^2+bx)\}^2dx$$

为极小.

解 由于取得极小值的必要条件为 $\frac{\partial F}{\partial a}=0,\frac{\partial F}{\partial b}=0$,故求出这两个偏导数,得

$$\frac{\partial F}{\partial a}=\int_0^\pi\frac{\partial}{\partial a}\{\sin x-(ax^2+bx)\}^2dx=-2\int_0^\pi x^2\{\sin x-(ax^2+bx)\}dx=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial b}=\int_0^\pi\frac{\partial}{\partial b}\{\sin x-(ax^2+bx)\}^2dx=-2\int_0^\pi x\{\sin x-(ax^2+bx)\}dx=0,$$

由此,可得

$$\begin{cases}a\int_0^\pi x^4dx+b\int_0^\pi x^3dx=\int_0^\pi x^2\sin x dx,\\ a\int_0^\pi x^3dx+b\int_0^\pi x^2dx=\int_0^\pi x\sin x dx,\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\frac{\pi^5a}{5}+\frac{\pi^4b}{4}=\pi^2-4,\\ \frac{\pi^4a}{4}+\frac{\pi^3b}{3}=\pi.\end{cases}$$

解出 a 和 b,得

$$a=\frac{20}{\pi^3}-\frac{320}{\pi^5}\approx-0.40065,\quad b=\frac{240}{\pi^4}-\frac{12}{\pi^2}\approx1.24798.$$

利用 p.149 的充分条件,可以证明:对上述 $a,b,F(a,b)$ 确实是极小值.

多项式 ax^2+bx 称为 $\sin x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的最小二乘逼近.这里涉及的思想在数学及其应用的许多领域都是很有价值的.

补充习题

曲面的切平面和法线

31. 求曲面 $x^2+y^2=4z$ 在 $(2,-4,5)$ 处的(a)切平面方程,(b)法线方程.

32. 若 $z=f(x,y)$,证明其在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面和法线方程分别由下面两式给出:

$$\text{(a)}\ z-z_0=f_x|_P(x-x_0)+f_y|_P(y-y_0),$$

$$\text{(b)}\ \frac{x-x_0}{f_x|_P}=\frac{y-y_0}{f_y|_P}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

33. 证明曲面 $F(x,y,z)=0$ 在任一点处的法向与 z 轴之间的锐角 γ 由 $\sec\gamma=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}/|F_z|$ 给出.

34. 一曲面在柱坐标中的方程为 $F(\rho,\phi,z)=0$,其中 F 连续可微.证明:它在点 $P(\rho_0,\phi_0,z_0)$ 处的(a)切平面方程,(b)法线方程分别为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

及

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C},$$

其中 $x_0=\rho_0\cos\phi_0, y_0=\rho_0\sin\phi_0$ 且 $A=F_\rho|_P\cos\phi_0-\frac{1}{\rho}F_\phi|_P\sin\phi_0, B=F_\rho|_P\sin\phi_0+\frac{1}{\rho}F_\phi|_P\cos\phi_0, C=F_z|_P$.

35. 利用习题 34 求曲面 $\pi z=\rho\phi$ 在 $\rho=2,\phi=\frac{\pi}{2},z=1$ 的点处的切平面方程.再用直角坐标验证你的答案.

曲线的切线和法平面

36. 求空间曲线 $x=6\sin t, y=4\cos 3t, z=2\sin 5t$ 在 $t=\pi/4$ 的点处的(a)切线方程,(b)法平面方程.

37. 曲面 $x+y+z=3$ 和 $x^2-y^2+2z^2=2$ 相交于一空间曲线,求该曲线在点(1,1,1)处的(a)切线方程,(b)法平面方程.

包络

38. 求下列 xy 平面上曲线簇的包络,并作图表示:

$$(a)\ y=\alpha x-\alpha^2,\ (b)\ \frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{1-\alpha}=1.$$

39. 求与 x 轴、y 轴相交且介于两坐标轴之间的长度为常数 a 的直线簇的包络.

40. 求中心在抛物线 $y=x^2$ 上且过其顶点的圆簇的包络.[提示:设抛物线上任一点为 (α,α^2)].

41. 求抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的法线簇的包络并作图.

42. 求下列曲面簇的包络:

$$(a)\ \alpha(x-y)-\alpha^2 z=1,\quad (b)\ (x-\alpha)^2+y^2=2\alpha z.$$

43. 证明:若双参数曲面簇 $F(x,y,z,\alpha,\beta)=0$ 的包络存在,则包络可由方程 $F=0,F_\alpha=0,F_\beta=0$ 消去参数 α 和 β 获得.

44. 求下列双参数曲面簇的包络:

$$(a)\ z=\alpha x+\beta y-\alpha^2-\beta^2,\quad (b)\ x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=a,$$

其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 且 a 是常数.

方向导数

45. (a)求 $U=2xy-z^2$ 在点(2,−1,1)沿到点(3,1,−1)方向的方向导数,(b)沿哪个方向的方向导数最大?(c)这个最大方向导数是多少?

46. 设 xy 平面上任一点 (x,y) 处的温度由 $T=100xy/(x^2+y^2)$ 给出.(a)求在点(2,1)沿与 x 轴正向夹角为60°的方向的方向导数.(b)由(2,1)指向哪个方向的方向导数最大?(c)这个最大值是多少?

47. 如果 $F(\rho,\phi,z)$ 连续可微,证明:F 在任一点的最大方向导数为 $\sqrt{(\frac{\partial F}{\partial\rho})^2+\frac{1}{\rho^2}(\frac{\partial F}{\partial\phi})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2}$.

积分号下的微分法

48. 若 $\phi(\alpha)=\int_{\sqrt{\alpha}}^{1/\alpha}\cos\alpha x^2\,dx$,求 $\frac{d\phi}{d\alpha}$.

49. (a)若 $F(\alpha)=\int_0^{\alpha^2}\arctan^{-1}\frac{x}{\alpha}dx$,用莱布尼茨法则求 $\frac{dF}{d\alpha}$.(b)通过直接积分验证(a)中结果.

50. 已知 $\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}, p>-1$,证明 $\int_0^1 x^p(\ln x)^m dx=\frac{(-1)^m m!}{(p+1)^{m+1}}, m=1,2,3,\cdots$.

51. 证明 $\int_0^\pi \ln(1+\alpha\cos x)dx=\pi\ln(\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}), |\alpha|<1$.

52. 证明 $\int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=\begin{cases}\pi\ln\alpha^2, & |\alpha|<1,\\ 0, & |\alpha|>1,\end{cases}$ 并讨论 $|\alpha|=1$ 时的情况.

53. 证明 $\int_0^\pi \frac{dx}{(5-3\cos x)^3}=\frac{59\pi}{2048}$.

积分号下的积分法

54. 验证 $\int_0^1\left\{\int_1^2(\alpha^2-x^2)dx\right\}d\alpha=\int_1^2\left\{\int_0^1(\alpha^2-x^2)dx\right\}dx$.

55. 从结果 $\int_0^{2\pi}(\alpha-\sin x)dx=2\pi\alpha$ 出发,证明:对任意常数 a 和 b,有

$$\int_0^{2\pi}\{(b-\sin x)^2-(a-\sin x^2)\}dx=2\pi(b^2-a^2).$$

56. 利用结果 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\alpha+\sin x}=\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, $\alpha>1$,证明:

$$\int_0^{2\pi}\ln\left(\frac{5+3\sin x}{5+4\sin x}\right)dx=2\pi\ln\left(\frac{9}{8}\right).$$

57. (a)利用结果 $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\alpha\cos x}=\frac{\arccos^{-1}\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, $0\leqslant\alpha<1$,证明:对 $0\leqslant a<1$, $0\leqslant b<1$,有

$$\int_0^{\pi/2}\sec x\ln\left(\frac{1+b\cos x}{1+a\cos x}\right)dx=\frac{1}{2}\{(\arccos a)^2-(\arccos b)^2\}.$$

(b)证明 $\int_0^{\pi/2}\sec x\ln(1+\frac{1}{2}\cos x)dx=\frac{5\pi^2}{72}$.

极大和极小,拉格朗日乘子法

58. 求 $F(x,y,z)=xy^2z^3$ 满足约束条件 $x+y+z=6$, $x>0$, $y>0$, $z>0$ 的极大值和极小值.

59. 椭球面 $x^2/9+y^2/16+z^2/36=1$ 内接长方体的最大体积是多少?

60. (a)求 x^2+y^2 满足条件 $3x^2+4xy+6y^2=140$ 的极大值和极小值.

(b)给出(a)中结果的几何说明.

61. 用拉格朗日乘子法解习题 23.

62. 证明:在任一三角形 ABC 内存在一点 P 使得 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 为最小且 P 为中线的交点.

63. (a)证明 $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ 在单位正方形 $0\leqslant x\leqslant1$, $0\leqslant y\leqslant1$ 内的最大值和最小值分别为 3 和 0.

(b) (a)中结果能否通过令 $f(x,y)$ 关于 x 和 y 的偏导数等于零获得? 并说明之.

64. 求 z 在曲面 $2x^2+3y^2+z^2-12xy+4xz=35$ 上的极值.

65. 针对求 $F(x,y,z)$ 满足两个约束条件 $G(x,y,z)=0$、$H(x,y,z)=0$ 的极值的情形,建立相应的拉格朗日乘子法.

66. 证明:由原点到两个曲面 $xyz=a$ 与 $y=bx$(其中 $a>0,b>0$)的交线的最短距离为 $3\sqrt{a(b^2+1)/2b}$.

67. 求椭球面 $11x^2+9y^2+15z^2-4xy+10yz-20xz=80$ 所围立体的体积.

在误差中的应用

68. 设所测得的一正圆柱的直径为 6.0 ± 0.03,而测得的高为 4.0 ± 0.02,问计算体积时可能产生的最大 (a)误差, (b)百分误差为多少?

69. 设所测得的一三角形的两边为 12.0 和 15.0,而它们所夹的角为 60.0°.如果测量长度的精度在 1% 以内,而测量角度的精度在 2% 以内.求确定三角形的 (a)面积, (b)第三边时的最大误差和百分误差.

杂题

70. 设 ρ 和 ϕ 为柱坐标, a 和 b 为任意正常数, n 为正整数.证明:曲面 $\rho^n\sin n\phi=a$ 和 $\rho^n\cos n\phi=b$ 沿它们的交线互相垂直.

71. 设 (γ,θ,ϕ) 为球坐标,求曲面 $8\gamma\theta\phi=\pi^2$ 在 $\gamma=1$, $\theta=\pi/4$, $\phi=\pi/2$ 的点处的(a)切平面方程,(b)法线方程.

72. (a)证明:点 (a,b,c) 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的最短距离为

$$\left|\frac{Aa+Bb+Cc+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.$$

(b)求点 $(1,2,-3)$ 到平面 $2x-3y+6z=20$ 的最短距离.

73. 电位 V 在球坐标中与电荷分布的关系为

$$V = \frac{p\cos\theta}{\gamma^2}$$

其中 p 为常数. 证明:在任一点的最大方向导数为

$$\frac{p\sqrt{\sin^2\theta + 4\cos^2\theta}}{\gamma^3}.$$

74. 若 $m>0, n>0$,证明 $\int_0^1 \frac{x^m - x^n}{\ln x}dx = \ln\left(\frac{m+1}{n+1}\right)$. 能否将结果推广至 $m>-1, n>-1$ 的情形?

75. 如果 $b^2-4ac<0$ 且 $a>0, c>0$,证明椭圆 $ax^2+bxy+cy^2=1$ 的面积为 $2\pi/\sqrt{4ac-b^2}$. [提示:求 x^2+y^2 满足约束条件 $ax^2+bxy+cy^2=1$ 的极大值和极小值]

76. 证明:从原点到由 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ 和 $Ax+By+Cz=0$ 确定的交线的最长和最短距离 d 可通过解方程

$$\frac{A^2a^2}{a^2-d^2} + \frac{B^2b^2}{b^2-d^2} + \frac{C^2c^2}{c^2-d^2} = 0$$

获得.

77. 设 a,b,c 为非零实常数, A,B,C 为不全为零的实常数. 证明:此时,上题中的最后一个方程总有两个实值解 d_1^2 和 d_2^2. 讨论它的几何意义.

78. (a)证明: $I_M = \int_0^M \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2} = \frac{1}{2\alpha^3}\arctan^{-1}\frac{M}{\alpha} + \frac{M}{2\alpha^2(\alpha^2+M^2)}$.

(b)求 $\lim\limits_{M\to\infty} I_M$,它可记为 $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$.

(c)是否有 $\lim\limits_{M\to\infty}\frac{d}{d\alpha}\int_0^M \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2} = \frac{d}{d\alpha}\lim\limits_{M\to\infty}\int_0^M \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$?

79. 在抛物面 $z=x^2+y^2$ 上求一点,使其离点 $(3,-6,4)$ 最近.

80. 讨论 $f(x,y)=(x^2-2x+4y^2-8y)^2$ 的极大值和极小值情况.

81. (a)证明 $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\alpha\cos x + \sin x} = \frac{2\pi}{2(\alpha^2+1)} - \frac{\ln\alpha}{\alpha^2+1}$.

(b)利用(a)证明:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x dx}{(2\cos x + \sin x)^2} = \frac{3\pi + 5 - 8\ln 2}{50}.$$

82. (a)求出 $w=f(x,y,z)$ 取极大值和极小值的充分条件.

(b)检查 $w=x^2+y^2+z^2-6xy+8xz-10yz$ 的极大值和极小值. [提示:对于(a),利用事实:如果 $A>0$, $\begin{vmatrix} A & D \\ D & B \end{vmatrix}>0$, $\begin{vmatrix} A & D & F \\ D & B & E \\ F & E & C \end{vmatrix}>0$,则二次型 $A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2+2D\alpha\beta+2E\alpha\gamma+2F\beta\gamma>0$(即二次型正定)].

第九章　重　积　分

二重积分

设 $F(x,y)$ 在 xy 平面上的闭区域 $\mathscr{R}$(见图 9-1)内有定义.将 $\mathscr{R}$ 分成 n 个面积为 ΔA_k 的子区域 $\Delta\mathscr{R}_k$, $k=1,2,\cdots,n$. 设 (ξ_k,η_k) 为 $\Delta\mathscr{R}_k$ 中一点,作和式

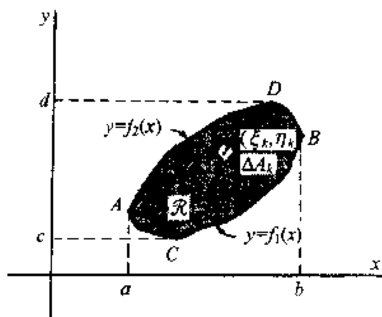


图 9-1

$$\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k,\ \eta_k)\Delta A_k, \tag{1}$$

考虑极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k,\ \eta_k)\Delta A_k, \tag{2}$$

其中所取的极限为当分划数 n 无限增加且使每个 $\Delta\mathscr{R}_k$ 的直径趋于零时的极限.如果这个极限存在,记为

$$\iint\limits_{\mathscr{R}} F(x,\ y)dA, \tag{3}$$

并称为 $F(x,\ y)$ 在区域 $\mathscr{R}$ 上的二重积分.

可以证明:如果 $F(x,\ y)$ 在 $\mathscr{R}$ 内连续(或分段连续),则该极限存在.

累次积分

设 $\mathscr{R}$ 满足条件:任一平行于 y 轴的直线与 $\mathscr{R}$ 的边界至多有两个交点(如图 9-1 所示),则可将围成 $\mathscr{R}$ 的曲线 ACB 和 ADB 的方程分别写成 $y=f_1(x)$ 和 $y=f_2(x)$,其中 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 内单值且连续.此时,可这样计算二重积分:作平行于 x 轴和 y 轴的网格线,并将由此形成的矩形区域取为 $\Delta\mathscr{R}_k$, ΔA_k 为对应的面积,则(3)可写为

$$\iint\limits_{\mathscr{R}} F(x,\ y)dxdy = \int_{x=a}^{b}\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x,\ y)dydx$$

$$= \int_{x=a}^{b}\left\{\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x,\ y)dy\right\}dx, \tag{4}$$

其中花括号中的积分先算(视 x 为常数)而后再对 x 从 a 到 b 积分.结论(4)说明.计算二重积分的方法是:将它表为两个单积分.这两个单积分称为累次积分.

如果 $\mathscr{R}$ 满足:任一平行于 x 轴的直线与 $\mathscr{R}$ 的边界至多有两个交点(如图 9-1),则曲线 CAD 和 CBD 的方程可分别写为 $x=g_1(y)$ 和 $x=g_2(y)$,并类似地得

$$\iint\limits_{\mathscr{R}} F(x,\ y)dxdy = \int_{y=c}^{d}\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x,\ y)dxdy$$

$$= \int_{y=c}^{d}\left\{\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x,\ y)dx\right\}dy. \tag{5}$$

如果二重积分存在,则(4)和(5)得出相同的值(否则,就不一定,见习题 17).因此,只要适当,用(4)或(5)表示二重积分都是可以的.我们将其中的一种形式称为相对于另一种形式的交换积分次序.

当$\mathscr{R}$不是上面图中所示的类型时,一般可将$\mathscr{R}$分成小区域$\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2,\cdots$,使其中的每一个小区域为所要求的类型.因此,$\mathscr{R}$上的二重积分等于在$\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2,\cdots$上的二重积分的和.

三重积分

上述结果很容易推广到三维空间的闭区域.例如,考虑定义在三维闭区域$\mathscr{R}$上的函数$F(x, y, z)$.将该区域分成n个体积为ΔV_k的子区域,$k=1, 2, \cdots$.设(ξ_k, η_k, ζ_k)为子区域中一点,形成

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta V_k, \tag{6}$$

其中分划数n趋于无穷大并使每个子区域的直径趋于零.如果这个极限存在,将它记为

$$\iiint_{\mathscr{R}} F(x, y, z)dV, \tag{7}$$

称为$F(x, y, z)$在$\mathscr{R}$上的三重积分.如果$F(x, y, z)$在$\mathscr{R}$上连续(或分段连续),则该极限存在.

如果用平行于xy、yz和xz平面的平面构造网格,则将$\mathscr{R}$分成的子区域为长方体.此时,由(7)给出的$\mathscr{R}$上的三重积分可表示为如下形式的累次积分:

$$\begin{aligned}&\int_{x=a}^{b}\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)}\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x, y, z)dxdydz\\ &= \int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)}\left\{\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x, y, z)dz\right\}dy\right]dx\end{aligned} \tag{8}$$

(其中最里面的积分先算)或这种积分的和,该三重积分也可以按其他的任何一种次序给出等价的结果.

上述概念和结论也可推广到更高维空间.

重积分的变换

在求$\mathscr{R}$上的重积分时,利用直角坐标以外的坐标,如第六章和第七章中所考虑的曲线坐标,常常是十分便利的.

如果设(u, v)是平面上点的曲线坐标,则存在一组变换方程$x=f(u, v)$, $y=g(u, v)$将xy平面上的点(x, y)映成uv平面上的点(u, v).此时,xy平面上的区域$\mathscr{R}$映成uv平面上的区域$\mathscr{R}'$.因而,有

$$\iint_{\mathscr{R}} F(x, y)dxdy = \iint_{\mathscr{R}'} G(u, v)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv, \tag{9}$$

其中$G(u, v)=F\{f(u, v), g(u, v)\}$且

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv \begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} \tag{10}$$

为x和y对于u和v的雅可比式(见第六章).

类似地,如果(u, v, w)为三维空间中的曲线坐标,则存在一组变换方程$x=f(u, v, w)$, $y=g(u,v, w)$, $z=h(u, v, w)$,并可写出

$$\iiint_{\mathscr{R}} F(x, y, z)dxdydz = \iiint_{\mathscr{R}'} G(u, v, w)\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right|dudvdw, \tag{11}$$

其中 $G(u, v, w)=F\{f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)\}$且

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \tag{12}$$

为 x, y, z 对 u, v, w 的雅可比式.

结论(9)和(11)对应于二重和三重积分的变量代换.

容易作出向更高维空间的推广.

习题与解答

二重积分

1. (a)作出由 $y=x^2, x=2, y=1$ 围成的 xy 平面上的区域 $\mathscr{R}$ 的草图.

(b) 给出 $\iint_{\mathscr{R}}(x^2+y^2)dxdy$ 的物理解释.

(c) 求(b)中的二重积分.

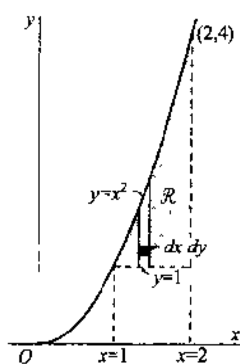


图 9-2

解 ☞　(a) 所求的区域如图 9-2 所示.

(b) 由于 x^2+y^2 是任一点(x, y)到$(0,0)$的距离的平方,故可将二重积分认为是单位密度的区域 $\mathscr{R}$ 的极转动惯量(即绕原点的转动惯量). 也可将二重积分看成是面密度为 x^2+y^2 的区域 $\mathscr{R}$ 的质量.

(c) **解法 1**　二重积分可表示为累次积分

$$\int_{x=1}^{2}\int_{y=1}^{x^2}(x^2+y^2)dydx = \int_{x=1}^{2}\left\{\int_{y=1}^{x^2}(x^2+y^2)dy\right\}dx$$

$$= \int_{x=1}^{2} x^2 y + \frac{y^3}{3}\bigg|_{y=1}^{x^2} dx$$

$$= \int_{x=1}^{2}\left(x^4+\frac{x^6}{3}-x^2-\frac{1}{3}\right)dx = \frac{1006}{105}.$$

对 y 从$y=1$ 到 $y=x^2$(保持 x 不变)积分形式上对应于在垂直列(见图 9-2)中求和. 随后对 x 从$x=1$ 到 $x=2$ 积分对应于将位于 $x=1$ 和 $x=2$ 之间的所有这种垂直列的贡献相加.

解法 2　二重积分也可表示为累次积分

$$\int_{y=1}^{4}\int_{x=\sqrt{y}}^{2}(x^2+y^2)dxdy = \int_{y=1}^{4}\left\{\int_{x=\sqrt{y}}^{2}(x^2+y^2)dx\right\}dy$$

$$= \int_{y=1}^{4} \frac{x^3}{3}+xy^2\bigg|_{x=\sqrt{y}}^{2} dy$$

$$= \int_{y=1}^{4}\left(\frac{8}{3}+2y^2-\frac{y^{3/2}}{3}-y^{5/2}\right)dy = \frac{1006}{105}.$$

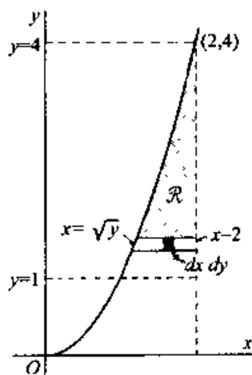


图 9-3

此时,图 9-2 中区域 $\mathscr{R}$ 的垂直列由图 9-3 中的水平列代替. 因此,对 x 从$x=\sqrt{y}$到$x=2$(保持 y 不变)积分对应于在水平列中求和. 随后对 y 从 $y=1$ 到 $y=4$ 积分对应于将位于 $y=1$ 和$y=4$之间的所有这种水平列的贡献相加.

2. 求相交圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+z^2=a^2$ 公共部分的立体体积.

解 所求体积等于如图 9-4 所示部分体积的 8 倍. 故

$$\text{所求体积}=8\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} z\,dy\,dx$$

$$=8\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dy\,dx=8\int_{x=0}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{16a^3}{3}.$$

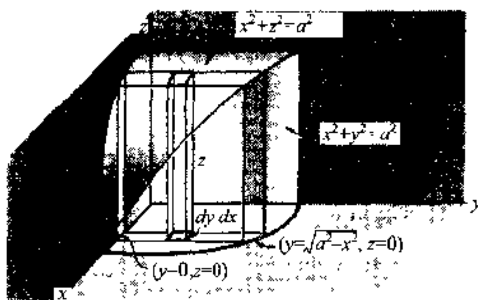


图 9-4

作为建立这个积分的补充, 我们注意到: $z\,dy\,dx$ 对应于图中深黑色部分所示的小柱体的体积. 保持 x 不变, 对 y 从 $y=0$ 到 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 作积分对应于将平行于 yz 平面的薄片中的所有这种小柱体的体积相加, 因而给出了这种薄片的体积. 最后对 x 从 $x=0$ 到 $x=a$ 作积分对应于将区域中所有这种薄片的体积相加, 这样便给出了所求的体积.

3. 求由 $z=x+y$, $z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ 所围成的区域的体积.

解 所求体积等于如图 9-5 所示区域的体积, 故

$$\text{所求体积}=\int_{x=0}^{6}\int_{y=0}^{6-x}\{6-(x+y)\}\,dy\,dx=\int_{0}^{6}(6-x)y-\frac{1}{2}y^2\Big|_{y=0}^{6-x}dx=\int_{x=0}^{6}\frac{1}{2}(6-x)^2dx=36.$$

在这里, 代表柱体(深黑色所示部分)的体积对应于 $\{6-(x+y)\}\,dy\,dx$. 而积分限通过作图中所示区域 $\mathcal{R}$ 上的积分获得. 保持 x 不变, 并对 y 从 $y=0$ 到 $y=6-x$(由 $z=6$ 及 $z=x+y$ 得到)所作的积分对应于将平行于 yz 平面的薄片中的所有小柱体相加. 最后, 对 x 从 $x=0$ 到 $x=6$ 作积分对应于将所有这种薄片的体积相加, 于是便得所求体积.

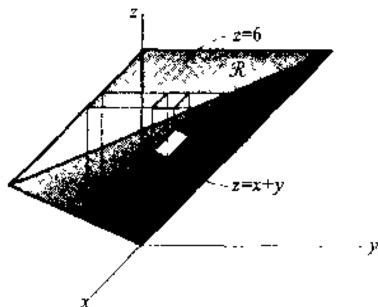


图 9-5

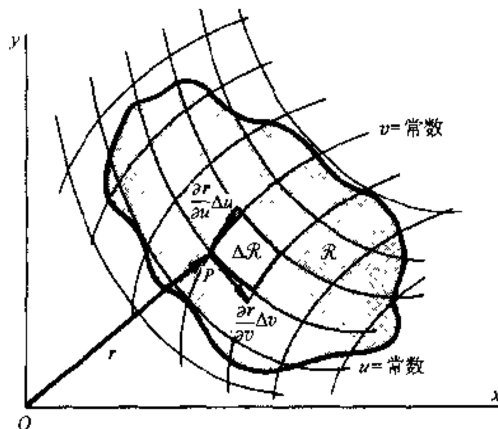


图 9-6

二重积分的变换

4. 对二重积分的变量代换，证明 p.165 的方程(9)的正确性.

证明 ☞ 在直角坐标系中，$F(x,\ y)$在区域$\mathscr{R}$(形如图 9-6)上的二重积分为$\iint\limits_{\mathscr{R}} F(x,\ y)dxdy$. 我们也可以在区域$\mathscr{R}$上作 u 和 v 的曲线坐标曲线，并通过考虑由此形成的网格(如图所示)来求这个二重积分.

设 P 是坐标为$(x,\ y)$或$(u,\ v)$的任意一点，其中 $x=f(u,\ v)$，$y=g(u,\ v)$，则由 O 到 P 的向量 $\boldsymbol{r}$ 为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=f(u,\ v)\boldsymbol{i}+g(u,\ v)\boldsymbol{j}$. 坐标曲线 $u=c_1$，$v=c_2$(其中 c_1 和 c_2 是常数)的切向量分别为$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$和$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$. 故图 9-6 中区域 $\Delta\mathscr{R}$ 的面积近似地为$\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|\Delta u\Delta v$.

但

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\boldsymbol{k}=\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\boldsymbol{k},$$

故

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|\Delta u\Delta v=\left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right|\Delta u\Delta v.$$

于是，这个二重积分便是下列和式的极限

$$\sum F\{f(u,\ v),\ g(u,\ v)\}\left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right|\Delta u\Delta v,$$

其中 $\sum$ 取遍整个区域$\mathscr{R}$. 研究表明这个极限为

$$\iint\limits_{\mathscr{K}} F\{f(u,\ v),\ g(u,\ v)\}\left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right|dudv,$$

其中$\mathscr{K}$是在变换$x=f(u,\ v)$、$y=g(u,\ v)$下，由$\mathscr{R}$映射成的 uv 平面上的区域.

证明上面的变量代换法的另一个方法是利用平面上的线积分和格林(Green)定理(见第十章习题 32).

5. 若 $u=x^2-y^2$，$v=2xy$，求以 u 和 v 表示的$\partial(x,\ y)/\partial(u,\ v)$.

解 ☞

$$\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix}=4(x^2+y^2),$$

由恒等式$(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2$ 得

$$(x^2+y^2)^2=u^2+v^2 \text{ 及 } x^2+y^2=\sqrt{u^2+v^2},$$

故由第六章的习题 45 得

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}=\frac{1}{\partial(u,\ v)/\partial(x,\ y)}=\frac{1}{4(x^2+y^2)}=\frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}.$$

另一解法 借助于 u 和 v，从给定方程中解出 x 和 y 并直接求雅可比式.

6. 求 xy 平面上由 $x^2-y^2=1$，$x^2-y^2=9$，$xy=2$，$xy=4$ 所围成的区域(假定为单位密度)的极转动惯量.

解 ☞ 在变换 $x^2-y^2=u$，$2xy=v$ 下，xy 平面上所求的区域[形如图 9-7(a)]$\mathscr{R}$映成 uv 面上的区域$\mathscr{K}$[形如图 9-7(b)]. 故所求的极转动惯量为：

$$\iint\limits_{\mathscr{R}}(x^2+y^2)dxdy=\iint\limits_{\mathscr{K}}(x^2+y^2)\left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right|dudv$$

$$=\iint\limits_{\mathscr{K}}\sqrt{u^2+v^2}\cdot\frac{dudv}{4\sqrt{u^2+v^2}}$$

$$= \frac{1}{4}\int_{u=1}^{9}\int_{v=4}^{8} du dv = 8.$$

这里使用了习题5的结论.

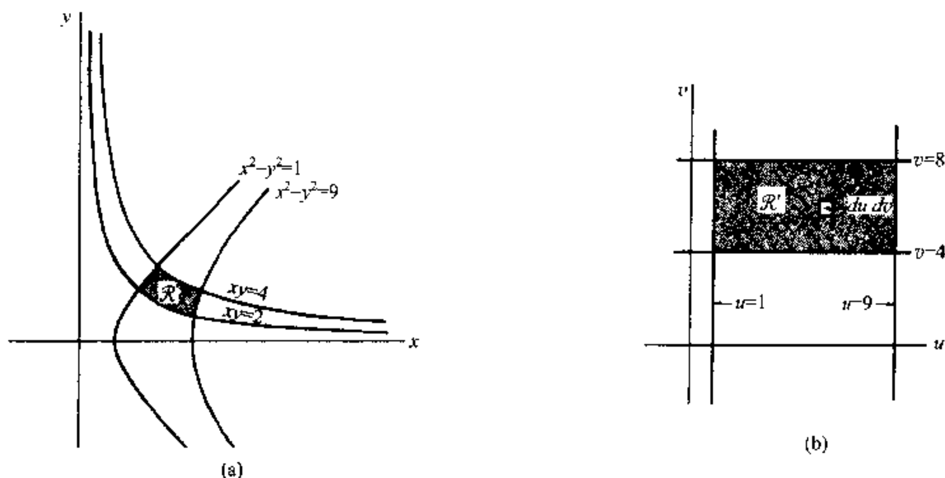


图 9-7

注意:区域$\mathscr{R}'$的积分限可由xy平面上的区域$\mathscr{R}$直接求出,而不必作出区域$\mathscr{R}'$.此时,使用的格子如同习题4.这里的曲线坐标(u, v)称为双曲坐标.

7. 求$\iint\limits_{\mathscr{R}}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$的值,其中$\mathscr{R}$为$xy$平面上由$x^2+y^2=4$和$x^2+y^2=9$围成的区域.

解 x^2+y^2的出现启发我们使用极坐标(ρ, ϕ),其中$x=\rho\cos\phi$、$y=\rho\sin\phi$(见第六章习题38).在此变换下,区域$\mathscr{R}$[图9-8(a)]映成区域$\mathscr{R}'$[图9-8(b)].

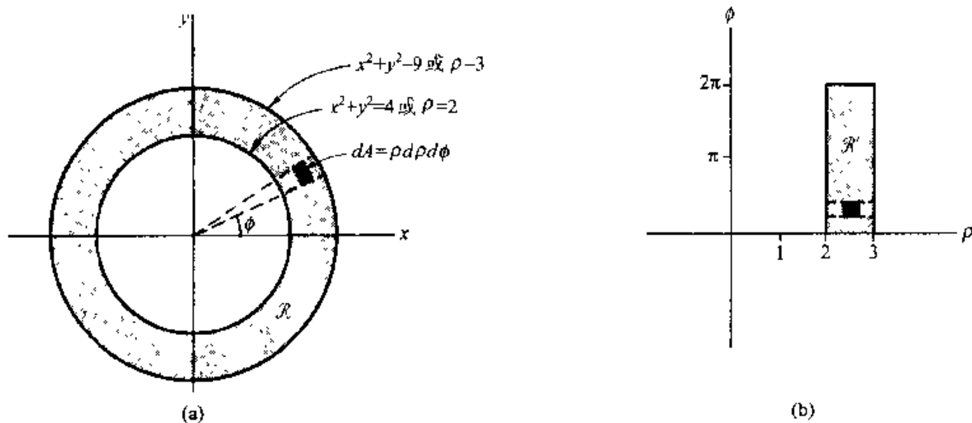


图 9-8

由于$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \phi)}=\rho$,故

$$\iint\limits_{\mathscr{R}}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint\limits_{\mathscr{R}'}\sqrt{x^2+y^2}\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \phi)}\right|d\rho d\phi=\iint\limits_{\mathscr{R}'}\rho\cdot\rho d\rho d\phi$$

$$=\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=2}^{3}\rho^2 d\rho d\phi=\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{\rho^3}{3}\Big|_2^3 d\phi=\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{19}{3}d\phi=\frac{38\pi}{3}.$$

由于对固定的ϕ,ρ在图9-8(a)用虚线所示的扇形中从$\rho=2$变到$\rho=3$,因此,也可通过观察区域$\mathscr{R}$而立即写出$\mathscr{R}'$的积分限.而后关于ϕ从$\phi=0$到$\phi=2\pi$积分便给出了所有扇形的贡献.几何上,$\rho d\rho d\phi$表示面积dA,如图9-8(a)所示.

8. 求xy平面上由双纽线$\rho^2=a^2\cos2\phi$围成的区域面积.

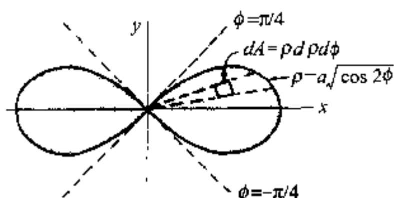


图 9-9

解 ☞ 这里的曲线直接用极坐标(ρ,ϕ)给定. 通过指定ϕ的各个不同值,并求出对应的ρ值,便得如图 9-9 所示图形. 所求的面积(利用对称性)为

$$4\int_{\phi=0}^{\pi/4}\int_{\rho=0}^{a\sqrt{\cos2\phi}}\rho d\rho d\phi=4\int_{\phi=0}^{\pi/4}\frac{\rho^2}{2}\Big|_{\rho=0}^{a\sqrt{\cos2\phi}}d\phi$$

$$=2\int_{\phi=0}^{\pi/4}a^2\cos2\phi d\phi=a^2\sin2\phi\Big|_{\phi=0}^{\pi/4}=a^2.$$

三重积分

9. (a)作出由$x+y+z=a(a>0),x=0,\ y=0,\ z=0$围成的空间区域$\mathscr{R}$的草图.

(b) 给出$\iiint\limits_{\mathscr{R}}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$的物理解释.

(c)求(b)中三重积分的值.

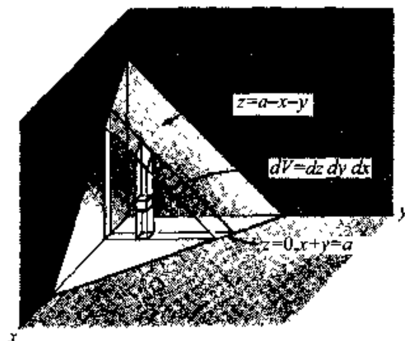


图 9-10

解 ☞ (a)所求区域$\mathscr{R}$如图 9-10 所示.

(b) 由于$x^2+y^2+z^2$是由任一点$(x,\ y,\ z)$到$(0,0,0)$的距离的平方,故我们可以认为该三重积分表示单位密度的区域$\mathscr{R}$的极转动惯量(即绕原点的转动惯量).

我们也可以认为该三重积分表示密度为$x^2+y^2+z^2$的区域$\mathscr{R}$的质量.

(c) 该三重积分可表示为累次积分

$$\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x}\int_{z=0}^{a-x-y}(x^2+y^2+z^2)dzdydx$$

$$=\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x}x^2z+y^2z+\frac{z^3}{3}\Big|_{z=0}^{a-x-y}dydx$$

$$=\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x}\left\{x^2(a-x)-x^2y+(a-x)y^2-y^3+\frac{(a-x-y)^3}{3}\right\}dydx$$

$$=\int_{x=0}^{a}x^2(a-x)y-\frac{x^2y^2}{2}+\frac{(a-x)y^3}{3}-\frac{y^4}{4}-\frac{(a-x-y)^4}{12}\Big|_{y=0}^{a-x}dx$$

$$=\int_0^a\left\{x^2(a-x)^2-\frac{x^2(a-x)^2}{2}+\frac{(a-x)^4}{3}-\frac{(a-x)^4}{4}+\frac{(a-x)^4}{12}\right\}dx$$

$$=\int_0^a\left\{\frac{x^2(a-x)^2}{2}+\frac{(a-x)^4}{6}\right\}dx=\frac{a^5}{20}.$$

对z从$z=0$到$z=a-x-y$作积分(保持x和y不变)对应于将直立柱体中每个立体的极转动惯量(或质量)相加. 其后对y从$y=0$到$y=a-x$作积分(保持x不变)对应于将包含在平行于yz平面的薄片中的所有直立柱体的极转动惯量(或质量)求和. 最后对x从$x=0$到$x=a$作积分就是将所有平行于yz平面的薄片的极转动惯量(或质量)相加.

尽管上面的积分是按次序$z,\ y,\ x$进行的,但显然也可以按其他的任一次序进行且最终的答案是相同的.

10. 求由抛物柱面$z=4-x^2$和平面$x=0,\ y=0,\ y=6,\ z=0$所围区域$\mathscr{R}$(假定密度为常数σ)的(a)体积,(b)质心.

解 ☞ 区域$\mathscr{R}$如图 9-11 所示.

(a) 所求体积$=\iiint\limits_{\mathscr{R}}dxdydz$

$$=\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=0}^{4-x^2}dzdydx$$

$$=\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}(4-x^2)dydx$$

$$= \int_{x=0}^{2} (4 - x^2) y \Big|_{y=0}^{6} dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} (24 - 6x^2) dx = 32.$$

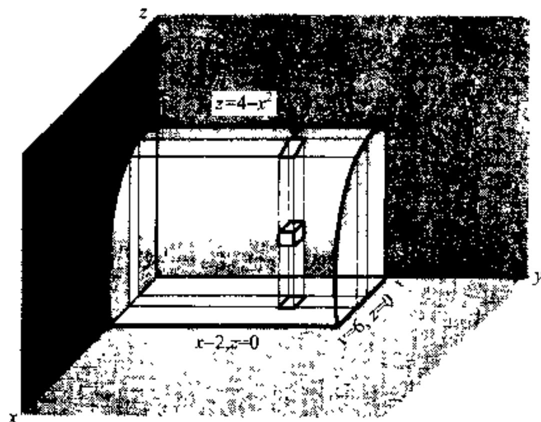


图 9-11

(b) 由于 σ 是常数,故由(a)得

$$\text{总质量} = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=0}^{4-x^2} \sigma dz dy dx = 32\sigma.$$

于是

$$\bar{x} = \frac{\text{关于 } yz \text{ 平面的总力矩}}{\text{总质量}} = \frac{\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=0}^{4-x^2} \sigma x dz dy dx}{\text{总质量}} = \frac{24\sigma}{32\sigma} = \frac{3}{4}.$$

$$\bar{y} = \frac{\text{关于 } xz \text{ 平面的总力矩}}{\text{总质量}} = \frac{\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=0}^{4-x^2} \sigma y dz dy dx}{\text{总质量}} = \frac{96\sigma}{32\sigma} = 3.$$

$$\bar{z} = \frac{\text{关于 } xy \text{ 平面的总力矩}}{\text{总质量}} = \frac{\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=0}^{4-x^2} \sigma z dz dy dx}{\text{总质量}} = \frac{256\sigma/5}{32\sigma} = \frac{8}{5}$$

故质点坐标为(3/4, 3, 8/5).

注意:$\bar{y}$ 的值因对称性而能预知.

三重积分的变换

11. 对三重积分作变量代换,证明 p.165 方程(11)的正确性.

解 ☞ 与习题 4 相似,作曲线坐标面网格将区域 $\mathscr{R}$ 分成子区域,并设 $\Delta\mathscr{R}$ 是这些子区域的代表元(见图 9-12).

由原点 O 到点 P 的向量 $\boldsymbol{r}$ 为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = f(u, v, w)\boldsymbol{i} + g(u, v, w)\boldsymbol{j} + h(u, v, w)\boldsymbol{k},$$

这里假定变换方程为 $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$.

坐标曲面两两相交所对应的坐标曲线的切向量由 $\partial\boldsymbol{r}/\partial u$, $\partial\boldsymbol{r}/\partial v$, $\partial\boldsymbol{r}/\partial w$ 给出.故图 9-12 中区域 $\Delta\mathscr{R}$ 的体积近似地由下式给出:

$$\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial w}\right|\Delta u\Delta v\Delta w = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right|\Delta u\Delta v\Delta w.$$

于是,$F(x, y, z)$ 在区域 $\mathscr{R}$ 上的三重积分为和式

$$\sum F\{f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)\}\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right|\Delta u\Delta v\Delta w$$

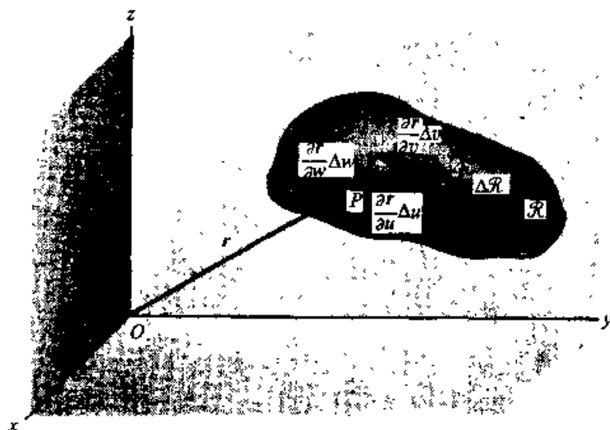


图 9-12

的极限.研究表明:这个极限为

$$\iiint_{\mathscr{R}'} F\{f(u,v,w),g(u,v,w),h(u,v,w)\}\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw,$$

其中 $\mathscr{R}'$ 是在所给变换下由区域 $\mathscr{R}$ 所映成的 uvw 空间的区域.

验证上述三重积分变量代换法正确性的另一方法是利用斯托克斯(Stokes)定理(见第十章的习题 84).

12. 分别用(a)柱坐标,(b)球坐标表示 $\iiint_{\mathscr{R}} F(x,y,z)dxdydz$.

解☞　(a)柱坐标中的变换方程为 $x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ z=z$.

与第六章习题 39 一样,可求出 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,z)}=\rho$.

故由习题 11 得,三重积分变成

$$\iiint_{\mathscr{R}'} G(\rho,\phi,z)\rho d\rho d\phi dz$$

其中 $\mathscr{R}'$ 是与 $\mathscr{R}$ 对应的 ρ,ϕ,z 空间中的区域,而 $G(\rho,\phi,z)\equiv F(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi,z)$.

(b) 球坐标中的变换方程为 $x=r\sin\theta\cos\phi,\ y=r\sin\theta\sin\phi,\ z=r\cos\theta$.

由第六章习题 103,知 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=r^2\sin\theta$.故由习题 11 得,三重积分变成

$$\iiint_{\mathscr{R}'} H(r,\theta,\phi)r^2\sin\theta drd\theta d\phi,$$

其中 $\mathscr{R}'$ 是与 $\mathscr{R}$ 对应的 r,θ,ϕ 空间中的区域,而 $H(r,\theta,\phi)\equiv F(r\sin\theta\cos\phi,r\sin\theta\sin\phi,r\cos\theta)$.

13. 求在 xy 平面上方由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和柱面 $x^2+y^2=a^2$ 所围的区域的体积.

解☞　这个体积用柱坐标最容易求出.在柱坐标下,抛物面和柱面方程分别为 $z=\rho^2$ 和 $\rho=a$.而所求体积又等于图 9-13 中所示体积的 4 倍,故

$$\begin{aligned}\text{所求体积}&=4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{a}\int_{z=0}^{\rho^2}\rho dzd\rho d\phi\\&=4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{a}\rho^3d\rho d\phi\\&=4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\frac{\rho^4}{4}\bigg|_{\rho=0}^{a}d\phi=\frac{\pi}{2}a^4.\end{aligned}$$

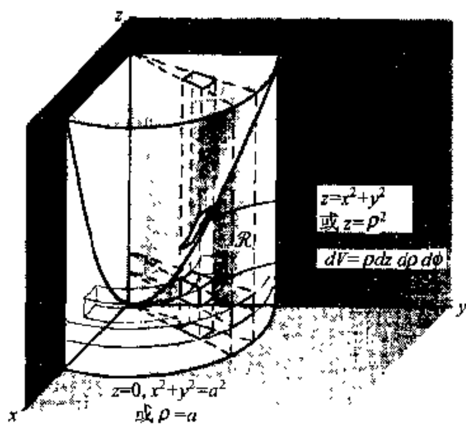


图 9-13

对 z 从 $z=0$ 到 $z=\rho^2$ 作积分(保持 ρ 和 ϕ 不变)对应于将由 xy 平面伸展到抛物面的直立柱体中的立方体体积(由 dV 表示)求和.接下来对 ρ 从 $\rho=0$ 到 $\rho=a$ 作积分(保持 ϕ 不变)对应于将楔形区域中所有直立柱体的体积相加.最后,对 ϕ 的积分对应于将所有这种楔形区域的体积相加.

这个积分也可按其他的次序求积,所得结果是相同的.

我们也可以通过确定在柱坐标变换下,由 $\mathscr{R}$ 所映成的 ρ, ϕ, z 空间的区域 $\mathscr{R}'$ 来求这个积分.

14. (a) 设密度为常数 σ,求习题 13 中的区域绕 z 轴的转动惯量.(b)求转动半径.

解 (a)绕 z 轴的转动惯量为

$$I_z = 4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{a}\int_{z=0}^{\rho^2}\rho^2\cdot\sigma\rho dz d\rho d\phi$$

$$= 4\sigma\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{a}\rho^5 d\rho d\phi = 4\sigma\int_{\phi=0}^{\pi/2}\frac{\rho^6}{6}\Big|_{\rho=0}^{a}d\phi = \frac{\pi a^6\sigma}{3}.$$

这个结果可用区域的质量 M 表示,因为由习题 13 得

$$M = \text{体积}\times\text{密度} = \frac{\pi}{2}a^4\sigma,$$

故

$$I_z = \frac{\pi a^6\sigma}{3} = \frac{\pi a^6}{3}\cdot\frac{2M}{\pi a^4} = \frac{2}{3}Ma^2$$

注意:在建立 I_z 的积分表达式中,我们可将 $\sigma\rho dz d\rho d\phi$ 认为是体积元所在立体的质量、将 $\rho^2\cdot\sigma\rho dz d\rho d\phi$ 认为是该立体绕 z 轴的转动惯量,而将 $\iiint\limits_{\mathscr{R}}\rho^2\cdot\sigma\rho dz d\rho d\phi$ 认为是整个立体绕 z 轴的转动惯量.积分限的确定与习题 13 相同.

(b) 设转动半径为 K,则 $MK^2=\frac{2}{3}Ma^2$,即 $K^2=\frac{2}{3}a^2$ 或 $K=a\sqrt{2/3}$.

K 的物理意义是:如果所有质量 M 都集中在半径为 K 的薄圆柱壳上,则这个薄圆柱壳绕其轴的转动惯量为 I_z.

15. (a)求由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和锥面 $z^2\sin^2\alpha=(x^2+y^2)\cos^2\alpha$(其中 α 是常数且 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$)所围的区域(含在锥内部分)的体积.(b)由(a)中结果,求半径为 a 的球的体积.

解 在球坐标中,球面方程为 $r=a$,锥面方程为 $\theta=\alpha$.这可以直接看出或利用变换方程 $x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\theta$ 求出.例如,利用变换方程,$z^2\sin^2\alpha=(x^2+y^2)\cos^2\alpha$ 便成为

$$r^2\cos^2\theta\sin^2\alpha = (r^2\sin^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi)\cos^2\alpha,$$

即

$$r^2\cos^2\theta\sin^2\alpha = r^2\sin^2\theta\cos^2\alpha,$$

由此得 $\tan\theta=\pm\tan\alpha$,因而 $\theta=\alpha$ 或 $\theta=\pi-\alpha$.只要考虑其中之一,比方说 $\theta=\alpha$,就够了.

(a)所求体积等于图 9-14 所示体积的 4 倍,故所求体积为

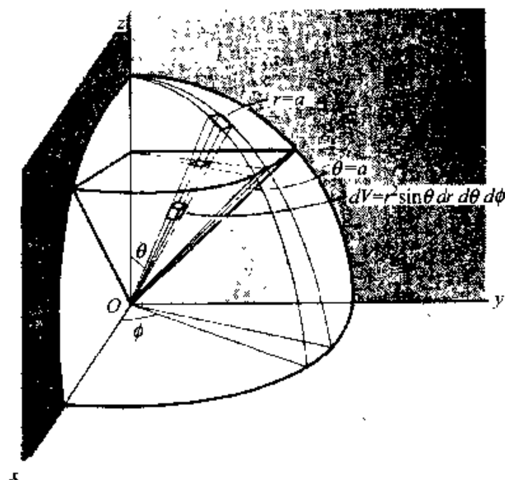


图 9-14

$$4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\alpha}\int_{r=0}^{a} r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

$$= 4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\alpha} \frac{r^3}{3}\sin\theta\Big|_{r=0}^{a} d\theta d\phi$$

$$= \frac{4a^3}{3}\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\alpha}\sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{4a^3}{3}\int_{\phi=0}^{\pi/2} -\cos\theta\Big|_{\theta=0}^{\alpha} d\phi = \frac{2\pi a^3}{3}(1-\cos\alpha).$$

对 r 从 $r=0$ 到 $r=a$ 所作的积分(保持 θ 和 ϕ 不变)对应于将由 $r=0$ 伸展到 $r=a$ 的锥体中的所有立体元(如 dV 所指)的体积相加.接着对 θ 从 $\theta=0$ 到 $\theta=\alpha$ 所作的积分(保持 ϕ 不变)对应于将楔形区域中所有锥体的体积相加.最后,对 ϕ 的积分对应于将所有这种楔形区域的体积相加.

(b)令 $\alpha=\pi$,便得球的体积为$\frac{2\pi a^3}{3}(1-\cos\pi)=\frac{4}{3}\pi a^3$.

16. 设密度为常数 σ,(a)求习题 15 中区域的质心,(b)利用(a)中结果,求半球的质心.

解 ☞　(a)设质心坐标为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,由对称性知 $\bar{x}=\bar{y}=0$,而

$$\bar{z} = \frac{\text{关于 } xy \text{ 平面的总力矩}}{\text{总质量}} = \frac{\iiint z\sigma dV}{\iiint \sigma dV},$$

由于 $z=r\cos\theta$,σ 是常数,故分子为

$$4\sigma\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\alpha}\int_{r=0}^{a} r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

$$= 4\sigma\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\alpha}\frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{a}\sin\theta\cos\theta d\theta d\phi$$

$$= \sigma a^4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\alpha}\sin\theta\cos\theta d\theta d\phi$$

$$= \sigma a^4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_{\theta=0}^{\alpha} d\phi$$

$$= \frac{\pi\sigma a^4\sin^2\alpha}{4}.$$

将习题 15(a)中结果乘以 σ 便得分母为$\frac{3}{2}\pi\sigma a^3(1-\cos\alpha)$.

故

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{4}\pi\sigma a^4\sin^2\alpha}{\frac{3}{2}\pi\sigma a^3(1-\cos\alpha)} = \frac{3}{8}a(1+\cos\alpha).$$

(b)令 $\alpha=\pi/2$,得 $\bar{z}=\frac{3}{8}a$.

杂题

17. 证明:(a) $\int_0^1\left\{\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}dy\right\}dx = \frac{1}{2}$,(b) $\int_0^1\left\{\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}dx\right\}dy = -\frac{1}{2}$.

证明 ☞　(a) $\int_0^1\left\{\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}dy\right\}dx = \int_0^1\left\{\int_0^1\frac{2x-(x+y)}{(x+y)^3}dy\right\}dx$

$$= \int_0^1\left\{\int_0^1\left(\frac{2x}{(x+y)^3}-\frac{1}{(x+y)^2}\right)dy\right\}dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{-x}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y} \right) \Bigg|_{y=0}^{1} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

(b)在(a)中形式上交换 x 和 y 的位置，立即可得 $\int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3} dx \right\} dy = \frac{1}{2}$，两边同乘以 -1 便得所证结果.

这个例子表明：交换积分次序并不总是产生相同结果. 积分次序可交换的一个充分条件是：在对应区域上的二重积分存在. 在这里，$\iint\limits_{\mathscr{R}} \frac{x-y}{(x+y)^3} dxdy$（$\mathscr{R}$ 为区域 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$）不存在是由于被积函数在原点不连续. 这个积分实际上是一个广义二重积分（见第十二章）.

18. 证明：$\int_0^x \left\{ \int_0^t F(u) du \right\} dt = \int_0^x (x-u) F(u) du$.

证明 ☞　设 $I(x) = \int_0^x \left\{ \int_0^t F(u) du \right\} dt, J(x) = \int_0^x (x-u)F(u)du$. 则由 p.148 的莱布尼茨法则得

$$I'(x) = \int_0^x F(u)du, J'(x) = \int_0^x F(u)du.$$

因此　$I'(x) = J'(x)$，故 $I(x) - J(x) = c$，其中 c 是常数. 又因为 $I(0) = J(0) = 0$，故 $c = 0$，从而 $I(x) = J(x)$.

这个结果有时写成形式

$$\int_0^x \int_0^x F(x) dx^2 = \int_0^x (x-u) F(u) du.$$

也能将该结果推广成（见习题 54）

$$\int_0^x \int_0^x \cdots \int_0^x F(x) dx^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-u)^{n-1} F(u) du.$$

补 充 习 题

二重积分

19. (a)画出 xy 平面上由 $y^2 = 2x$ 和 $y = x$ 所围成的区域 $\mathscr{R}$ 的草图. (b)求 $\mathscr{R}$ 的面积. (c)假设密度为常数 σ，求 $\mathscr{R}$ 的极转动惯量.

20. 求上题中区域的质心.

21. 已知 $\int_{y=0}^{3} \int_{x=1}^{\sqrt{4-y}} (x+y) dxdy$. (a)画出二重积分的积分区域的草图并给出二重积分可能的物理解释. (b)交换积分次序. (c)求二重积分的值.

22. 证明：$\int_{x=1}^{2} \int_{y=\sqrt{x}}^{x} \sin \frac{\pi x}{2y} dydx + \int_{x=2}^{4} \int_{y=\sqrt{x}}^{2} \sin \frac{\pi x}{2y} dydx = \frac{4(\pi+2)}{\pi^3}$.

23. 求由 $x/a + y/b + z/c = 1$ 和坐标面所围成的四面体的体积.

24. 求由 $z = x^2 + y^2, z = 0, x = -a, x = a, y = -a, y = a$ 所围成的区域的体积.

25. 假设密度为常数 σ，求习题 24 中区域(a)绕 z 轴的转动惯量，(b)质心.

二重积分的变换

26. 设 $\mathscr{R}$ 为区域 $x^2 + y^2 \leqslant a^2$，求 $\iint\limits_{\mathscr{R}} \sqrt{x^2+y^2} dxdy$ 的值.

27. 如果 $\mathscr{R}$ 为习题 26 中区域，求 $\iint\limits_{\mathscr{R}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ 的值.

28. 利用变换 $x + y = u, y = uv$，证明：

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} e^{y/(x+y)} dydx = \frac{e-1}{2}.$$

29. 求由 $xy = 4, xy = 8, xy^3 = 5, xy^3 = 15$ 所围成的区域的面积[提示：设 $xy = u, xy^3 = v$.]

30. 证明:由抛物线 $y^2=x$, $y^2=8x$, $x^2=y$, $x^2=8y$ 所围成的第一象限内的区域绕 x 轴旋转所产生的立体体积为 $279\pi/2$.[提示:设 $y^2=ux$, $x^2=vy$.]

31. 求由 $y=x^3$, $y=4x^3$, $x=y^3$, $x=4y^3$ 所围成的第一象限内区域的面积.

32. 设 $\mathscr{R}$ 是由 $x+y=1$, $x=0$, $y=0$ 所围成的区域.证明:

$$\iint_{\mathscr{R}}\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dxdy=\frac{\sin 1}{2}.$$

[提示:设 $x-y=u$, $x+y=v$.]

三重积分

33. (a)求 $\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{2}xyz\,dzdydx$ 的值.(b) 给出(a) 中积分的物理解释.

34. 求由 $x/a+y/b+z/c=1$(其中 a,b,c 是正的)所围成的第一卦限内区域的(a)体积,(b)质心.

35. 求习题 34 中区域绕 z 轴的(a)转动惯量,(b)转动半径.

36. 设密度为 xyz,求对应于 $x^2+y^2+z^2\leqslant 4$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ 的区域的质量.

37. 求由 $z=x^2+y^2$ 和 $z=2x$ 所围成的区域的体积.

三重积分的变换

38. 求由 $z=4-x^2-y^2$ 和 xy 平面所围成的区域的体积.

39. 假设密度为常数 σ,求习题 38 中区域的质心.

40. (a)求 $\iiint_{\mathscr{R}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$,其中 $\mathscr{R}$ 是由平面 $z=3$ 及锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$)所围成的区域.(b)给出(a)中积分的物理解释.[提示:在柱坐标中按次序 ρ,z,ϕ 作积分.]

41. 证明:由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和抛物面 $z=x^2+y^2$ 所围成的区域的体积为 $\pi/6$.

42. 一半径为 a,高为 b 的正圆柱,如果密度与到轴的距离成正比,求该圆柱绕其轴的转动惯量.

43. (a)求 $\iiint_{\mathscr{R}}\frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$,其中 $\mathscr{R}$ 是由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和 $x^2+y^2+z^2=b^2$(其中 $a>b>0$)所围成的区域.(b)给出(a)中积分的物理解释.

44. (a)求由球面 $r=2a\cos\theta$ 和锥面 $\phi=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$所围成的(含在锥内部分)区域的体积.(b)讨论 $\alpha=\pi/2$ 时的情形.

45. 设一半球壳的外半径为 a,内半径为 b.如果它的密度为(a)常数,(b)与到底部的距离的平方成正比.分别求其质心.讨论 $a=b$ 时的情形.

杂题

46. 设一正圆柱的半径为 a,高为 b,它在一点处的密度与该点到底圆的距离的平方成正比.求其质量.

47. 设一区域由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $z=b$($a>b>0$)所围成并位于平面上方.(a)求其体积,(b)假如密度为常数,求其质心.

48. 从一半径为 a 的球中挖一半径为 b 的圆柱形孔,该柱体的轴与球的一直径一致.证明:从球中挖下部分的体积为 $\frac{4}{3}\pi[a^3-(a^2-b^2)^{3/2}]$.

49. 平面上一简单闭曲线以所在平面内一条不相交直线为轴旋转.证明:由此产生的立体的体积等于该曲线所围区域的面积乘以这个区域的质心在旋转中所绕行的距离.[帕普斯(Pappus)定理.]

50. 利用习题 49 求圆 $x^2+(y-b)^2=a^2$ ($b>a>0$)绕 x 轴旋转所产生的立体体积.

51. 求由双曲柱面 $xy=1$, $xy=9$, $xz=4$, $xz=36$, $yz=25$, $yz=49$ 所围区域的体积.[提示:设 $xy=u$, $xz=v$, $yz=w$].

52. 求 $\iiint_{\mathscr{R}}\sqrt{1-(x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2)}\,dxdydz$,其中 $\mathscr{R}$ 是椭球面 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ 的内部区域.[提示:设 $x=au$, $y=bv$, $z=cw$,然后用球坐标.]

53. 若区域 $\mathscr{R}$ 为 $x^2+xy+y^2\leqslant 1$,证明:

$$\iint_{\mathscr{R}}e^{-(x^2+xy+y^2)}dxdy=\frac{2\pi}{e\sqrt{3}}(e-1).$$

[提示:设 $x=u\cos\alpha-v\sin\alpha$, $y=u\sin\alpha+v\cos\alpha$.并选择 α 使积分中的项 xy 消失.然后,适当选择 a 和 b 并令 $u=a\rho\cos\phi$, $v=b\rho\sin\phi$.]

54. 证明:$\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x F(x)dx^n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x(x-u)^{n-1}F(u)du$, $n=1,2,\cdots$

(见习题 18).

第十章　曲线积分,曲面积分和积分定理

曲线积分

设 C 为 xy 平面内连接点 $A(a_1, b_1)$ 和 $B(a_2, b_2)$ 的一条曲线(图 10-1),$P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 是定义在 C 上的单值函数. 在 C 上任意插入 $(n-1)$ 个点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ 将 C 分成 n 个小段. 设 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ $(k=1, 2, \cdots, n)$,其中 $(a_1, b_1) \equiv (x_0, y_0)$, $(a_2, b_2) \equiv (x_n, y_n)$. 又 (ξ_k, η_k) 为 C 上点 (x_{k-1}, y_{k-1}) 和 (x_k, y_k) 之间任意取定的一点,并作和式

$$\sum_{k=1}^{n} \{P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\}, \tag{1}$$

当 $n \to \infty$ 即所有 Δx_k, Δy_k 趋向零时,如果和式极限存在,则称此极限值为沿着 C 的曲线积分,表示为

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy \text{ 或} \int_{(a_1, b_1)}^{(a_2, b_2)} Pdx + Qdy. \tag{2}$$

当 P 和 Q 在 C 上连续(或分段连续)时,上述极限一定存在. 积分值通常与 P, Q 相关,特别取决于曲线 C 和积分限 (a_1, b_1) 和 (a_2, b_2).

类似地沿着三维空间中的曲线 C 的曲线积分可定义为:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \{A_1(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k + A_2(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta y_k + A_3(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta z_k\}$$
$$= \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz, \tag{3}$$

其中 A_1, A_2 和 A_3 是 x, y 和 z 的函数.

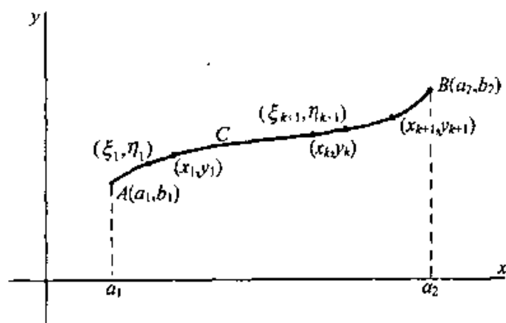


图 10-1

还可以在曲线上定义其他类型的曲线积分. 例如,如果 Δs_k 表示图 10-1 中曲线 C 上两点 (x_k, y_k) 和 (x_{k+1}, y_{k+1}) 之间的弧长,则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} U(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k = \int_C U(x, y)ds, \tag{4}$$

称为 $U(x, y)$ 沿着曲线 C 的曲线积分. 可以推广到三维或三维以上的空间.

线积分的向量表示

将线积分表示为向量形式不仅符号简洁,而且有助于从物理或几何角度作出解释. 例如,我们将曲线积分(3)表示为下列形式:

$$\int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$
$$= \int_C (A_1 \boldsymbol{i} + A_2 \boldsymbol{j} + A_3 \boldsymbol{k}) \cdot (dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}) \tag{5}$$

$$= \int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r},$$

其中 $\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k}$ 且 $d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}$. 曲线积分(2)是 $z=0$ 时的特殊情况.

如果在每一点(x, y, z)处有一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用在物体上(即如果定义一个力场),则

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{6}$$

表示物理上将物体沿着曲线 C 移动所做的功.

曲线积分的计算

设平面 $z=0$ 上的曲线 C 方程为 $y=f(x)$, 则将 $y=f(x)$, $dy=f'(x)dx$ 代入曲线积分(2)的被积表达式中,转化为定积分

$$\int_{a_1}^{a_2} P\{x, f(x)\}dx + Q\{x, f(x)\}f'(x)dx, \tag{7}$$

可以用一般的方法求得.

类似地,设曲线 C 方程为 $x=g(y)$, 则 $dx=g'(y)dy$, 曲线积分转化为

$$\int_{b_1}^{b_2} P\{g(y), y\}g'(y)dy + Q\{g(y), y\}dy. \tag{8}$$

设曲线 C 的参数方程为 $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$, 则线积分转化为

$$\int_{t_1}^{t_2} P\{\phi(t), \psi(t)\}\phi'(t)dt + Q\{\phi(t), \psi(t)\}\psi'(t)dt, \tag{9}$$

其中 t_1 和 t_2 分别为点 A 和 B 对应的参数值 t.

在计算时可综合运用上述方法.

空间曲线上的曲线积分可用类似方法计算.

曲线积分性质

类似于一般积分,曲线积分有下列性质:

1. $\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_C P(x, y)dx + \int_C Q(x, y)dy$.

2. $\int_{(a_1, b_1)}^{(a_2, b_2)} Pdx + Qdy = -\int_{(a_2, b_2)}^{(a_1, b_1)} Pdx + Qdy$,即积分路径反向曲线积分改变符号.

3. $\int_{(a_1, b_1)}^{(a_2, b_2)} Pdx + Qdy = \int_{(a_1, b_1)}^{(a_3, b_3)} Pdx + Qdy + \int_{(a_3, b_3)}^{(a_2, b_2)} Pdx + Qdy$, 其中$(a_3, b_3)$是曲线 C 上另外一点.

类似的性质可推广到空间曲线的曲线积分.

简单闭曲线,单连通和多连通区域

简单闭曲线是一条不自交的封闭曲线. 平面 xy 内曲线的参数方程为 $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$,其中 ϕ 和 ψ 为区间 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 上单值连续函数. 如果 $\phi(t_1)=\phi(t_2)$且 $\psi(t_1)=\psi(t_2)$,则曲线是封闭的. 如果 $\phi(u)=\phi(v)$, $\psi(u)=\psi(v)$当且仅当 $u=v$ 时成立(当 $u=t_1, v=t_2$ 时除外),则曲线是封闭的且不自交,为一简单闭曲线. 我们假定,除非另作说明,ϕ 和 ψ 在 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 上分段可微.

如果一平面区域具有下列特性:平面区域上任一封闭曲线可连续收缩为一点,且该点仍在平面区域内,则该区域称为单连通的,否则称为多连通. (见第六章 p.93).

当参数 t 从 t_1 变到 t_2 时,可定义平面曲线的方向.对于 xy 平面内的曲线,当观察者沿着曲线正向行走时,该曲线围成的区域始终在其左侧,反之则为负向.这就是说,对于 xy 平面内一简单闭曲线,逆时针方向为正向,顺时针方向为负向.

平面格林(Green)定理

设 $\mathscr{R}$ 为一简单闭曲线 C 围成的单连通区域,函数 P,Q, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ 是 $\mathscr{R}$ 上单值连续函数,则

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_{\mathscr{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy, \tag{10}$$

其中 $\oint_C$ 表示沿着封闭曲线 C 的正向积分.

曲线积分与路径无关的条件

定理 1 曲线积分 $\int_C Pdx + Qdy$ 与单连通区域 $\mathscr{R}$ 上两给定点之间的路径 C 无关的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{11}$$

在 $\mathscr{R}$ 内成立.设偏导数在 $\mathscr{R}$ 上连续.

条件(11)也是 $Pdx + Qdy$ 在 $\mathscr{R}$ 内为某个函数全微分的充分必要条件,即存在一函数 $\phi(x, y)$,使得 $Pdx + Qdy = d\phi$.如果曲线 C 的两端点为(x_1, y_1)和(x_2, y_2),则曲线积分值为

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} Pdx + Qdy = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} d\phi = \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1). \tag{12}$$

特别地,当条件(11)成立且 C 为封闭曲线,即 $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ 时,有

$$\oint_C Pdx + Qdy = 0. \tag{13}$$

证明及相关定理,见习题 11～13.

定理 1 的结论也可推广到空间曲线的积分,有如下定理:

定理 2 曲线积分 $\int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$ 与单连通区域 $\mathscr{R}$ 内两给定点之间的路径 C 无关的充要条件是

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\partial A_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_3}{\partial x} = \frac{\partial A_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial y} \tag{14}$$

在 $\mathscr{R}$ 内成立.设偏导数在 $\mathscr{R}$ 上连续.

以上定理可以用向量形式简洁地表示.设 $\mathbf{A} = A_1 \boldsymbol{i} + A_2 \boldsymbol{j} + A_3 \boldsymbol{k}$,曲线积分记为 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{r}$,条件(14)等价于$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$.如果 $\mathbf{A}$ 表示作用在某个物体上的一个力场 $\boldsymbol{F}$,将物体从一点移动到另外一点做的功与连接两点的路径无关的充要条件是$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$.这样的力场是保守的.

条件(14)(或等价条件$\nabla \times \mathbf{A} = 0$)也是 $A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$(或 $\mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{r}$)为全微分的充要条件,即存在函数 $\phi(x, y, z)$使得 $A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz = d\phi$.设曲线 C 的两端点为(x_1, y_1, z_1)和(x_2, y_2, z_2),则曲线积分值为

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} d\phi = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1). \tag{15}$$

特别地,如果 C 是封闭曲线且满足$\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$,则有

$$\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = 0. \tag{16}$$

曲面积分

设 S 为一双侧曲面,在 xy 平面上的投影区域为 $\mathscr{R}$,如图 10-2 所示.曲面 S 的方程为 $z = f(x, y)$,其中 $f(x, y)$是 $\mathscr{R}$ 上的单值连续函数.将 $\mathscr{R}$ 分成 n 个子区域 ΔA_p, $p = 1, 2, \cdots, n$,在每一个子区域上作一垂直的柱面与曲面 S 交于区域 ΔS_p.

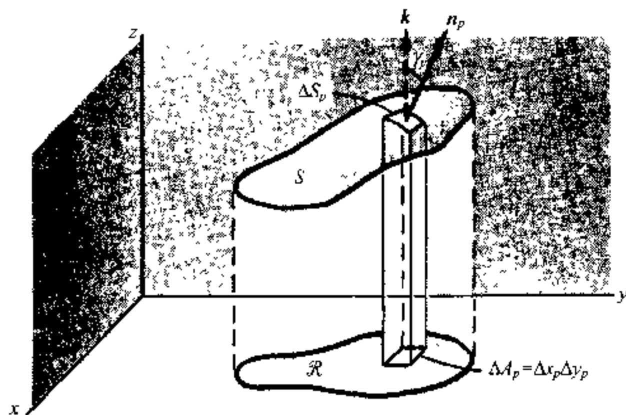


图 10-2

设 $\phi(x, y, z)$为曲面 S 上的单值连续函数,构造和式

$$\sum_{p=1}^{n} \phi(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) \Delta S_p, \tag{17}$$

其中(ξ_p, η_p, ζ_p)为 ΔS_p 中任意一点.如果当 $n \to \infty$,即每一个 $\Delta S_p \to 0$ 时,和式的极限存在,则称此极限值为 $\phi(x, y, z)$在曲面 S 上的曲面积分,记为

$$\iint_S \phi(x, y, z) dS. \tag{18}$$

因为 $\Delta S_p = |\sec\gamma_p| \Delta A_p$,其中 γ_p 是S 的法向量与 z 轴正向的夹角,和式(17)改写为

$$\iint_{\mathscr{R}} \phi(x, y, z) |\sec\gamma| dA, \tag{19}$$

其中

$$|\sec\gamma| = \frac{1}{|\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{k}|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}. \tag{20}$$

如果 $z = f(x, y)$在 $\mathscr{R}$ 上有一阶或二阶连续偏导数,则(19)可化为

$$\iint_{\mathscr{R}} \phi(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy. \tag{21}$$

如果曲面 S 的方程为$F(x, y, z) = 0$,则(21)变为

$$\iint_{\mathscr{R}} \phi(x, y, z) \frac{\sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2}}{|F_z|} dxdy. \tag{22}$$

公式(21)或(22)都可用来计算(18).

以上我们假设任意平行于 z 轴的直线与 S 只有一个交点.如果 S 不是这种类型的曲面,可将 S 分成若干个曲面 $S_1, S_2, \cdots$,使其具有以上特征.

以上结论是将 S 向 xy 平面投影得区域 $\mathscr{R}$ 而推出的.有时将曲面 S 向 yz 或 xz 平面投影会更简单,只要将(21)、(22)稍作修改便可用于计算(18).

散度定理

设 S 是一闭曲面,它围成的空间区域为 V,取曲面 S 外侧法向为其正法向,设该法向与 x, y, z 轴正向夹角为 α, β, γ,且 A_1, A_2, A_3 在 V 上有连续偏导数,则

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dV = \iint_S (A_1 \cos\alpha + A_2 \cos\beta + A_3 \cos\gamma) dS \tag{23}$$

或

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dV = \iint_S A_1 dydz + A_2 dzdx + A_3 dxdy. \tag{24}$$

写成向量形式:

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS, \tag{25}$$

其中 $\boldsymbol{A} = A_1 \boldsymbol{i} + A_2 \boldsymbol{j} + A_3 \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n} = \cos\alpha \boldsymbol{i} + \cos\beta \boldsymbol{j} + \cos\gamma \boldsymbol{k}$.

这个定理称为散度定理或称为空间格林定理,它表明:向量 $\boldsymbol{A}$ 的外法向分量在闭曲面上的曲面积分等于向量 $\boldsymbol{A}$ 的散度在由该闭曲面所围成的立体上的三重积分.

斯托克斯(Stokes)定理

假设 S 是以一简单闭曲线 C 为边界的双侧开曲面.事先规定 S 的某一侧法线为正向,则另一侧为负的.当观察者立于法线的正方向,沿着 S 的边界曲线 C 的正向行走,曲面在其左侧.设 A_1, A_2, A_3 是单值、连续函数,且在包含 S 的空间某一邻域内有一阶偏导数,有

$$\int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\cos\gamma \right] dS, \tag{26}$$

也可以简单记为向量形式:

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n} dS,$$

其中 $\boldsymbol{A} = A_1 \boldsymbol{i} + A_2 \boldsymbol{j} + A_3 \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n} = \cos\alpha \boldsymbol{i} + \cos\beta \boldsymbol{j} + \cos\gamma \boldsymbol{k}$.

这称为斯托克斯定理,即向量 $\boldsymbol{A}$ 在曲线 C 的切向量上的投影沿着简单闭曲线 C 的曲线积分等于向量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度在 C 围成的曲面 S 的法向量上投影的曲面积分.特别地,当 $\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$ 时,由(27)可得到(16).

习题与解答

曲线积分

1. 计算 $\int_{(0,1)}^{(1,2)} (x^2 - y)dx + (y^2 + x)dy$, 沿着

(a) 从(0,1) 到(1,2) 的直线段;

(b) 依次连接(0,1),(1,1) 和(1,2) 的有向折线;

(c) 抛物线 $x=t,\ y=t^2+1$.

解 ☞ (a) xy 平面内连接(0,1) 和(1,2) 两点的直线方程为: $y=x+1$, 则 $dy=dx$,曲线积分等于:

$$\int_{x=0}^{1}\{x^2-(x+1)\}dx+\{(x+1)^2+x\}dx=\int_0^1(2x^2+2x)dx=5/3.$$

(b) 沿着从(0,1)到(1,1)的直线段,$y=1$, $dy=0$,则曲线积分等于

$$\int_{x=0}^{1}(x^2-1)dx+(1+x)(0)=\int_0^1(x^2-1)dx=-2/3$$

沿着从(1,1)到(1,2)的直线段,$x=1$, $dx=0$, 则曲线积分等于

$$\int_{y=1}^{2}(1-y)(0)+(y^2+1)dy=\int_1^2(y^2+1)dy=10/3,$$

从而$\int_{(0,1)}^{(1,2)}(x^2-y)dx+(y^2+x)dy=-2/3+10/3=8/3.$

(c) 因为在(0,1)处 $t=0$,在(1,2)处 $t=1$, 则曲线积分等于

$$\int_{t=0}^{1}\{t^2-(t^2+1)\}dt+\{(t^2+1)^2+t\}2t\,dt$$

$$=\int_0^1(2t^5+4t^3+2t^2+2t-1)dt=2.$$

2. 设 $\boldsymbol{A}=(3x^2-6yz)\boldsymbol{i}+(2y+3xz)\boldsymbol{j}+(1-4xyz^2)\boldsymbol{k}$, 计算 $\int_C\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$,沿着以下路径 C 从(0,0,0)到(1,1,1):

(a) $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$;

(b) 依次连接(0,0,0),(0,0,1)和(1,1,1)的有向折线段;

(c) 从(0,0,0)到(1,1,1)的直线段.

解 ☞ $\int_C\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_C\{(3x^2-6yz)\boldsymbol{i}+(2y+3xz)\boldsymbol{j}+(1-4xyz^2)\boldsymbol{k}\}\cdot(dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}+dz\boldsymbol{k})$

$$=\int_C(3x^2-6yz)dx+(2y+3xz)dy+(1-4xyz^2)dz.$$

(a) 设 $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$,点(0,0,0) 和(1,1,1) 分别与 $t=0$ 和 $t=1$ 对应, 则

$$\int_C\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{t=0}^{1}\{3t^2-6(t^2)(t^3)\}dt+\{2t^2+3(t)(t^3)\}d(t^2)$$

$$+\{1-4(t)(t^2)(t^3)^2\}d(t^3)$$

$$=\int_{t=0}^{1}(3t^2-6t^5)dt+(4t^3+6t^5)dt+(3t^2-12t^{11})dt$$

$$=2.$$

另一种解法:

沿着 C,$\boldsymbol{A}=(3t^2-6t^5)\boldsymbol{i}+(2t^2+3t^4)\boldsymbol{j}+(1-4t^9)\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k}$, $d\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+3t^2\boldsymbol{k})dt$,则

$$\int_C\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^1(3t^2-6t^5)dt+(4t^3+6t^5)dt+(3t^2-12t^{11})dt$$

$$=2.$$

(b) 沿着从(0,0,0)到(0,0,1)的直线段,$x=0$, $y=0$, $dx=0$, $dy=0$, z 从 0 变化到 1.沿着这条路径的积分为

$$\int_{z=0}^{1}\{3(0)^2-6(0)(z)\}0+\{2(0)+3(0)(z)\}0+\{1-4(0)(0)(z^2)\}dz$$

$$= \int_{z=0}^{1} dz = 1.$$

沿着从(0,0,1)到(0,1,1)的直线段,$x=0$, $z=1$, $dx=0$, $dz=0$, y 从 0 变化到 1. 沿着这条路径的积分为

$$\int_{y=0}^{1} \{3(0)^2 - 6(y)(1)\}0 + \{2y + 3(0)(1)\}dy + \{1 - 4(0)(y)(1)^2\}0$$
$$= \int_{y=0}^{1} 2ydy = 1.$$

沿着从(0,1,1)到(1,1,1)的直线段, $y=1$, $z=1$, $dy=0$, $dz=0$, x 从 0 变化到 1。沿着这条路径的积分为

$$\int_{x=0}^{1} \{3x^2 - 6(1)(1)\}dx + \{2(1) + 3x(1)\}0 + \{1 - 4x(1)(1)^2\}0$$
$$= \int_{x=0}^{1} (3x^2 - 6)dx = -5,$$

则 $\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = 1+1-5 = -3$.

(c) 连接(0,0,0)和(1,1,1)的直线段的参数方程为 $x=t$, $y=t$, $z=t$, 则

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{t=0}^{1} (3t^2 - 6t^2)dt + (2t + 3t^2)dt + (1 - 4t^4)dt$$
$$= 6/5.$$

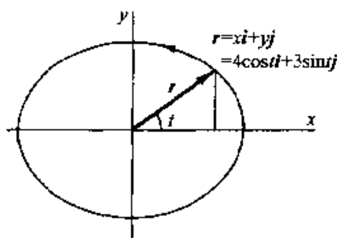


图 10-3

3. 设一力场 $\boldsymbol{F} = (3x - 4y + 2z)\boldsymbol{i} + (4x + 2y - 3z^2)\boldsymbol{j} + (2xz - 4y^2 + z^3)\boldsymbol{k}$. 试求一质点沿 xy 平面内一长半轴为 4, 短半轴为 3, 中心在坐标原点的椭圆(图 10-3)移动一周, 场力所作的功.

解 ☞ 在平面 $z=0$ 上, $\boldsymbol{F} = (3x-4y)\boldsymbol{i} + (4x+2y)\boldsymbol{j} - 4y^2\boldsymbol{k}$ 且 $d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j}$, 则所作的功为

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \{(3x-4y)\boldsymbol{i} + (4x+2y)\boldsymbol{j} - 4y^2\boldsymbol{k}\}\cdot\{dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j}\}$$
$$= \oint_C (3x-4y)dx + (4x+2y)dy.$$

椭圆的参数方程为 $x = 4\cos t$, $y = 3\sin t$, 其中 t 从 0 变化到 2π(图 10-3), 则曲线积分等于:

$$\int_0^{2\pi} \{3(4\cos t) - 4(3\sin t)\}\cdot\{-4\sin t\}dt + \{4(4\cos t) + 2(3\sin t)\}\cdot\{3\cos t\}dt$$
$$= \int_{t=0}^{2\pi} (48 - 30\sin t\cos t)dt = (48t - 15\sin^2 t)\Big|_0^{2\pi} = 96\pi.$$

我们选择图 10-3 中沿着 C 逆时针方向移动一周, 称为正方向. 如果沿着顺时针方向(负方向)移动一周, 所作的功为 -96π.

4. 计算 $\int_C yds$, 其中曲线 C 为 $y = 2\sqrt{x}$ 上从 $x=3$ 到 $x=24$ 的一段弧.

解 ☞ 因为 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y')^2}dx = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}dx$, 则有

$$\int_C yds = \int_3^{24} 2\sqrt{x}\sqrt{1 + 1/x}\,dx = 2\int_3^{24}\sqrt{x+1}\,dx$$
$$= \frac{4}{3}(x+1)^{3/2}\Big|_3^{24} = 156.$$

平面格林定理

5. 证明平面格林定理.假设 C 是一封闭曲线且任意平行于坐标轴的直线与 C 至多有两个交点.

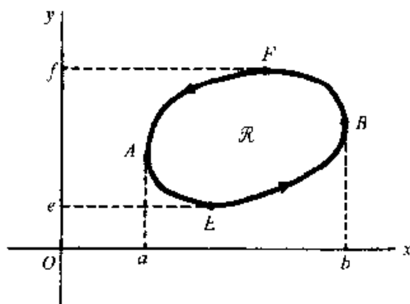


图 10-4

证明 ☞　设曲线 AEB 和 AFB 的方程分别为 $y=Y_1(x)$ 和 $y=Y_2(x)$,(图 10-4)如果 $\mathcal{R}$ 是以 C 为边界的区域,则

$$\iint_{\mathcal{R}}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy\right]dx$$

$$=\int_{x=a}^{b}P(x,\ y)\Big|_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)}dx=\int_a^b[P(x,\ Y_2)-P(x,\ Y_1)]dx$$

$$=-\int_a^bP(x,\ Y_1)dx-\int_a^bP(x,\ Y_2)dx$$

$$=-\oint_CPdx,$$

即

$$\oint_CPdx=-\iint_{\mathcal{R}}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy. \tag{1}$$

类似地,设曲线 EAF 和 EBF 的方程分别为 $x=X_1(y)$, $x=X_2(y)$,则

$$\iint_{\mathcal{R}}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\int_{y=e}^{f}\left[\int_{x=X_1(y)}^{X_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}dx\right]dy=\int_e^f[Q(X_2,\ y)-Q(X_1,\ y)]dy$$

$$=\int_f^eQ(X_1,\ y)dy+\int_e^fQ(X_2,\ y)dy$$

$$=\oint_CQdy.$$

即 $$\oint_CQdy=\iint_{\mathcal{R}}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy. \tag{2}$$

将(1)和(2)相加得

$$\oint_CPdx+Qdy=\iint_{\mathcal{R}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

6. 对曲线积分 $\oint_C(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$ 验证平面格林定理的正确性,其中 C 是由 $y=x^2$ 及 $y^2=x$ 围成区域的边界曲线的正向.

证明 ☞　平面曲线 $y=x^2$ 及 $y^2=x$ 相交于(0,0)及(1,1),沿着封闭曲线 C 的正向(图 10-5)积分.

沿 $y=x^2$,曲线积分为

$$\int_{x=0}^{1}\{(2x)(x^2)-x^2\}dx+\{x+(x^2)^2\}d(x^2)=\int_0^1(2x^3+x^2+2x^5)dx=7/6.$$

沿 $y^2=x$,曲线积分为

$$\int_{y=1}^{0}\{2(y^2)(y)-(y^2)^2\}d(y^2)+\{y^2+y^2\}dy=\int_1^0(4y^4-2y^5+2y^2)dy$$

$$=-17/15,$$

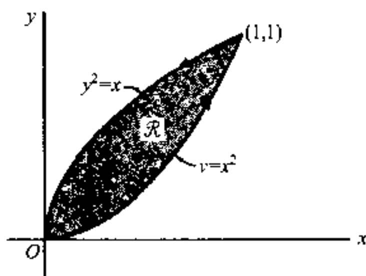


图 10-5

所以 $\oint_C(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy=7/6-17/15=1/30.$

而 $\iint_{\mathcal{R}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

$$=\iint_{\mathcal{R}}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(x+y^2)-\frac{\partial}{\partial y}(2xy-x^2)\right\}dxdy$$

$$=\iint_{\mathcal{R}}(1-2x)dxdy=\int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}}(1-2x)dydx$$

$$= \int_{x=0}^{1} (y - 2xy) \Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (x^{1/2} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3) dx$$

$$= 1/30.$$

因此格林定理得到验证.

7. 假设平行于坐标轴的直线与封闭曲线 C 的交点不止两个,在其上验证平面格林定理.

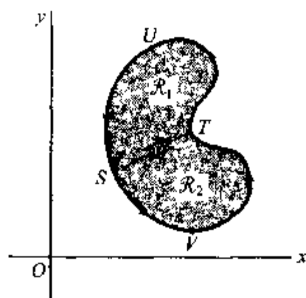


图 10-6

证明 ☞　考虑如图 10-6 所示的封闭曲线 C,平行于坐标轴的直线与曲线 C 的交点可能多于两个.添加一直线 ST 将区域分成两个子区域 $\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_2$,满足习题 5 中边界曲线的特点,在其上分别应用格林定理,即

(1) $\displaystyle\int_{STUS} Pdx + Qdy = \iint_{\mathcal{R}_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$

(2) $\displaystyle\int_{SVTS} Pdx + Qdy = \iint_{\mathcal{R}_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$

将(1)、(2) 左边相加,略去每项中的被积表达式 $Pdx + Qdy$,得

$$\int_{STUS} + \int_{SVTS} = \int_{ST} + \int_{TUS} + \int_{SVT} + \int_{TS} = \int_{TUS} + \int_{SVT} = \int_{TUSVT},$$

其中 $\displaystyle\int_{ST} = -\int_{TS}$.

将(1)、(2) 右边相加,略去被积表达式,得 $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}_1} + \iint_{\mathcal{R}_2} = \iint_{\mathcal{R}}$,其中 $\mathcal{R}$ 包含子区域 $\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_2$.

因此 $\displaystyle\int_{TUSVT} Pdx + Qdy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$, 定理得到证明.

本例及习题 5 中的区域 $\mathcal{R}$ 为单连通区域.一区域如果不是单连通的,则称为多连通的.我们已证明由封闭曲线围成的单连通区域格林定理成立.例 10 将证明该定理可推广到多连通区域.

如果是更复杂的单连通区域,则必须添加更多的辅助线,如 ST 一样,去证明定理.

8. 证明:简单闭曲线 C 围成的区域的面积等于 $\frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$.

证明 ☞　在格林定理中,令 $P = -y$, $Q = x$, 则

$$\oint_C xdy - ydx = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(y)\right) dxdy$$

$$= 2\iint_{\mathcal{R}} dxdy = 2A,$$

即 $A = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$ 为所求区域的面积.

9. 求椭圆 $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ 的面积.

解 ☞　面积 $= \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos\theta)(b\cos\theta) d\theta$$

$$-(b\sin\theta)(-a\sin\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2\theta + \sin^2\theta) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} abd\theta$$

$$= \pi ab.$$

10. 证明平面格林定理对于如图 10-7 所示的多连通区域 $\mathcal{R}$ 的正确性.

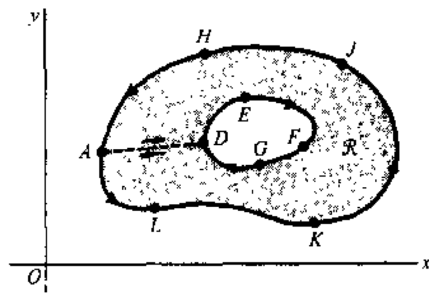


图 10-7

证明 ☞　如图所示阴影区域 $\mathcal{R}$ 是一多连通区域,因为其上不是每条封闭曲线都能不离开 $\mathcal{R}$ 而收缩成一点,如环

绕 $DEFGD$ 的一条曲线.区域 $\mathscr{R}$ 的边界由两条曲线围成,一条是外边界曲线 $AHJKLA$,另一条是内边界曲线 $DEFGD$.沿着边界曲线的正向行进时,区域总在观察者的左侧,如图 10-7 所示.

为了证明定理,添加一辅助线 AD,将内外两条边界曲线相连.以 $ADEFGDALKJHA$ 为边界的区域为单连通区域,格林定理成立,则

$$\oint_{ADEFGDALKJHA} Pdx + Qdy = \iint_{\mathscr{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

而左边的积分,略去被积表达式等于

$$\int_{AD} + \int_{DEFGD} + \int_{DA} + \int_{ALKJHA} = \int_{DEFGD} + \int_{ALKJHA},$$

其中 $\int_{AD} = -\int_{DA}$.设 C_1 为曲线 $ALKJHA$,C_2 为曲线 $DEFGD$,C 是由 C_1 和 C_2 构成的 $\mathscr{R}$ 的边界曲线(沿其正向),则

$$\int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_C,$$

即 $\oint_C Pdx + Qdy = \iint_{\mathscr{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$.

路径的无关性

11. 设 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在单连通区域 $\mathscr{R}$ 上连续且有一阶连续偏导数.证明沿着 $\mathscr{R}$ 内任一封闭曲线 C 的曲线积分 $\oint_C Pdx + Qdy = 0$ 的充要条件是 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 $\mathscr{R}$ 内恒成立.

证明 ☞　**充分性**.

设 $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$,则由格林定理,

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_{\mathscr{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0,$$

其中 $\mathscr{R}$ 是由 C 围成的区域.

必要性.

设在 $\mathscr{R}$ 内沿着每条封闭曲线 C 有 $\oint_C Pdx + Qdy = 0$ 成立且在 $\mathscr{R}$ 内某些点处有 $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$.不妨假设在 (x_0, y_0) 处 $\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x > 0$.

由题设知 $\partial P/\partial y$ 和 $\partial Q/\partial x$ 在 $\mathscr{R}$ 上连续,则一定存在包含点 (x_0, y_0) 的某个邻域 r,使得 $\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x > 0$.如果 Γ 是 r 的边界曲线,则由格林定理知

$$\oint_\Gamma Pdx + Qdy = \iint_r \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy > 0,$$

与题设"沿 $\mathscr{R}$ 内所有封闭曲线 $\oint Pdx + Qdy = 0$"矛盾.因此 $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ 不可能大于零.

类似可证明 $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ 不可能小于零,即在 $\mathscr{R}$ 内有 $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ 恒成立.

12. 设 P 和 Q 如习题 11 中所定义.证明沿着 $\mathscr{R}$ 内过 A,B 两点路径的曲线积分 $\int_A^B Pdx + Qdy$ 与路径无关的充要条件是在 $\mathscr{R}$ 内 $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ 恒成立.

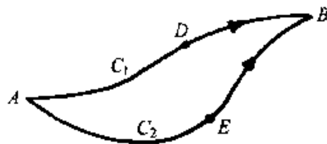


图 10-8

证明 ☞　**充分性**.

假设 $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$(图 10-8),则由习题 11 知,$\int_{ADBEA} Pdx + Qdy = 0$.略去被积表达式知

$$\int_{ADB} + \int_{BEA} = 0, \quad \int_{ADB} = -\int_{BEA} = \int_{AEB}, \text{因此} \int_{C_1} = \int_{C_2}.$$

即曲线积分与路径无关.

必要性.

设曲线积分与路径无关,则对$\mathscr{R}$内路径C_1和C_2有

$$\int_{C_1}=\int_{C_2},\ \int_{ADB}=\int_{AEB},\text{因而}\int_{ADBEA}=0.$$

即沿着$\mathscr{R}$内任意封闭曲线积分为零,由习题11知$\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$得证.

13. 设P,Q如习题11中定义.

(a) 证明$Pdx+Qdy$是一函数$\phi(x, y)$的全微分的充分必要条件为$\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$;

(b) 证明由(a)有$\int_A^B Pdx+Qdy=\int_A^B d\phi=\phi(B)-\phi(A)$成立,其中$A$、$B$是任意两点.

证明 ☞　(a)**必要性**.

设$Pdx+Qdy=d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy$是一个全微分,则(1)$\partial\phi/\partial x=P$,(2)$\partial\phi/\partial y=Q$.将(1)和(2)分别关于$y$和$x$求导,因为偏导数连续,所以有$\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$.

(b) **充分性**.

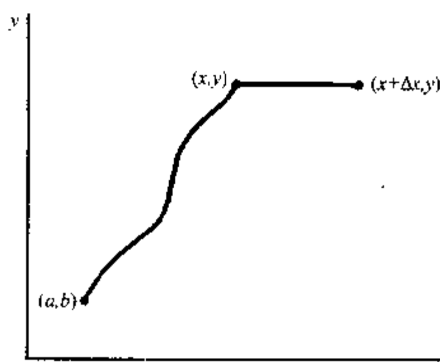


图 10-9

由习题12知,如果$\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$,则$\int Pdx+Qdy$与两点间的积分路径无关.特别设两点为$(a, b)$和$(x, y)$,定义

$$\phi(x, y)=\int_{(a, b)}^{(x, y)}Pdx+Qdy,$$

则$\phi(x+\Delta x, y)-\phi(x, y)$

$$=\int_{(a, b)}^{(x+\Delta x, y)}Pdx+Qdy-\int_{(a, b)}^{(x, y)}Pdx+Qdy$$

$$=\int_{(x, y)}^{(x+\Delta x, y)}Pdx+Qdy.$$

因为上面的积分与过(x, y),$(x+\Delta x, y)$的路径无关,可以选择通过两点的直线段(图10-9),则有$dy=0$,由积分中值定理知

$$\frac{\phi(x+\Delta x, y)-\phi(x, y)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\int_{(x, y)}^{(x+\Delta x, y)}Pdx=P(x+\theta\Delta x, y),0<\theta<1.$$

令$\Delta x\to 0$,取极限得$\partial\phi/\partial x=P$.

同理可证明$\partial\phi/\partial y=Q$.

因此$Pdx+Qdy=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy=d\phi$.

(b) 设$A=(x_1, y_1)$,$B=(x_2, y_2)$,由(a)知

$$\phi(x, y)=\int_{(a, b)}^{(x, y)}Pdx+Qdy,$$

略去被积表达式有

$$\int_A^B=\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)}=\int_{(a, b)}^{(x_2, y_2)}-\int_{(a, b)}^{(x_1, y_1)}=\phi(x_2, y_2)-\phi(x_1, y_1)$$

$$=\phi(B)-\phi(A).$$

14. (a) 证明$\int_{(1, 2)}^{(3, 4)}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$与连接(1,2)和(3,4)两点的路径无关.

(b) 计算(a)中积分值.

解 ☞　(a) $P=6xy^2-y^3$,$Q=6x^2y-3xy^2$,则$\partial P/\partial y=12xy-3y^2=\partial Q/\partial x$,由习题12知曲线积分与路径无关.

(b) **解法1**

因为线积分与路径无关,选择连接(1,2)和(3,4)的任意路径,如:选择直线段先从(1,2)到(3,2)(沿着该路径,$y=2$,$dy=0$),再从(3,2)到(3,4)(沿着该路径,$x=3$,$dx=0$),则所求的曲线积分为

$$\int_{x=1}^{3}(24x-8)dx+\int_{y=2}^{4}(54y-9y^2)dy=80+156=236.$$

解法 2

因为$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，则一定有(1)$\frac{\partial \phi}{\partial x}=6xy^2-y^3$，(2) $\frac{\partial \phi}{\partial y}=6x^2y-3xy^2$.

由(1)知，$\phi=3x^2y-xy^3+f(y)$. 由(2)知 $\phi=3x^2y-xy^3+g(x)$. 当 $f(y)=g(x)=c$为一常数时，两个表达式才会相等. 因此 $\phi=3x^2y-xy^3+c$. 由习题 13 知：

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy=\int_{(1,2)}^{(3,4)}d(3x^2y^2-xy^3+c)$$

$$=3x^2y^2-xy^3+c\Big|_{(1,2)}^{(3,4)}=236.$$

注意到计算过程中的常数 c 可以略去，同样可见 p.104 习题 16.

我们也可以验证：

$$\begin{aligned}&(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy\\&=(6xy^2dx+6x^2ydy)-(y^3dx+3xy^2dy)\\&=d(3x^2y^2)-d(xy^3)=d(3x^2y^2-xy^3),\end{aligned}$$

从这也可以清楚地知道 $\phi=3x^2y^2-xy^3+c$.

15. 计算曲线积分$\oint(x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x)dx+(x^2\sin x-2ye^x)dy$ 沿着内摆线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 的值.

解 ☞　$P=x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x$，$Q=x^2\sin x-2ye^x$，则$\partial P/\partial y=x^2\cos x+2x\sin x-2ye^x=\partial Q/\partial x$，由习题 11 知沿封闭曲线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 的线积分值为零.

曲面积分

16. 设曲面 S 的方程为 $z=f(x,y)$或 $F(x,y,z)=0$，如果 γ 是曲面 S 上任一点(x,y,z)处法线和 z 轴正向之间的夹角，证明：

$$|\sec\gamma|=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}.$$

证明 ☞　设曲面 S 的方程为 $F(x,y,z)=0$，在(x,y,z)处曲面 S 的法向量为$\nabla F=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$，则

$$\nabla F\cdot\boldsymbol{k}=|\nabla F|\cdot|\boldsymbol{k}|\cos\gamma \text{ 或 } F_z=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}\cos\gamma$$

即　$|\sec\gamma|=\frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}$得证.

如果曲面 S 的方程为 $z=f(x,y)$，将方程改写为 $F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$. 因为 $F_x=-z_x$，$F_y=-z_y$，$F_z=1$，所以有$|\sec\gamma|=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$.

17. 计算曲面积分$\iint_S U(x,y,z)dS$，其中 S 为抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$在 xy 平面上方的部分(图 10-10)，$U(x,y,z)$分别为：(a)1；(b) x^2+y^2；(c) $3z$. 给出每种情况下的物理解释.

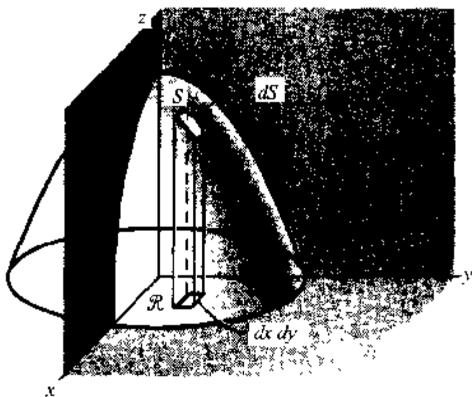


图 10-10

解 ☞　所求积分为

$$\iint_{\mathcal{R}}U(x,y,z)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy,\qquad(1)$$

其中$\mathscr{R}$是S在xy平面上的投影区域,方程为$x^2+y^2=2,\ z=0$.

因为$z_x=-2x,\ z_y=-2y$,(1)可写为

$$\iint_{\mathscr{R}} U(x,\ y,\ z)=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy. \tag{2}$$

(a) 设$U(x,\ y,\ z)=1$,(2)为$\iint_{\mathscr{R}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$,变换到极坐标系$(\rho,\ \phi)$,原积分为

$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho d\rho d\phi=\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{1}{12}(1+4\rho^2)^{3/2}\Big|_{\rho=0}^{\sqrt{2}}d\phi=13\pi/3.$$

实际上,这可以表示曲面S的面积,或者是单位密度的物体S的质量.

(b) 设$U(x,\ y,\ z)=x^2+y^2$,(2)为$\iint_{\mathscr{R}}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$,或在极坐标下为

$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho d\phi=\frac{149\pi}{30},$$

其中关于ρ的积分可通过令$\sqrt{1+4\rho^2}=u$进行换元完成.

实际上,这表示单位密度的物体关于z轴的转动惯量,或者是密度函数为x^2+y^2的物体S的质量.

(c) 设$U(x,\ y,\ z)=3z$,(2)变为

$$\iint_{\mathscr{R}}3z\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy=\iint_{\mathscr{R}}3\{2-(x^2+y^2)\}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy,$$

或在极坐标下:

$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\sqrt{2}}3\rho(2-\rho^2)\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho d\phi=\frac{111\pi}{10}.$$

实际上,这表示密度函数为$3z$的物体S的质量,或者是物体S关于xy平面的第一矩的3倍.

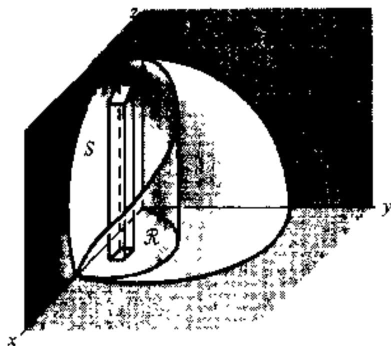


图 10-11

18. 求半径为a的半球面被以a为直径的圆柱面所截得的曲面面积.

解 ☞ 设半球面和圆柱面(图 10-11)方程分别为:

$x^2+y^2+z^2=a^2$(或$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$)和$(x-a/2)^2+y^2=a^2/4$(或$x^2+y^2=ax$),

因为$z_x=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$,$z_y=\dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$,则所求面积为$2\iint_{\mathscr{R}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=2\iint_{\mathscr{R}}\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$.可用两种方法计算.

解法 1 用极坐标.

因为$x^2+y^2=ax$,在极坐标下为$\rho=a\cos\phi$,积分变为

$$2\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{a\cos\phi}\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}d\rho d\phi=2a\int_{\phi=0}^{\pi/2}-\sqrt{a^2-\rho^2}\Big|_{\rho=0}^{a\cos\phi}d\phi$$

$$=2a^2\int_0^{\pi/2}(1-\sin\phi)d\phi=(\pi-2)a^2.$$

解法 2 曲线积分等于

$$2\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{ax-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dydx=2a\int_{x=0}^{a}\arcsin\frac{y}{\sqrt{ax-x^2}}\Big|_{y=0}^{\sqrt{ax-x^2}}dx$$

$$=2a\int_0^a\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+a}}dx,$$

令$x=a\tan^2\theta$,线积分变为

$$4a^2\int_0^{\pi/4}\theta\tan\theta\sec^2\theta d\theta=4a^2\left\{\frac{1}{2}\theta\tan^2\theta\Big|_0^{\pi/4}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\tan^2\theta d\theta\right\}$$

$$= 2a^2\left\{\theta\tan^2\theta\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}(\sec^2\theta - 1)d\theta\right\}$$

$$= 2a^2\left\{\pi/4 - (\tan\theta - \theta)\Big|_0^{\pi/4}\right\} = (\pi - 2)a^2.$$

注意到上面的积分是广义积分,应看作取极限过程(见第五章习题18或第十二章).

19. 求习题17中曲面的形心.

解 由对称性知:$\bar{x}=\bar{y}=0$且有

$$\bar{z} = \frac{\iint_S z dS}{\iint_S dS} = \frac{\iint_{\mathcal{R}} z\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy}{\iint_{\mathcal{R}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy}.$$

分子和分母由习题17(c)及(e)可得结果,即

$$\bar{z} = \frac{37\pi/10}{13\pi/3} = \frac{111}{130}.$$

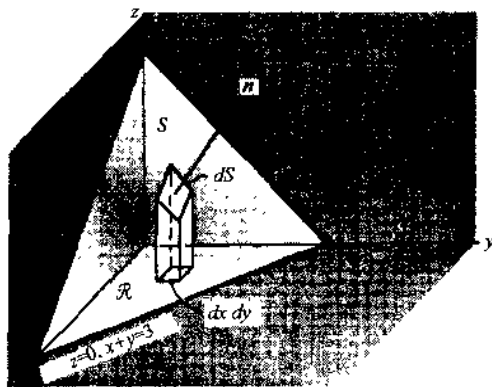


图 10-12

20. 计算曲面积分$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$,其中$\boldsymbol{A} = xy\boldsymbol{i} - x^2\boldsymbol{j} + (x+z)\boldsymbol{k}$, S是平面$2x+2y+z=6$在第一卦限部分,$\boldsymbol{n}$是S的单位法向量(图10-12).

解 曲面S的法向量为:$\nabla(2x+2y+z-6) = 2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, 即 $\boldsymbol{n} = \frac{2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{3}$,因此

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} = \{xy\boldsymbol{i} - x^2\boldsymbol{j} + (x+z)\boldsymbol{k}\}\cdot\left(\frac{2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{3}\right)$$

$$= \frac{2xy - 2x^2 + (x+z)}{3} = \frac{2xy - 2x^2 + (x+6-2x-2y)}{3}$$

$$= \frac{2xy - 2x^2 - x - 2y + 6}{3},$$

因此,所求曲面积分为

$$\iint_S\left(\frac{2xy-2x^2-x-2y+6}{3}\right)dS = \iint_{\mathcal{R}}\left(\frac{2xy-2x^2-x-2y+6}{3}\right)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \iint_{\mathcal{R}}\left(\frac{2xy-2x^2-x-2y+6}{3}\right)\sqrt{1^2+2^2+2^2}\,dxdy$$

$$= \int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{3-x}(2xy - 2x^2 - x - 2y + 6)dydx$$

$$= \int_{x=0}^{3}(xy^2 - 2x^2y - xy - y^2 + 6y)\Big|_0^{3-x}dx = 27/4.$$

21. 曲面积分中我们研究的都是双侧曲面.试举一个单侧曲面的例子.

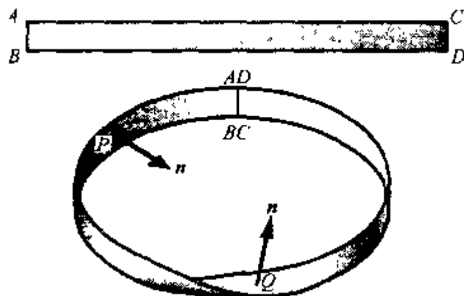


图 10-13

解 取一纸带$ABCD$如图10-13所示.扭曲纸带使得A和D,B和C分别重合,得一曲面.设$\boldsymbol{n}$为曲面上P点的正法向,我们发现,当$\boldsymbol{n}$沿着曲面移动一周又回到P点时,方向反向.如果我们想将曲面的一侧着色,将会发现整个曲面都被着色.这样的曲面,称为默比乌斯(Moebius)带,是单侧曲面,有时也称为不可定向曲面.双侧曲面是可定向的.

散度定理

22. 证明散度定理.(图 10-14)

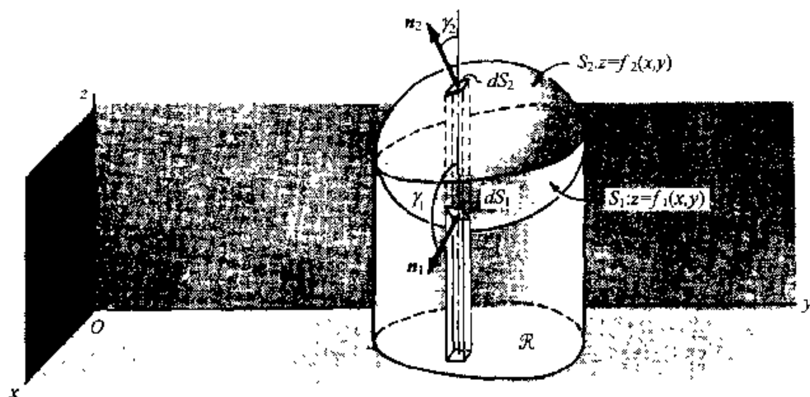


图 10-14

证明 设 S 是一封闭曲面且任意与坐标轴平行的直线与曲面 S 至多交于两点. 假设曲面分为上下两部分,记为 S_1 和 S_2,方程分别为 $z=f_1(x, y)$和 $z_2=f_2(x, y)$. 曲面在 xy 平面上的投影记为 $\mathscr{R}$. 考虑

$$\iiint\limits_V \frac{\partial A_3}{\partial z}dV=\iiint\limits_V \frac{\partial A_3}{\partial z}dzdydx=\iint\limits_{\mathscr{R}}\left[\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)}\frac{\partial A_3}{\partial z}dz\right]dydx$$

$$=\iint\limits_{\mathscr{R}}A_3(x, y, z)\bigg|_{z=f_1}^{f_2}dydx$$

$$=\iint\limits_{\mathscr{R}}[A_3(x, y, f_2)-A_3(x, y, f_1)]dydx.$$

对于上半曲面 S_2,因为法向量 $\boldsymbol{n}_2$ 与 $\boldsymbol{k}$ 夹角为锐角,$dydx=\cos\gamma_2 dS_2=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_2 dS_2$. 对于下半曲面 S_1,因为法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{k}$ 夹角为钝角,$dydx=-\cos\gamma_1 dS_1=-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_1 dS_1$. 因此

$$\iint\limits_{\mathscr{R}}A_3(x, y, f_2)dydx=\iint\limits_{S_2}A_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_2 dS_2,$$

$$\iint\limits_{\mathscr{R}}A_3(x, y, f_1)dydx=-\iint\limits_{S_1}A_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_1 dS_1,$$

且 $\iint\limits_{\mathscr{R}}A_3(x, y, f_2)dydx-\iint\limits_{\mathscr{R}}A_3(x, y, f_1)dydx=\iint\limits_{S_2}A_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_2 dS_2+\iint\limits_{S_1}A_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_1 dS_1$

$=\iint\limits_S A_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}dS$,

则(1) $\iiint\limits_V \frac{\partial A_3}{\partial z}dV=\iint\limits_S A_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}dS.$

类似地,将 S 向另外两个坐标面投影得

(2) $\iiint\limits_V \frac{\partial A_1}{\partial x}dV=\iint\limits_S A_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}dS,$

(3) $\iiint\limits_V \frac{\partial A_2}{\partial y}dV=\iint\limits_S A_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}dS.$

将(1)、(2)、(3)相加,得

$$\iiint\limits_V\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)dV=\iint\limits_S(A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{n}dS \text{ 或 }\iiint\limits_V\nabla\cdot\boldsymbol{A}dV=\iint\limits_S\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS.$$

如果平行于坐标轴的直线与曲面的交点不止两个,对于这类曲面,散度定理也成立. 只要将 S 围成的区域分成若干个子域,它们的边界曲面与平行于坐标轴的直线至多有两个交点,仿照平面格林的推广

证明方法,可以得证.

23. 在由平面 $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$ 围成的立体的边界曲面上对 $\boldsymbol{A}=(2x-z)\boldsymbol{i}+x^2y\boldsymbol{j}-xz^2\boldsymbol{k}$ 验证散度定理.

证明 ☞　先计算 $\iint\limits_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$,其中 S 为图 10-15 中立方体的外表面.面 $DEFG$: $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}$, $x=1$, 则

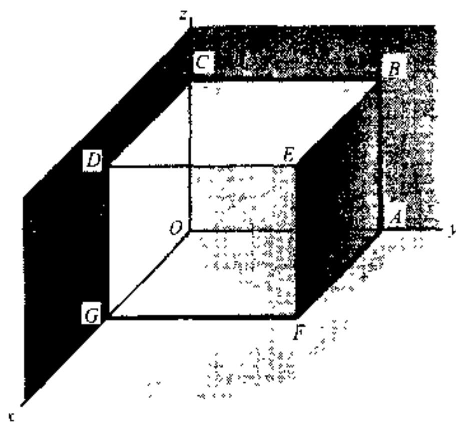


图 10-15

$$\iint\limits_{DEFG}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_0^1\int_0^1\{(2-z)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-z^2\boldsymbol{k}\}\cdot\boldsymbol{i}dydz$$

$$=\int_0^1\int_0^1(2-z)dydz=3/2.$$

面 $ABCO$: $\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{i}$, $x=0$, 则

$$\iint\limits_{ABCO}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_0^1\int_0^1(-z\boldsymbol{i})\cdot(-\boldsymbol{i})dydz=\int_0^1\int_0^1 zdydz=1/2.$$

面 $ABEF$: $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{j}$, $y=1$, 则

$$\iint\limits_{ABEF}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_0^1\int_0^1\{(2x-z)\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j}+xz^2\boldsymbol{k}\}\cdot\boldsymbol{j}dxdz$$

$$=\int_0^1\int_0^1 x^2dxdz=1/3.$$

面 $OGDC$: $\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{j}$, $y=0$, 则

$$\iint\limits_{OGDC}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_0^1\int_0^1\{(2x-z)\boldsymbol{i}-xz^2\boldsymbol{k}\}\cdot(-\boldsymbol{j})dxdz=0.$$

面 $BCDE$: $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}$, $z=1$,则

$$\iint\limits_{BCDE}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_0^1\int_0^1\{(2x-1)\boldsymbol{i}+x^2y\boldsymbol{j}-x\boldsymbol{k}\}\cdot\boldsymbol{k}dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^1 -xdxdy=-1/2.$$

面 $AFGO$: $\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{k}$, $z=0$, 则

$$\iint\limits_{AFGO}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_0^1\int_0^1\{2x\boldsymbol{i}-x^2y\boldsymbol{j}\}\cdot(-\boldsymbol{k})dxdy=0.$$

从而 $\iint\limits_S\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+0-\frac{1}{2}+0=11/6$,又因为 $\iiint\limits_V\nabla\cdot\boldsymbol{A}dV=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(2+x^2-2xz)dxdydz=11/6$,因此散度定理得到验证.

24. 计算 $\iint\limits_S\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{n}dS$,其中 S 是一封闭曲面.

解 ☞　由散度定理知

$$\iint\limits_S\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{n}dS=\iiint\limits_V\nabla\cdot\boldsymbol{\Gamma}dV$$

$$=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})dV$$

$$=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)dV=3\iiint\limits_V dV=3V,$$

其中 V 是由 S 围成的立体体积.

25. 计算 $\iint\limits_S xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$, 其中 S 是由 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 和 $z=0$ 围成的上半球体的表面外侧.(a)用散度定理(空间格林定理).(b)直接计算.

解 (a)因为 $dydz=dS\cos\alpha$，$dzdx=dS\cos\beta$，$dxdy=dS\cos\gamma$，则积分为：

$$\iint_S \{xz^2\cos\alpha+(x^2y-z^3)\cos\beta+(2xy+y^2z)\cos\gamma\}dS=\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS,$$

其中 $\boldsymbol{A}=xz^2\boldsymbol{i}+(x^2y-z^3)\boldsymbol{j}+(2xy+y^2z)\boldsymbol{k}$ 且 $\boldsymbol{n}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}$ 为外侧单位法向量.

由散度定理知积分为

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}dV=\iiint_V\left\{\frac{\partial}{\partial x}(xz^2)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2y-z^3)+\frac{\partial}{\partial z}(2xy+y^2z)\right\}dV$$

$$=\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dV,$$

其中 V 是由半球面和 xy 平面围成的立体.

用第 9 章中习题 15 中球坐标系，原积分等于

$$4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{a}r^2\cdot r^2\sin\theta drd\theta d\phi=\frac{2\pi a^5}{3}.$$

(b)设 S_1 为上半球体的凸面，S_2 为其底面($z=0$)，则

$$\iint_{S_1}xz^2dydz=\int_{y=-a}^{a}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-y^2}}z^2\sqrt{a^2-y^2-z^2}dzdy$$

$$-\int_{y=-a}^{a}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-y^2}}-z^2\sqrt{a^2-y^2-z^2}dzdy,$$

$$\iint_{S_1}(x^2y-z^3)dzdx=\int_{x=-a}^{a}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\left\{x^2\sqrt{a^2-x^2-z^2}-z^3\right\}dzdx$$

$$-\int_{x=-a}^{a}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\left\{-x^2\sqrt{a^2-x^2-z^2}-z^3\right\}dzdx,$$

$$\iint_{S_1}(2xy+y^2z)dxdy=\int_{x=-a}^{a}\int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\left\{2xy+y^2\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right\}dydx,$$

$$\iint_{S_2}xz^2dydz=0,\ \iint_{S_2}(x^2y-z^3)dzdx=0,$$

$$\iint_{S_2}(2xy+y^2z)dxdy=\iint_{S_2}\{2xy+y^2(0)\}dxdy$$

$$=\int_{x=-a}^{a}\int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}2xydydx$$

$$=0$$

将上面式子相加，得：

$$4\int_{y=0}^{a}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-y^2}}z^2\sqrt{a^2-y^2-z^2}dzdy+4\int_{x=0}^{a}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}x^2\sqrt{a^2-x^2-z^2}dzdx$$

$$+4\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}y^2\sqrt{a^2-x^2-y^2}dydx,$$

由对称性知上面积分相等，用极坐标系知

$$12\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}y^2\sqrt{a^2-x^2-y^2}dydx=12\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{a}\rho^2\sin^2\phi\sqrt{a^2-\rho^2}\rho d\rho d\phi$$

$$=\frac{2\pi a^5}{5}.$$

斯托克斯定理

26. 证明斯托克斯定理.

证明 设曲面 S 在 xy，yz 和 xz 平面上的投影区域是由简单闭曲线围成的，如图 10-16 所示. 曲面

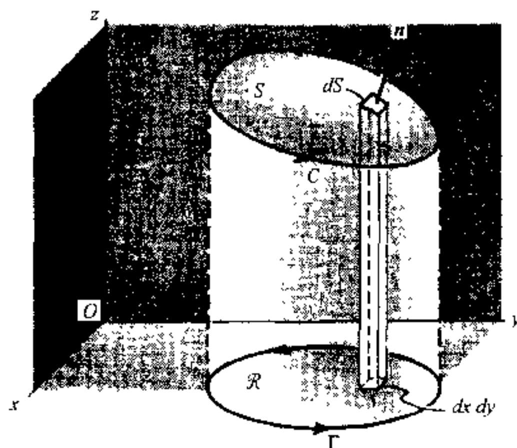


图 10-16

S 的方程可表示为 $z=f(x,y)$ 或 $x=g(y,z)$ 或 $y=h(x,z)$,其中 f,g,h 是单值连续且可微的函数. 下面来验证

$$\iint_S(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}dS=\iint_S[\nabla\times(A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})]\cdot\mathbf{n}dS$$

$$=\iint_C\mathbf{A}\cdot d\mathbf{F}$$

其中 C 为曲面 S 的边界曲线.

先考虑 $\iint_S[\nabla\times(A_1\mathbf{i})]\cdot\mathbf{n}dS$.

因为 $\nabla\times(A_1\mathbf{i})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\A_1&0&0\end{vmatrix}=\frac{\partial A_1}{\partial z}\mathbf{j}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{k}$,

$$[\nabla\times(A_1\mathbf{i})]\cdot\mathbf{n}dS=\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\right)dS,\qquad(1)$$

如果曲面 S 的方程为 $z=f(x,y)$, S 上任一点的位置向量是 $\mathbf{\Gamma}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+f(x,y)\mathbf{k}$, 则 $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}=\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{k}=\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{k}$. 因为 $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}$ 是 S 的切向量,因而与 $\mathbf{n}$ 垂直,则

$$\mathbf{n}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}=0\text{ 或 }\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}=-\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k},$$

代入(1)得

$$\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\right)dS=\left(-\frac{\partial A_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\right)dS$$

或
$$[\nabla\times(A_1\mathbf{i})]\cdot\mathbf{n}dS=-\left(\frac{\partial A_1}{\partial y}+\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathbf{n}\mathbf{k}dS.\qquad(2)$$

在 S 上, $A_1(x,y,z)=A_1[x,y,f(x,y)]=F(x,y)$, 因此 $\frac{\partial A_1}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}$ 且(2)变为

$$[\nabla\times(A_1\mathbf{i})]\cdot\mathbf{n}dS=-\frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}dS=-\frac{\partial F}{\partial y}dxdy,$$

则 $\iint_S[\nabla\times(A_1\mathbf{i})]\cdot\mathbf{n}dS=\iint_{\mathscr{R}}-\frac{\partial F}{\partial y}dxdy$,

其中 $\mathscr{R}$ 为 S 在 xy 平面上的投影. 由平面格林定理知上面的积分等于 $\oint_\Gamma Fdx$, 其中 Γ 是 $\mathscr{R}$ 的边界曲线. 因为 Γ 上每点 (x,y) 处 F 值与 C 上每点 (x,y,z) 处 A_1 值相等,因此两条曲线 dx 相同,则有

$$\oint_{\Gamma} F dx = \oint_C A_1 dx$$

或 $\iint\limits_S [\nabla \times (A_1 \boldsymbol{i})] \cdot \boldsymbol{n} dS = \oint_C A_1 dx.$

类似地，向另外两个坐标面投影，得

$$\iint\limits_S [\nabla \times (A_2 \boldsymbol{j})] \cdot \boldsymbol{n} dS = \oint_C A_2 dy,$$

$$\iint\limits_S [\nabla \times (A_3 \boldsymbol{k})] \cdot \boldsymbol{n} dS = \oint_C A_3 dz.$$

将上式相加，得

$$\iint\limits_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n} dS = \oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

如果曲面 S 不满足以上约束条件，定理仍成立．将曲面 S 分成子曲面 $S_1, S_2, \cdots, S_k$，它们的边界曲线分别为 $C_1, C_2, \cdots, C_k$，满足上面的约束条件．在每个子曲面上斯托克斯定理成立．将每个子曲面上的面积分相加，就得到整个曲面 S 上的面积分．再将相应于 $C_2, C_2, \cdots, C_k$ 的曲线积分相加，就得到整条路径 C 上的曲线积分．

27．验证斯托克斯定理，其中 $\boldsymbol{A} = 3y\boldsymbol{i} - xz\boldsymbol{j} + yz^2\boldsymbol{k}$，$S$ 是抛物面 $2z = x^2 - y^2$ 被平面 $z = 2$ 所截得的曲面，C 是其边界曲线．

证明☞　曲面 S 的边界曲线 C 是一圆周，方程为：$x^2 + y^2 = 4$，$z = 2$，参数方程为：$x = 2\cos t$，$y = 2\sin t$，$z = 2$，其中 $0 \leqslant t < 2\pi$，则

$$\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C 3y dx - xz dy + yz^2 dz$$

$$= \int_{2\pi}^{0} 3(2\sin t)(-2\sin t) dt - (2\cos t)(2\cos t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (12\sin^2 t + 8\cos^2 t) dt = 20\pi.$$

又因为 $\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y & xz & yz^2 \end{vmatrix} = (z^2 + x)\boldsymbol{i} - (z + 3)\boldsymbol{k},$

$$且\ \boldsymbol{n} = \frac{\nabla(x^2 + y^2 - 2z)}{|\nabla(x^2 + y^2 - 2z)|} = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}},$$

则 $\iint\limits_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n} dS = \int\limits_{\mathscr{R}} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n} \dfrac{dxdy}{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k}|}$

$$= \iint\limits_{\mathscr{R}} (xz^2 + x^2 + z + 3) dxdy$$

$$= \iint\limits_{\mathscr{R}} \left\{ x\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2 + x^2 + \frac{x^2 + y^2}{2} + 3 \right\} dxdy.$$

在极坐标下为：

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{2} \{(\rho\cos\phi)(\rho^4/2) + \rho^2\cos^2\phi + \rho^2/2 + 3\} \rho d\rho d\phi = 20\pi.$$

28．证明 $\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ 对任意封闭曲线 C 成立的充要条件是 $\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$．

证明☞　**充分性．**

假设 $\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$，则由斯托克斯定理知

$$\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint\limits_S (\nabla \times A) \cdot \boldsymbol{n} dS = 0.$$

必要性.

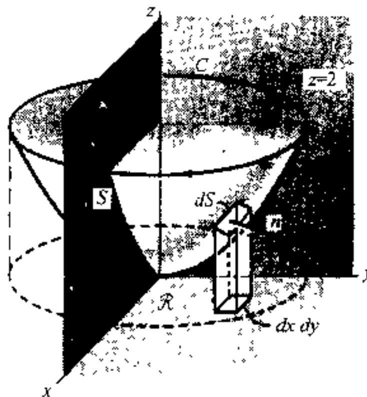


图 10-17

假设$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=0$对任意封闭曲线 C 均成立，不妨设在某个点 P 处$\nabla\times\boldsymbol{A}\neq 0$，则由$\nabla\times\boldsymbol{A}$的连续性知，一定存在 P 点的某个邻域，使得$\nabla\times\boldsymbol{A}\neq 0$. 设 S 为该邻域中的一曲面，曲面上每点处的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与$\nabla\times\boldsymbol{A}$ 方向一致，即$\nabla\times\boldsymbol{A}=\alpha\boldsymbol{n}$，其中 α 是一正常数. 设 C 为曲面 S 的边界，则由斯托克斯定理知

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}dS=\alpha\iint_S\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}dS>0,$$

与条件$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=0$矛盾，所以$\nabla\times\boldsymbol{A}=0$成立.

以上证明过程表明$\nabla\times\boldsymbol{A}=0$也是曲线积分$\int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$与连接$P_1$和$P_2$两点路径无关的充要条件

29. 证明$\nabla\times\boldsymbol{A}=0$的充分必要条件是$A=\nabla\phi$.

证明 ☞　**充分性**.

如$A=\nabla\phi$，则由第七章的习题 80 得$\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times\nabla\phi=0$.

必要性.

如果$\nabla\times\boldsymbol{A}=0$，则由习题 28 知，对任意封闭路径有$\oint\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=0$，且$\int_C\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$与连接两点$(a,b,c)$和$(x,y,z)$的路径无关. 定义

$$\phi(x,y,z)=\int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)}A_1dx+A_2dy+A_3dz,$$

则$\phi(x+\Delta x,y,z)-\phi(x,y,z)=\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)}A_1dx+A_2dy+A_3dz$.

因为积分与连接两点(x,y,z)和$(x+\Delta x,y,z)$的路径无关，可选择连接这两点的直线段，则$dy=dz=0$，由积分中值定理有

$$\frac{\phi(x+\Delta x,y,z)-\phi(x,y,z)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)}A_1dx=A_1(x+\theta\Delta x,y,z),\ 0<\theta<1,$$

令$\Delta x\to 0$，两边取极限，得：$\partial\phi/\partial x=A_1$.

同理可证$\partial\phi/\partial y=A_2$，$\partial\phi/\partial z=A_3$.

因此$\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k}$

$$=\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}=\nabla\phi.$$

30. (a)证明$A_1dx+A_2dy+A_3dz=d\phi$是一个全微分的充要条件是$\nabla\times\boldsymbol{A}=0$其中$\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k}$.

(b)由(a)证明

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}A_1dx+A_2dy+A_3dz=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}d\phi$$
$$=\phi(x_2,y_2,z_2)-\phi(x_1,y_1,z_1).$$

证明 ☞　(a)**必要性**.

如果$A_1dx+A_2dy+A_3dz=d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz$. 则

(1) $\frac{\partial\phi}{\partial x}=A_1$，(2) $\frac{\partial\phi}{\partial y}=A_2$，(3) $\frac{\partial\phi}{\partial z}=A_3$.

假设偏导数连续，则有

$$\frac{\partial A_1}{\partial y}=\frac{\partial A_2}{\partial x},\ \frac{\partial A_2}{\partial z}=\frac{\partial A_3}{\partial y},\ \frac{\partial A_1}{\partial z}=\frac{\partial A_3}{\partial x},$$

即为$\nabla\times\boldsymbol{A}=0$.

另一种解法:

如果$A_1dx+A_2dy+A_3dz=d\phi$,则

$$\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k}$$
$$=\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}=\nabla\phi,$$

有$\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times\nabla\phi=0$.

充分性.

如果$\nabla\times\boldsymbol{A}=0$,则由习题29知$A=\nabla\phi$且

$$A_1dx+A_2dy+A_3dz=\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\nabla\phi\cdot d\boldsymbol{r}$$
$$=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz=d\phi.$$

(b)由(a)知$\phi(x,y,z)=\int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)}A_1dx+A_2dy+A_3dz$,略去被积表达式$A_1dx+A_2dy+A_3dz$有.

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}=\int_{(a,b,c)}^{(x_2,y_2,z_2)}-\int_{(a,b,c)}^{(x_1,y_1,z_1)}=\phi(x_2,y_2,z_2)-\phi(x_1,y_1,z_1).$$

31. (a) 证明$\boldsymbol{F}=(2xz^3+6y)\boldsymbol{i}+(6x-2yz)\boldsymbol{j}+(3x^2z^2-y^2)\boldsymbol{k}$是一个保守力场.(b)计算$\int_C\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$,其中$C$是连接$(1,-1,1)$和$(2,1,-1)$的任意路径.(c)对(b)的计算结果给出物理解释.

证明☞　(a) 如果曲线积分$\int_C\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$与路径$C$无关,则称力场$\boldsymbol{F}$是保守的.$\boldsymbol{F}$是保守的充要条件是$\nabla\times\boldsymbol{F}=0$.

又因为$\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\2xz^3+6y&6x-2yz&3x^2z^2-y^2\end{vmatrix}=0$,所以$\boldsymbol{F}$是保守的.

(b) **解法1**

由习题30知,$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=(2xz^3+6y)dx+(6x-2yz)dy+(3x^2z^2-y^2)dz$是一个全微分$d\phi$,其中$\phi$满足

(1) $\frac{\partial\phi}{\partial x}=2xz^3+6y$, (2) $\frac{\partial\phi}{\partial y}=6x-2yz$, (3) $\frac{\partial\phi}{\partial z}=3x^2z^2-y^2$.分别有:

$$\phi=x^2z^3+6xy+f_1(y,z),\ \phi=6xy-y^2z+f_2(x,z),\ \phi=x^2z^3-y^2z+f_3(x,y)$$

如果$f_1(y,z)=-y^2z+c$, $f_2(x,z)=x^2z^3+c$, $f_3(x,y)=6xy+c$,则$\phi=x^2z^3+6xy-y^2z+c$是一致的.再由习题30知

$$\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=x^2z^3+6xy-y^2z+c\Big|_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)}=15.$$

另外我们也可通过观察法确定ϕ.

由$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=(2xz^3dx+3x^2z^2dz)+(6ydx+6xdy)-(2yzdy+y^2dz)$
$=d(x^2z^3)+d(6xy)-d(y^2z)=d(x^2z^3+6xy-y^2z+c)$

知$\phi=x^2z^3+6xy-y^2z+c$.

解法2

因为曲线积分与路径无关,所以可选择任意路径计算曲线积分.特别地,可以选从$(1,-1,1)$到$(2,-1,1)$的直线段,再从$(2,1,1)$到$(2,1,-1)$的直线段.结果为

$$\int_{x=1}^{2}(2x-6)dx+\int_{y=-1}^{1}(12-2y)dy+\int_{z=1}^{-1}(12z^2-1)dz=15,$$

其中第一个积分中,$y=-1$, $z=1$, $dy=0$, $dz=0$;第二个积分中$x=2$, $z=1$, $dx=0$, $dz=0$;第三个

积分中 $x=2,\ y=1,\ dx=0,\ dy=0$.

(c) $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ 的物理意义是将一物体沿着曲线 C 从点(1, -1,1)移动到点(2,1, -1)所作的功.在保守力的作用下,做功与路径 C 无关.

杂题

32. (a) 设 $x=f(u,v),\ y=g(u,v)$ 定义了一个变换,将 xy 平面内一区域 $\mathscr{R}$ 映射到 uv 平面内一区域 $\mathscr{R}'$,证明:

$$\iint_{\mathscr{R}} dxdy=\iint_{\mathscr{R}'}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv.$$

(b)对(a)的结论作出几何解释.

证明 ☞　(a)设 C(假定是一简单闭曲线)为区域 $\mathscr{R}$ 的边界,则由习题 8 知 $\iint_{\mathscr{R}} dxdy=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$.　(1)

在题设给出的条件下,(1)右边为

$$\frac{1}{2}\oint_{C'} x\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)-y\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{C'}\left(x\frac{\partial y}{\partial u}-y\frac{\partial x}{\partial n}\right)du+\left(x\frac{\partial y}{\partial v}-y\frac{\partial x}{\partial v}\right)dv,\qquad(2)$$

其中 C' 是 C 在 uv 平面上的映射(假设 C' 也是简单闭曲线).

如果 $\mathscr{R}'$ 是由 C' 围成的 uv 平面上的一区域,则由格林定理知(2)右边为

$$\frac{1}{2}\iint_{\mathscr{R}'}\left|\frac{\partial}{\partial u}\left(x\frac{\partial y}{\partial v}-y\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(x\frac{\partial y}{\partial u}-y\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right|dudv$$

$$=\iint_{\mathscr{R}'}\left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right|dudv=\iint_{\mathscr{R}'}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv,$$

其中加上绝对值可以确保结果是非负的,如 $\iint_{\mathscr{R}} dxdy$ 一样.

一般地,我们也可以证明(见习题 83)

$$\iint_{\mathscr{R}} F(x,y)dx\,dy=\iint_{\mathscr{R}'} F\{f(u,v),\ g(u,v)\}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv.\qquad(3)$$

(b) $\iint_{\mathscr{R}} dx\,dy$ 和 $\iint_{\mathscr{R}'}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$ 都表示区域 $\mathscr{R}$ 的面积,第一个是在直角坐标系下,第二个是在曲线坐标系下.

33. 设 $\boldsymbol{F}=\frac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}$, (a) 计算 $\nabla\times\boldsymbol{F}$, (b)求 $\oint\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ 沿任意封闭路径的值,并解释结果.

解 ☞　(a) 在不包含(0,0)点的任何区域上有

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0\end{vmatrix}=0.$$

(b) 因为 $\oint\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\oint\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$,在极坐标系 (ρ,ϕ) 下,令 $x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi$,则 $dx=-\rho\sin\phi d\phi+d\rho\cos\phi,\ dy=\rho\cos\phi d\phi+d\rho\sin\phi$,且 $\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=d\phi=d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$.

如果原点在封闭曲线 $ABCDA$ 围成的区域内(图 10-18(a)),在 A 处 $\phi=0$,绕曲线一周后,$\phi=2\pi$ 时又回到 A,此时曲线积分 $\int_0^{2\pi}d\phi=2\pi$.

如果闭曲线 $PQRSP$ 围成的区域不包含原点(图 10-18(b)),在 P 处 $\phi=\phi_0$,绕曲线一周后回到 P,ϕ

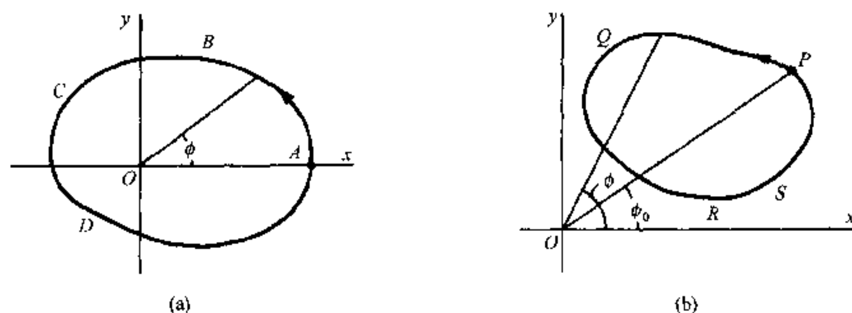


图 10-18

$=\phi_0$，此时曲线积分$\int_{\phi_0}^{\phi_0} d\phi = 0$.

因为 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$，$\nabla\times\boldsymbol{F}=0$ 等价于$\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$. 表面上看，该题的结果与习题 11 矛盾，其实并不然. 因为 $P=\frac{-y}{x^2+y^2}$和 $Q=\frac{x}{x^2+y^2}$并不满足习题 11 中的假设，它们的偏导数在包括(0,0)的区域上不连续.

34. 设 div$\boldsymbol{A}$ 表示一向量场$\boldsymbol{A}$ 在点P 处的散度，证明：$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\lim\limits_{\Delta V\to 0}\frac{SS\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS}{\Delta V}$，其中 ΔV 是由曲面 ΔS 围成的立体，$\Delta V\to 0$ 表示 ΔV 收缩到P 点.

证明 ☞ 由散度定理知：$\iiint\limits_{\Delta V}\mathrm{div}\boldsymbol{A}dv=\iint\limits_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$.

再由积分中值定理，上式左边等于$\overline{\mathrm{div}\boldsymbol{A}}\iiint\limits_{\Delta V}dV=\overline{\mathrm{div}\boldsymbol{A}}\cdot\Delta V$，其中$\overline{\mathrm{div}\boldsymbol{A}}$介于 ΔV 上的 div$\boldsymbol{A}$ 的最大值和最小值之间，则

$$\overline{\mathrm{div}\boldsymbol{A}}=\frac{\iint\limits_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS}{\Delta V},$$

令 $\Delta V\to 0$，P 在 ΔV 内部，$\overline{\mathrm{div}\boldsymbol{A}}$则趋向于点$P$ 的 div$\boldsymbol{A}$ 值，因此：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\iint\limits_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS}{\Delta V}.$$

可以用上述结论定义 $\boldsymbol{A}$ 的散度，从这可以推导出散度的性质以及证明散度定理. 也可以用这种定义方式将散度的概念推广到直角坐标系以外的其他坐标系.

物理上，$(\iint\limits_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS)/\Delta V$ 表示向量场$\boldsymbol{A}$ 在单位体积内通过曲面 ΔS 的通量. 如果 $\boldsymbol{A}$ 的散度在点P的邻域内是正的，表示通过点 P 的通量是正的，称点 P 是源. 如果在点 P 的邻域内$\boldsymbol{A}$ 的散度是负的，通量实际上是流入量，称 P 为汇. 如果一邻域内既没有源，又没有汇，则 div$\boldsymbol{A}=0$，就称 $\boldsymbol{A}$ 为螺线向量场.

补 充 习 题

曲线积分

35. 计算$\int_{(1,1)}^{(4,2)}(x+y)dx+(y-x)dy$，沿着(a)抛物线 $y^2=x$；(b)直线段；(c)顺次连接(1,1)，(1,2)和(4,2)的折线段；(d)曲线 $x=2t^2+t+1$，$y=t^2+1$.

36. 计算$\oint(2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy$，沿着 xy 平面内顶点为(0,0)，(3,0)和(3,2)的三角形围成的封闭曲线的逆时针方向.

37. 沿着圆心在(0,0)，半径为 4 的封闭圆周，计算上题曲线积分的值.

38. (a)设 $\boldsymbol{F}=(x^2-y^2)\boldsymbol{i}+2xy\boldsymbol{j}$,求 $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$,其中 C 为 xy 平面内 $y=x^2-x$ 上从点(1,0)到(2,2)的一段曲线弧.(b)对所得结果作出物理解释.

39. 计算 $\int_C(2x+y)ds$ 的值,其中 s 为弧长参数,C 为 xy 平面内圆周 $x^2+y^2=25$ 上从(3,4)到(4,3)的最短弧段.

40. 设 $\boldsymbol{F}=(3x-2y)\boldsymbol{i}+(y+2z)\boldsymbol{j}-x^2\boldsymbol{k}$,计算 $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ 从(0,0,0)到(1,1,1)的值,其中 C 为(a)曲线 $x=t$,$y=t^2$,$z=t^3$;(b)连接两点的直线段;(c)连接点(0,0,0),(0,1,0)和(1,1,1)的折线段;(d)曲线 $x=z^2$,$z=y^2$.

41. 设平面或空间曲线 C 的单位切向量为 $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{F}$ 为一已知的力场.证明在恰当的条件下有 $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_C \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{T}ds$,其中 s 为弧长参数.从几何和物理上解释所得的结论.

平面格林定理,路径无关性

42. 对 $\oint_C(x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$ 在平面上验证格林定理.其中 C 是顶点为(0,0),(2,0),(2,2),(0,2)的正方形围成的封闭曲线的顺时针方向.

43. 用格林定理求(a)习题 36 和(b)习题 37 中的曲线积分.

44. (a)设区域 A 的边界曲线 C 为一简单闭曲线,如果 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 是常数,证明:

$$\oint_C(a_1x+a_2y+a_3)dx+(b_1x+b_2y+b_3)dy=(b_1-a_2)A.$$

(b)在什么条件下,沿着封闭路径 C 的曲线积分都等于零?

45. 求内摆线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 围成图形的面积.[提示:参数方程为:$x=a\cos^3t$,$y=a\sin^3t$,$0\leqslant t\leqslant 2\pi$]

46. 设 $x=\rho\cos\phi$,$y=\rho\sin\phi$,证明 $\frac{1}{2}\oint xdy-ydx=\frac{1}{2}\int\rho^2d\phi$,并作出解释.

47. 对 $\oint_C(x^3-x^2y)dx+xy^2dy$ 在平面上验证格林定理,其中 C 为圆 $x^2+y^2=4$ 和 $x^2+y^2=16$ 所围区域的边界曲线.

48. (a)证明 $\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$ 与连接(1,0)和(2,1)两点的路径无关.(b)计算(a)中曲线积分的值.

49. 计算 $\int_C(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$ 的值,其中 C 为沿着抛物线 $2x=\pi y^2$ 上从点(0,0)到(π/2,1)的一段曲线.

50. 沿着顶点在(0,0),(3,0),(5,2),(2,2)的平行四边形围成的封闭曲线,计算上题曲线积分的值.

51. (a)证明 $\alpha=(2x^2+xy-2y^2)dx+(3x^2+2xy)dy$ 不是全微分;(b)证明 $e^{y/x}\alpha/x$ 是某个 ϕ 的全微分,求 ϕ;(c)解微分方程 $(2x^2+xy-2y^2)dx+(3x^2+2xy)dy=0$.

曲面积分

52. (a)计算 $\iint_S(x^2+y^2)dS$,其中 S 是由锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$ 及 $z=0$ 和 $z=3$ 所围成的封闭曲面.(b)对(a)的结果作出物理解释.

53. 求平面 $2x+y+2z=16$ 被(a)$x=0$,$y=0$,$x=2$,$y=3$;(b)$x=0$,$y=0$ 和 $x^2+y^2=64$ 所截得的曲面面积.

54. 求抛物面 $2z=x^2+y^2$ 被锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所割下部分的曲面面积.

55. 求锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$ 被抛物面 $z=x^2+y^2$ 所截得的曲面面积.

56. 求两圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+z^2=a^2$ 相交所围立体的表面积.

57. (a)求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 包含在锥面 $z\tan\alpha=\sqrt{x^2+y^2}$,$0<\alpha<\pi/2$ 内部的曲面面积;(b)用(a)的结论计算半球面面积;(c)解释在(a)的结论中取 $\alpha=\pi$,就能得到整个球面面积的原因.

58. 求半径为 a 的球面关于球面上一点的惯性矩,假设密度为常数 σ.

59. (a)求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在锥面 $z\tan\alpha=\sqrt{x^2+y^2}$,$0<\alpha<\pi/2$ 内部的那部分曲面的形心;(b)用(a)的结论计算半球面的形心.

散度定理

60. 对 $A=(2xy-z)i+y^2j-(x+3y)k$ 在由 $2x+2y+z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ 围成的区域上验证散度定理.

61. 计算 $\iint_S F\cdot ndS$,其中 $F=(z^2-x)i-xyj+3zk$ 且 S 是由 $z=4-y^2$, $x=0$, $x=3$ 及 xy 平面所围立体的表面.

62. 计算 $\iint_S A\cdot ndS$, 其中 $A=(2x+3z)i-(xz+y)j+(y^2+2z)k$, 且 S 为球心在$(3,-1,2)$, 半径为3的球面.

63. 计算 $\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, 其中 S 是圆柱面 $x^2+y^2=9$ 和平面 $z=0$, $z=3$ 所围立体的表面.

64. 计算 $\iint_S 4xzdydz-y^2dzdx+yzdxdy$,其中 S 是由 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$ 所围立方体的表面. (a) 直接计算;(b) 用空间格林定理(散度定理).

65. 证明对任意封闭曲面 S 有 $\iint_S(\nabla\times A)\cdot ndS=0$.

66. 证明 $\iint_S n\cdot dS=0$,其中 n 为任意封闭曲面 S 的外法向量.

67. 设 n 为区域 V 的边界闭曲面 S 的单位外法向量, 证明:

$$\iiint_V \mathrm{div}\, ndV=S.$$

斯托克斯定理

68. 对 $A=2yi+3xj-z^2k$ 验证斯托克斯定理,其中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=9$, C 是其边界曲线.

69. 对 $A=(y+z)i-xzj+y^2k$ 验证斯托克斯定理,其中 S 是由 $2x+z=6$ 和 $y=2$ 所围成的立体在第一卦限内的外侧,并且不包含(a) xy 平面,(b)平面 $y=2$, (c)平面 $2x+z=6$,且 C 为相应的边界曲线.

70. 计算 $\iint_S(\nabla\times A)\cdot ndS$, 其中 $A=(x-z)i+(x^3+yz)j-3xy^2k$, 其中 S 是锥面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 在 xy 平面上面的部分.

71. 设 V 是由一封闭曲面 S 围成的立体且 $B=\nabla\times A$,证明 $\iint_S B\cdot ndS=0$.

72. (a) 证明 $F=(2xy+3)i+(x^2-4z)j-4yk$ 是一保守力场;(b) 求 ϕ 使得 $F=\nabla\phi$; (c) 计算 $\int_C F\cdot dr$, 其中 C 是从$(3,-1,2)$ 到$(2,1,-1)$ 的任意路径.

73. 设 C 为连接球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上任一点和球面 $x^2+y^2+z^2=b^2$ 上任一点间的任意路径. 如果 $F=5r^3r$,其中 $r=xi+yj+zk$, 证明 $\int_C F\cdot dr=b^5-a^5$.

74. 设 $F=f(r)\cdot r$,其中 $f(r)$ 连续,在习题73中计算 $\int_C F\cdot dr$.

75. 判断是否存在函数 ϕ 使得 $F=\nabla\phi$,其中(a) $F=(xz-y)i+(x^2y+z^3)j+(3xz^2-xy)k$, (b) $F=2xe^{-y}i+(\cos z-x^2e^{-y})j-y\sin zk$, 如果存在,求 ϕ.

76. 解微分方程 $(z^3-4xy)dx+(6y-2x^2)dy+(3xz^2+1)dz=0$.

杂题

77. 证明:沿着区域 $\mathscr{R}$ 内任意简单闭曲线 C, $\oint_C\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx$ 为零的充要条件是 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$(其中 u 在 $\mathscr{R}$ 上连续且至少有两阶连续偏导数).

78. 在包含两个“洞”的多连通区域上证明格林定理(见例10).

79. 设 $Pdx+Qdy$ 不是全微分,而 $\mu(Pdx+Qdy)$ 是全微分,其中 μ 是 x, y 的函数,则称 μ 为积分因子. (a) 证明如果 F 和 G 是 x 的函数,则 $(Fy+G)dx+dy$ 有积分因子 μ, μ 为 x 的函数,并求出 μ. 事先要假设 F 和 G 应满足什么条件?(b) 用(a) 解微分方程: $xy'=2x+3y$.

80. 求球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ 含在抛物面 $z=x^2+y^2$ 内部的那部分曲面面积.

81. 设 $f(r)$ 是 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的连续可微函数,证明: $\iint_S f(r)ndS=\iiint_V\frac{f'(r)}{r}rdV$.

82. 证明:$\iint_S \nabla \times (\phi \boldsymbol{n}) dS = 0$,其中 ϕ 是任一连续可微的纯量位置函数,$\boldsymbol{n}$ 是封闭曲面 S 的单位外法向量.

83. 用平面格林定理推导例 32 中(3).

[提示:设 xy 平面内闭区域 $\mathscr{R}$ 的边界曲线为 C,在变换 $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ 下,$\mathscr{R}$ 和 C 分别变换为 uv 平面内的 $\mathscr{R}'$ 和 C'.先证明 $\iint_{\mathscr{R}} F(x, y) dxdy = \int_C Q(x, y) dy$,其中 $\partial Q/\partial y = F(x, y)$,再证明除去符号之外,上一个积分等于 $\int_{C'} Q[f(u, v), g(u, v)]\left[\frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv\right]$.最后用格林定理,将上一积分变换为 $\iint_{\mathscr{R}'} F[f(u, v), g(u, v)] \cdot \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv_0$]

84. 设变换 $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$ 将 xyz 空间中区域 $\mathscr{R}$ 映射到 uvw 空间中的区域 $\mathscr{R}'$.用斯托克斯定理证明:

$$\iiint_{\mathscr{R}} F(x, y, z) dxdydz = \iiint_{\mathscr{R}'} G(u, v, w) \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| dudvdw,$$

其中 $G(u, v, w) = F[f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)]$.叙述结论成立的充分条件.见习题 83.

85. (a) 证明方程 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 在几何上一般表示一张曲面;(b)讨论 $u = c_1$, $v = c_2$ 的几何意义,其中 c_1, c_2 是常数;(c)证明曲面的弧元素由下式决定:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

其中 $E = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$, $F = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$, $G = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$.

86. (a)由习题 85,证明曲面面积元素为 $dS = \sqrt{EG - F^2}\, dudv$; (b)由(a)证明曲面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 面积为 $\iint_S \sqrt{EG - F^2}\, dudv$.

[提示:用 $\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right)}$ 和恒等式 $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})$.]

87. (a)证明 $\boldsymbol{\Gamma} = a\sin u\cos v\boldsymbol{i} + a\sin u\sin v\boldsymbol{j} + a\cos u\boldsymbol{k}$, $0 \leqslant u \leqslant \pi$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$ 表示半径为 a 的球面.(b)用习题 86 证明球面面积为 $4\pi a^2$.

88. 用习题 34 的结论求 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$,在(a)柱坐标,(b)球坐标(见 p. 129).

第十一章　无穷级数

无穷级数的收敛与发散

考虑无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \tag{1}$$

设级数的部分和序列为 $S_1, S_2, S_3, \cdots$其中

$$S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \cdots,\ S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \tag{2}$$

如果该序列是收敛的,即存在一实数 S,使得$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 成立,级数(1)称为是收敛的,S 为它的和.如果$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在,级数称为发散.(与第三章 p.41 作比较).有时也将级数(1)简记为 $\sum u_n$, u_n 是级数的第 n 项.

例 1: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$.这里 S_n 二前 n 项的和 $= 1 - \frac{1}{2^n}$(见第三章习题 25),因此$\lim\limits_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{2^n}) = 1$,所以级数收敛且和 $S = 1$.

例 2: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$.当 n 为奇数或偶数时,$S_n = 0$ 或 1.因此$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在,级数发散.

无穷级数的基本性质

1. 如果 $\sum u_n$ 收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$(见第三章习题 26).反之未必成立,即如果$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, $\sum u_n$ 不一定收敛.也就是说如果一级数的第 n 项不趋向于零,由级数发散.
2. 级数的每一项乘以一非零常数不影响级数的敛散性.
3. 在级数中去掉或加上有限项不改变级数的敛散性.

特殊级数

1. 几何级数. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$,其中 a 和 r 是常数.当$|r| < 1$ 时,级数收敛到 $S = \frac{a}{1-r}$,当$|r| \geqslant 1$ 时发散.前 n 项和为$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$(见第三章习题 25).

2. p 级数. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$,其中 p 是常数,当 $p > 1$ 时收敛,当 $p \leqslant 1$ 时发散. $p = 1$ 时称为调和级数.

常数项级数敛散性判别

1. 非负项级数的**比较判别法**

(a)收敛.设 $n > N$ 时,$v_n \geqslant 0$ 且 $\sum v_n$ 收敛.如果 $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ 对一切 $n > N$ 均成立,则 $\sum u_n$ 收敛.注:$n > N$ 表示从第N 项向向,一般 $N = 1$.

例:因为$\frac{1}{2^n+1} \leqslant \frac{1}{2^n}$且 $\sum \frac{1}{2^n}$ 收敛,则 $\sum \frac{1}{2^n+1}$也收敛.

(b)发散.设 $n > N$ 时,$v_n \geqslant 0$ 且 $\sum v_n$ 发散.如果 $u_n > v_n$ 对一切 $n > N$ 均成立,则 $\sum u_n$

也发散.

例:因为$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$且$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,则$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$也发散.

2. 非负项级数的商判别法

(a)设 $u_n\geqslant 0, v_n\geqslant 0$,如果$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A\neq 0$ 或∞,则 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 同敛散.

(b)如果(a)中 $A=0$ 且 $\sum v_n$ 收敛,则$\sum u_n$ 也收敛.

(c)如果(a)中 $A=\infty$且 $\sum v_n$ 发散,则$\sum u_n$ 也发散.

商判别法和比较判别是相关的,是一种非常有效的判别法.特别地,令 $v_n=1/n^p$,由 p 级数的性质,有

定理 1　设$\lim_{n\to\infty}n^p u_n=A$,则

(i)当 $p>1$ 且 A 是一有限数时, $\sum u_n$ 收敛.

(ii)当 $p\leqslant 1$ 且 $A\neq 0$(或为∞)时, $\sum u_n$ 发散.

例:1. 因为$\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{n}{4n^3-2}=\frac{1}{4}$,所以 $\sum\frac{n}{4n^3-2}$收敛.

2. 因为$\lim_{n\to\infty}n^{1/2}\cdot\frac{\ln n}{(n+1)^{1/2}}=\infty$,所以 $\sum\frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$发散.

3. 非负项级数的积分判别法

当 $x\geqslant N$ 时,设 $f(x)$是正的连续且单调递减函数,$f(n)=u_n$, $n=N,N+1,N+2,\cdots$,则 $\sum u_n$ 的敛散性和$\int_N^{\infty}f(x)dx=\lim_{M\to\infty}\int_N^M f(x)dx$ 敛散性一致.实际应用时,常取 $N=1$.

例:因为$\int_1^M\frac{dx}{x^2}=\lim_{M\to\infty}(1-\frac{1}{M})$存在,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛.

4. 交错级数判别法. 交错级数是逐项正负交替的.

如果下列两个条件成立(见习题 15),则交错级数收敛.

(a) $|u_{n+1}|\leqslant|u_n|$,　　当 $n\geqslant 1$,

(b) $\lim_{n\to\infty}u_n=0$　　　(或$\lim_{n\to\infty}|u_n|=0$).

例:级数 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$,有$|u_n|=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $|u_n|=\frac{1}{n}$, $|u_{n+1}|=\frac{1}{n+1}$,则 $n\geqslant 1$ 时有$|u_{n+1}|\leqslant|u_n|$且$\lim_{n\to\infty}|u_n|=0$.因此该级数收敛.

定理 2　满足条件(a)和(b)的收敛交错级数,前 n 项的和产生的误差小于第 $n+1$ 项的绝对值.

例:取级数 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$前 4 项的和,误差小于$\frac{1}{5}=0.2$.

5. 绝对收敛与条件收敛. 如果 $\sum|u_n|$ 收敛,则称级数 $\sum u_n$ 绝对收敛.如果 $\sum u_n$ 收敛,但 $\sum|u_n|$ 发散,则 $\sum u_n$ 称为条件收敛.

定理 3　如果 $\sum|u_n|$收敛,则 $\sum u_n$ 收敛.即绝对收敛的级数必收敛.(见习题 17).

例 1:$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-\cdots$是绝对收敛的,因而级数收敛,因为加上绝对值的级数$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$收敛.

例 2:$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$收敛,但 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$发散,因此 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$是条件收敛的.

非负项级数的一切判别法都可用来判别绝对收敛.

6. 比值判别法. 设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L$，级数 $\sum u_n$

(a)当 $L<1$ 时，(绝对)收敛，

(b)当 $L>1$ 时，发散.

如果 $L=1$，该判别法失效.

7. n 次根式判别法. 设 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = L$，级数 $\sum u_n$

(a)当 $L<1$ 时，(绝对)收敛，

(b)当 $L>1$ 时发散.

如果 $L=1$，该判别法失效.

8. 拉阿伯(Raabe)判别法. 设 $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = L$，级数 $\sum u_n$

(a)当 $L>1$ 时，(绝对)收敛，

(b)当 $L<1$ 时，发散或条件收敛.

如果 $L=1$，该判别法失效.

当比值判别法失效时，经常使用该判别法.

9. 高斯(Gauss)判别法. 设 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1-\frac{L}{n}+\frac{c_n}{n^2}$，其中 $|c_n|<P$ 对一切 $n>N$ 成立，则级数 $\sum u_n$

绝对收敛级数定理

定理 4 绝对收敛级数经改变项的位置后构成的级数仍收敛，且与原级数有相同的和. 然而条件收敛级数经改变项的位置后构成的级数，可能发散，也可能收敛到其他和(见习题 76).

定理 5 两个绝对收敛级数的和、差、积、商仍是绝对收敛的. 这些运算对有限级数同样成立.

无穷序列和函数项级数，一致收敛

设 $\{u_n(x)\}$，$n=1,2,3,\cdots$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数列. 任给 $\varepsilon>0$，对任意 $x\in[a,b]$，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $|u_n(x)-F(x)|<\varepsilon$ 成立，则称函数列收敛到 $F(x)$，或称在 $[a,b]$ 上有极限 $F(x)$. N 与 x 及 ε 相关. 如果 N 与 x 无关，仅与 ε 相关，则称函数列在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $F(x)$ 或称在 $[a,b]$ 上一致收敛.

如果函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots \tag{3}$$

部分和序列 $\{S_n(x)\}$，$n=1,2,3,\cdots$，其中 $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛，则称函数项级数在 $[a,b]$ 上收敛，记为 $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$，$S(x)$ 称为函数项级数的和.

由此可得，设任给 $\varepsilon>0$，对任意 $x\in[a,b]$，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$ 成立，则称 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛到 $S(x)$. 如果 N 仅与 ε 相关，与 x 无关，则称级数在 $[a,b]$ 上一致收敛.

设 $S(x)-S_n(x)=R_n(x)$，称为第 n 项的余项. 等价地有如果任给 $\varepsilon>0$，存在 N 只与 ε 相关，与 x 无关，使得当 $n>N$ 时，对任意 $x\in[a,b]$ 有 $|R_n(x)|<\varepsilon$ 成立，则称 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

上面的定义对其他区间,如 $a\leqslant x\leqslant b$, $a<x<b$ 等均成立.

级数的(绝对或一致)收敛域是使函数项级数(绝对或一致)收敛的 x 的值的集合.

级数一致收敛的特殊判别法

1. 魏尔斯特拉斯(Weierstrass) M 判别法. 设正常数序列 $M_1, M_2, M_3, \cdots$ 在某一区间上满足:

(a) $|u_n(x)|\leqslant M_n$, $n=1,2,3,\cdots$,

(b) $\sum M_n$ 收敛,

则 $\sum u_n(x)$ 在该区间上一致且绝对收敛.

例: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $[0,2\pi]$ 上有: $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$ 且 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛,所以一致且绝对收敛.

该判别法提供了判别一致收敛的一个充分但非必要条件,即该判别法的条件即使不成立,级数也有可能是一致收敛的.

由该判别法易造成这样的误解,认为一致收敛的级数一定绝对收敛,反之也成立.其实不然,即级数一致收敛但未必绝对收敛,反之也未必成立.见习题 30.

2. 狄利克雷(Dirichlet)判别法. 设

(a) $\{a_n\}$ 是一单调递减且以零为极限的正常数序列;

(b) 存在一常数 P,使得当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时,对一切 $n>N$,有

$$|u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)|<P \text{ 成立},$$

则级数

$$a_1u_1(x)+a_2u_2(x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_nu_n(x)$$

在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致收敛.

级数一致收敛的定理

设一无穷函数项级数一致收敛,则其和函数有许多性质,如以下定理所示:

定理 6　设 $\{u_n(x)\}$, $n=1,2,3,\cdots$ 在 $[a,b]$ 上连续,如果 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到和函数 $S(x)$,则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

简而言之,由一连续函数列构成的一致收敛级数其和函数仍是连续的.这个结论经常被用作通过检验一和函数 $S(x)$ 在某些点(见习题 30)处不连续,从而证明一给定级数不是一致收敛的.

特别地,如果 x_0 在 $[a,b]$ 上,则定理可表示为

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0),$$

如果 x_0 位于 $[a,b]$ 的端点处,分别取右极限和左极限.

定理 7　设 $\{u_n(x)\}$, $n=1,2,3,\cdots$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到和函数 $S(x)$,则

$$\int_a^b S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx \tag{4}$$

或

$$\int_a^b\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx. \tag{5}$$

简而言之,由连续函数列构成的一致收敛级数可以逐项积分.

定理 8 设$\{u_n(x)\}$,$n=1,2,3,\cdots$在$[a,b]$上连续且有连续偏导数.当$\sum u'_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛时,如果$\sum u_n(x)$也收敛到$S(x)$,则在$[a,b]$上有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x) \tag{6}$$

或

$$\frac{d}{dx}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}u_n(x). \tag{7}$$

这表明满足上述定理条件的级数是逐项可微的.

上述定理对序列也成立.如,设$\{u_n(x)\}$,$n=1,2,3,\cdots$在$[a,b]$上一致收敛,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)dx=\int_a^b\lim_{n\to\infty}u_n(x)dx. \tag{8}$$

这与定理 7 类似.

幂级数

一级数具有形式

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \tag{9}$$

其中$a_0,a_1,a_2,\cdots$是常数,称为x的幂级数.通常将(9)简记为$\sum a_nx^n$.

幂级数当$|x|<R$时收敛,$|x|>R$时发散,其中R称为级数的收敛半径.当$|x|=R$时,级数可能收敛,也可能发散.

区间$|x|<R$或$-R<x<R$,也可能包括端点,称为级数的收敛区间.可以用比值判别法求收敛区间.一旦这种方法失效,可改用其他判别法.(见习题 22)

有两种特殊情况:$R=0$和$R=\infty$.$R=0$时,级数只在$x=0$处收敛;$R=\infty$时,在一切x处均收敛,记为$-\infty<x<+\infty$(见习题 25).下面讨论幂级数的收敛性,除非特别指出,一般假设$R>0$.

如果用$(x-a)$替换(9)中的x,得到的幂级数有类似的结论.

关于幂级数的定理

定理 9 幂级数在其收敛区间内的每一子区间上是一致且绝对收敛的.

定理 10 幂级数在其收敛区间内的每一子区间上是逐项可积和逐项可微的.收敛幂级数的和函数在其收敛区间内的每一子区间上也是连续的.

这可根据 p.207 的级数一致收敛定理以及定理 9 直接推得.这些结论也可以推广到包括收敛区间的端点,如以下定理:

定理 11(阿贝尔定理) 当一幂级数在其收敛区间的一端点处收敛时,其一致收敛区间也包括这个端点.(见习题 42)

定理 12(阿贝尔极限定理) 设$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_0$处收敛,$x_0$是收敛区间内部的点或为端点,则

$$\lim_{x\to x_0}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\lim_{x\to x_0}a_nx^n\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n. \tag{10}$$

如果x_0是端点,则根据x_0是左端点或右端点,在(10)中分别取$x\to x_0^+$或$x\to x_0^-$.

这可以根据一致收敛级数和函数的连续性,从定理 11 和定理 6 推得.

幂级数运算

在以下定理中,假设所有幂级数在某个区间上是收敛的.

定理 13　两个幂级数逐项相加或相减后所得幂级数在公共收敛区间内收敛.

定理 14　两个幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$和$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$,相乘得到的$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$在公共收敛区间内收敛,其中

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_nb_0, \tag{11}$$

定理 15　幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$除以幂级数$\sum b_nx^n$,其中$b_0\neq 0$,商可写为一幂级数,对充分小的$x$收敛.

定理 16　设$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,将$x=\sum_{n=0}^{\infty}b_ny^n$代入,可以用$a_n$来表示系数$b_n$.这个过程常称为级数的反演.

函数展开成幂级数

设$f(x)$及其导数$f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n)}(x)$存在,在闭区间$a\leqslant x\leqslant b$上连续,$f^{(n+1)}(x)$在开区间$a<x<b$上存在,则如前几章所示(见 p.57 和 p.86):

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n \tag{12}$$

其中余项$R_n(x)$,可由下面两种形式之一给出:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (\text{拉格朗日形式}), \tag{13}$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a)\ (\text{柯西形式}), \tag{14}$$

其中ξ介于a和x之间,上面两种形式中ξ一般不相同.

随着n的变化,ξ也发生变化.如果对$[a,b]$上一切x和ξ,都有$\lim_{n\to\infty}R_n=0$,则(12)变为

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots, \tag{15}$$

称为泰勒级数或$f(x)$的泰勒展开.当$a=0$时,称为麦克劳林级数或$f(x)$的麦克劳林展开.函数展开问题见第六章.

也许有人会认为如果$f(x)$的任意阶导数在$x=a$处都存在,展开式(15)就是正确的.然而这并不具有必然性.尽管可以从(15)右边形式上得到一级数,但它未必收敛到$f(x)$.这样的例子见习题 104.

级数收敛到$f(x)$的确切条件通过复变函数定理得到,见第十七章.

一些重要的幂级数

下列级数,在指明的区间上收敛到给定的函数,在实际中经常用到:

1. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, -\infty<x<\infty,$

2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots, -\infty<x<\infty,$

3. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots, -\infty<x<\infty,$

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, -1<x\leqslant 1,$

5. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots, -1<x<1,$

6. $\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots, -1\leqslant x\leqslant 1,$

7. $(1+x)^p = 1+px+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$

这是二项级数,

(a)如果 P 为正整数或零,级数是有限项.

(b)如果 $p>0$,但不是一整数,则级数在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上(绝对)收敛.

(c)如果 $-1<P<0$,则级数在 $-1<x\leqslant 1$ 上收敛.

(d)如果 $P\leqslant -1$,则级数在 $-1<x<1$ 上收敛.

如果 $-1<x<1$,对一切 p 级数都收敛.

特殊课题

1. 用级数定义函数是非常有用的,经常出现在求解微分方程时.如一函数定义为:

$$J_p(x) = \frac{x^p}{2^p\cdot p!}\left\{1-\frac{x^2}{2(2p+2)}+\frac{x^4}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)}-\cdots\right\} \tag{16}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x/2)^{p+2n}}{n!(n+p)!}$$

是贝塞尔微分方程 $x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$ 的一个解,因此称为 p 阶贝塞尔函数,见习题 46.

类似地,超几何(比)函数

$$F(a,b;c;x) = 1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}x^2+\cdots \tag{17}$$

是高斯微分方程 $x(1-x)y''+\{c-(a+b+1)x\}y'-aby=0$ 的一个解.

这些函数具有许多重要性质.

2. 复数项无穷级数是形式为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的特殊幂级数,其中 $z=x+iy$,a_n 可能为复数,类似于实数项级数.

这样的幂级数在 $|z|<R$ 时收敛,即收敛域为圆 $x^2+y^2=R^2$ 的内部,其中 R 是收敛半径(如果只有 $z=0$ 时级数收敛,称收敛半径 R 为零;如果对一切 z 都收敛,称收敛半径为无穷).在圆周上即 $|z|=R$ 时,级数可能收敛,也可能发散,根据 z 决定.

当 $y=0$ 时,收缩圆域退缩为实数项级数的收敛区间.由复变函数定理可以更深入地了解这类幂级数.(见第十七章)

3. 含两个或更多变量的函数项无穷级数,如 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)$,类似于含一个变量的级数.特别地,我们讨论含 x 和 y 的幂级数,有下列形式:

$$a_{00}+(a_{10}x+a_{01}y)+(a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2)+\cdots, \tag{18}$$

常数带有双下标.对其中一个变量而言,可按照第六章 p.99 页结论,将关于 x 或 y 的函数展开成幂级数的形式,且当 $n\to\infty$ 时有余项 $R_n\to 0$.一般,这样的幂级数在一矩形域 $|x|<A$,$|y|<B$ 内部收敛,在边界上可能收敛.

4. 二重级数.考虑数组(或函数阵列)

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

设 $S_{mn}=\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}u_{pq}$ 是数组前 m 行和前 n 行的数字和．如果存在一数 S 使得 $\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}S_{nm}=S$，则称二重级数 $\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}u_{pq}$ 收敛到和 S，否则是发散的．

二重级数的有关定义和定理类似于先前讨论的级数．

5．无穷乘积．设 $p_n=(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\cdots(1+u_n)$ 可用 $\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$ 表示，其中设 $u_k\neq-1,k=1,2,3,\cdots$．如果存在一数 $p\neq0$，使得 $\lim_{n\to\infty}p_n=p$，则称无穷乘积 $(1+u_1)(1+u_2)\cdots=\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$，或简记为 $\prod(1+u_k)$，收敛到 P，否则称为发散．

如果 $\prod(1+|u_k|)$ 收敛，则称无穷乘积 $\prod(1+u_k)$ 绝对收敛．显然，绝对收敛的无穷乘积必收敛，如将元素重排不影响结果．

有关无穷乘积的定理(通过取对数)，可根据无穷级数推得．因此有：

定理　$\prod(1+u_k)$ 绝对收敛的充要条件是 $\sum u_k$ 绝对收敛．

6．可求和性．设 $S_1,S_2,S_3,\cdots$ 是一发散级数 $\sum u_n$ 的部分和．如果序列 $S_1,\frac{S_1+S_2}{2},\frac{S_1+S_2+S_3}{3},\cdots$(取 $S_1,S_2,S_3,\cdots$ 前 n 项的算术平均)收剑到 S，则称级数 $\sum u_k$ 是 Césaro 意义上可求和的，或 C-1 可求和到 S．(见习题 51)．

如果 $\sum u_n$ 收敛到 S，则 Césaro 方法也产生结果 S．所以 Césaro 方法也称为可求和的正则方法．

如果 Césaro 极限不存在，对序列 $S_1,\frac{S_1+S_2}{2},\frac{S_1+S_2+S_3}{3},\cdots$ 采用相同的方法．如果这个序列的 C-1 极限存在且等于 S，则称 $\sum u_k$ 在 C-2 意义上收敛到 S．这个过程可以无限地继续下去．

7．渐近级数．考虑级数

$$S(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+\cdots,\tag{19}$$

设级数的部分和为

$$S_n(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n},n=0,1,2,\cdots,\tag{20}$$

设 $R_n(x)=f(x)-S_n(x)$，其中 $f(x)$ 是已知的，如果对每一 n 有

$$\lim_{|x|\to\infty}x^nR_n(x)=0,$$

则称 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的渐近展开式，表示为 $f(x)\sim S(x)$．

实际上级数(19)发散．然而将级数逐项相加求和，直到项开始递增为止，我们可得到 $f(x)$ 的一个有用的逼近式．

对渐近级数施行各种操作都是可行的．如渐近级数可以相乘或逐项积分产生另外的渐近级数．

习题与解答

常数项级数的收敛与发散

1. (a)证明$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$收敛,(b)求级数和.

解 ☞ $u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,则

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$,所以级数收敛且和为$\frac{1}{2}$.

级数的部分和 S_n 中,除了第一项和最后一项,其余都成对相消,所以又称为显微级数.

2. (a)证明 $\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛.(b)求和.

解 ☞ $S_n=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3-\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$,

$\frac{2}{3}S_n=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$,

相减:$\frac{1}{3}S_n=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$或$S_n=2\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}2\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=2$,所以级数收敛且和为 2.

另一种解法 在第三章习题 25 中,设$a=\frac{2}{3}$,$r=\frac{2}{3}$,则和为$a/(1-r)=\frac{2}{3}\Big/\left(1-\frac{2}{3}\right)=2$.

3. 证明级数$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$发散.

证明 ☞ 因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$,所以由第三章习题 26 知,级数发散.

4. 证明通项为 $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$的级数有$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,但级数发散.

证明 ☞ 由第三章习题 14(c)知$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,而

$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$ 则 S_n 递增且无界,级数发散.由此可见$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$是级数收敛的必要非充分条件.

比较判别法和商判别法

5. 设 $0\leqslant u_n\leqslant v_n$, $n=1,2,3,\cdots$如果$\sum v_n$ 收敛,证明 $\sum u_n$ 也收敛(即建立判别收敛性的比较判别法).

解 ☞ 设$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$,$T_n=v_1+v_2+\cdots+v_n$,因为$\sum v_n$收敛,$\lim\limits_{n\to\infty}T_n$ 存在且等于T,所以由 $v_n\geqslant0$ 得 $T_n\leqslant T$,则

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant v_1+v_2+\cdots+v_n\leqslant T,$$

或 $0\leqslant S_n\leqslant T$,因此 S_n 是单调有界递增序列,一定有极限(见第三章),即$\sum u_n$ 收敛.

6. 用比较判别法证明 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

证明 ☞ 因为 $$1\geqslant\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\geqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\geqslant\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{15}\geqslant\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}(8\text{项})=\frac{1}{2},$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

一直到任意多项,有

$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\cdots\geqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots,$$

因此只要选择足够多的项,就能使右边比任意正数都大,原级数发散.

同理可证,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$,当 p 为一常数且 $p\leqslant1$ 时发散,$p>1$ 收敛.也可以用其他方法证明.

7. 判别 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2n^3-1}$ 的敛散性.

解 ☞　因为 $\ln n<n$ 且 $\frac{1}{2n^3-1}\leqslant\frac{1}{n^3}$,所以 $\frac{\ln n}{2n^3-1}\leqslant\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$.

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,所以原级数收敛.

8. 设 u_n 和 v_n 是正的.如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=$ 常数 $A\neq0$,

证明 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 同敛散.

证明 ☞　由假设,任给 $\varepsilon>0$,存在一整数 N,对一切 $n>N$,有 $\left|\frac{u_n}{v_n}-A\right|<\varepsilon$ 成立.则当 $n=N+1$, $N+2,\cdots$ 有:

$$-\varepsilon<\frac{u_n}{v_n}-A<\varepsilon\text{ 或}(A-\varepsilon)v_n<u_n<(A+\varepsilon)v_n,\tag{1}$$

从 $N+1$ 到 ∞ 求和(更确切讲是从 $N+1$ 到 M,令 $M\to\infty$),

$$(A-\varepsilon)\sum_{N+1}^{\infty}v_n\leqslant\sum_{N+1}^{\infty}u_n\leqslant(A+\varepsilon)\sum_{N+1}^{\infty}v_n.\tag{2}$$

不失一般性,假设 $A-\varepsilon>0$,从(2)右边知,当 $\sum v_n$ 收敛时,$\sum u_n$ 也收敛.从(2)左边知,当 $\sum v_n$ 发散时,$\sum u_n$ 发散.$A=0$ 或 $A=\infty$ 情况见习题 62.

9. 判别收敛性:(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-n+3}{n^3+2n}$,(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$,(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2+3}$.

解 ☞　(a)n 充分大时,$\frac{4n^2-n+3}{n^3+2n}$ 近似为 $\frac{4n^2}{n^3}=\frac{4}{n}$.设

$$u_n=\frac{4n^2-n+3}{n^3+2n}\text{ 和 }v_n=\frac{4}{n},\text{则}\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1.$$

因为 $\sum v_n=4\sum\frac{1}{n}$ 发散,由习题 8 知 $\sum u_n$ 也发散.

考虑 n 充分大时 u_n 的变化是为了得到一相近的比较级数 v_n.上面也可以设 $v_n=\frac{1}{n}$.

另一种解法　$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{4n^2-n+3}{n^3+2n}\right)=4$,由 p.205 定理 1 知级数发散.

(b)n 充分大时,$u_n=\frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$ 近似为 $v_n=\frac{n}{2n^3}=\frac{1}{2n^2}$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$ 且 $\sum v_n=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛($p=2$ 时,p 级数),所求级数收敛.

另一种解法　$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}\right)=\frac{1}{2}$，则由 p.205 定理 1 知级数收敛.

(c) $\lim_{n\to\infty} n^{3/2}\left(\frac{\ln n}{n^2+3}\right)\leqslant \lim_{n\to\infty} n^{3/2}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}=0$（由洛必达法则或其他），则由定理 1 及 $p=3/2$ 知级数收敛.

注：习题 9(c)中，有 $\frac{\ln n}{n^2+3}<\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$，因为 $\sum\frac{1}{n}$ 发散，所以该方法不能判别级数的敛散性.

10. 判别收敛性：(a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$；(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$.

解 ☞　(a) $\lim_{n\to\infty} n^2 e^{-n^2}=0$（由洛必达法则或其他），则由定理 1 及 $p=2$ 知级数收敛.

(b) 当 n 充分大时，$\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ 近似为 $\frac{1}{n}$，考虑 $\lim_{n\to\infty} n^3\sin^3\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\sin(1/n)}{1/n}\right\}^3=1$，由定理 1 及 $p=3$ 知级数收敛.

积分判别法

11. 证明积分判别法（见 p.205）.

证明 ☞　我们仅证 $N=1$ 的情况，$N>1$ 时只要稍作修改即可. 由 $f(x)$ 的单调性有

$$u_{n+1}=f(n-1)\leqslant f(x)\leqslant f(n)=u_n,\ n=1,2,3,\cdots.$$

由 p.74 性质 7，从 $x=n$ 到 $x=n+1$ 积分，

$$u_{n+1}\leqslant\int_n^{n+1} f(x)dx\leqslant u_n,\ n=1,2,3,\cdots.$$

从 $n=1$ 到 $M-1$ 求和：

$$u_2+u_3+\cdots+u_M\leqslant\int_1^M f(x)dx\leqslant u_1+u_2+\cdots+u_{M-1}. \tag{1}$$

如果 $f(x)$ 严格递增，则(1)中等号可略去.

如果 $\lim_{M\to\infty}\int_1^M f(x)dx$ 存在且等于 S，则由(1)左边知 $u_2+u_3+\cdots+u_M$ 是单调递增且有上界 S，所以 $\sum u_n$ 收敛.

如果 $\lim_{M\to\infty}\int_1^M f(x)dx$ 是无界的，由(1)右边知 $\sum u_n$ 发散. 证毕.

12. 用图解从几何角度证明习题 11.

证明 ☞　几何上，$u_2+u_3+\cdots+u_M$ 是图 11-1 中阴影部分的矩形面积和，$u_1+u_2+\cdots+u_{M-1}$ 是加阴影和不加阴影的所有矩形面积之和.

曲线 $y=f(x)$ 上从 $x=1$ 到 $x=M$ 所围图形面积介于上面两个面积之间，习题 11 的结论(1)得到说明.

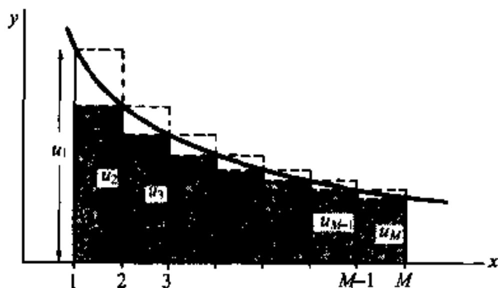


图 11-1

13. 判别敛散性：(a) $\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^p}$，$p$ 为常数；

(b) $\sum_1^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$；(c) $\sum_2^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$；(d) $\sum_1^{\infty} ne^{-n^2}$.

解 ☞　(a) 考虑 $\int_1^M\frac{dx}{x^p}=\int_1^M x^{-p}dx=\left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^M=\frac{M^{1-p}-1}{1-p}$，其中 $p\neq1$.

当 $p<1$，$\lim_{M\to\infty}\frac{M^{1-p}-1}{1-p}=\infty$，则积分发散，因而级数也发散.

当 $p>1$，$\lim_{M\to\infty}\frac{M^{1-p}-1}{1-p}=\frac{1}{p-1}$，则积分收敛，因而级数也收敛.

当 $p=1$，$\int_1^M\frac{dx}{x^p}=\int_1^M\frac{dx}{x}=\ln M$，且 $\lim_{M\to\infty}\ln M=\infty$，则积分和级数都发散.

因此原级数当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant1$ 时发散.

(b) $\lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{xdx}{x^2+1}=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^M=\lim_{M\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\ln(M^2+1)-\frac{1}{2}\ln^2\right\}=\infty$,则级数发散.

(c) $\lim_{M\to\infty}\int_2^M \frac{dx}{x\ln x}=\lim_{M\to\infty}\ln(\ln x)\Big|_2^M=\lim_{M\to\infty}\{\ln(\ln M)-\ln(\ln 2)\}=\infty$,则级数发散.

(d) $\lim_{M\to\infty}\int_1^M xe^{-x^2}dx=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_1^M=\lim_{M\to\infty}\left\{\frac{1}{2}e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-M^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-1}$,则级数收敛.

注:当级数收敛时,相应的积分值(通常)不等于级数的和.然而积分值可作为级数和的非常精确的近似值,见习题70.

14. 证明$\frac{\pi}{4}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$.

证明 ☞　由习题11知

$$\lim_{M\to\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}<\lim_{M\to\infty}\int_1^M\frac{dx}{x^2+1}<\lim_{M\to\infty}\sum_{n=1}^{M-1}\frac{1}{n^2+1},$$

即$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}<\frac{\pi}{4}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$,则$\frac{\pi}{4}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$得证.

因为$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}<\frac{\pi}{4}$,两边都加上$\frac{1}{2}$,得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$,所以结论成立.

交错级数

15. 已知交错级数$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$,其中$0\leqslant a_{n+1}\leqslant a_n$且$\lim_{n\to\infty}a_n=0$,证明:(a)级数收敛,(b)取前$2M$项的和产生的误差不超过第$2M+1$项的绝对值.

证明 ☞　(a)级数前$2M$项的和为

$$S_{2M}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2M-1}-a_{2M})$$
$$=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2M-2}-a_{2M-1})-a_{2M},$$

因为置于括号内的项是非负的,所以有

$$S_{2M}\geqslant 0, S_2\leqslant S_4\leqslant S_6\leqslant S_8\leqslant\cdots\leqslant S_{2M}\leqslant a_1,$$

因此$\{S_{2M}\}$是单调递增序列且有极限S.

又$S_{2M+1}=S_{2M}+a_{2M+1}$,$\lim_{M\to\infty}S_{2M}=S$且$\lim_{M\to\infty}a_{2M+1}=0$(由假设$\lim_{n\to\infty}a_n=0$知),所以$\lim_{M\to\infty}S_{2M+1}=\lim_{M\to\infty}S_{2M}+\lim_{M\to\infty}a_{2M+1}=S+0=S$.

所以级数的部分和极限为S,级数收敛.

(b)取前$2M$项和的误差为

$$(a_{2M+1}-a_{2M+2})+(a_{2M+3}-a_{2M+4})+\cdots=a_{2M+1}-(a_{2M+2}-a_{2M+3})-\cdots,$$

是非负的且小于等于a_{2M+1}.

类似地,取前$2M+1$项和的误差为

$$-a_{2M+2}+(a_{2M+3}-a_{2M+4})+\cdots=-(a_{2M+2}-a_{2M+3})-(a_{2M+4}-a_{2M+5})-\cdots,$$

是非正的且大于$-a_{2M+2}$.

16. (a)证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$收敛;(b)取级数前8项和前9项的和作为近似的最大误差;(c)问级数取几项时,绝对值误差不超过0.001?

证明 ☞　(a)级数为$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$,设$u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$,则$a_n=|u_n|=\frac{1}{2n-1}$,$a_{n+1}=|u_{n+1}|=\frac{1}{2n+1}$.因为$\frac{1}{2n+1}\leqslant\frac{1}{2n-1}$且$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$,由习题15(a)知级数收敛.

(b)用习题15(b)的结论,取前8项和$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}$,误差是正的且不超过$\frac{1}{17}$.

类似地前9项的和为$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}$,误差是负的且大于等于$-\frac{1}{19}$,即误

差绝对值不超过$\frac{1}{19}$.

(c)取前 M 项和的误差绝对值小于 $1/(2M+1)$,令$\frac{1}{2M+1}\leqslant 0.001$,得 $M\geqslant 499.5$. 即至少取前 500 项的和才能达到所需的精度.

绝对和条件收敛

17. 证明绝对收敛级数必收敛.

证明 ☞ 设 $\sum|u_n|$ 收敛,证明 $\sum u_n$ 收敛.

令 $S_M=u_1+u_2+\cdots+u_M$ 且 $T_M=|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_M|$,则

$$S_M+T_M=(u_1+|u_1|)+(u_2+|u_2|)+\cdots+(u_M+|u_M|)$$
$$\leqslant 2|u_1|+2|u_2|+\cdots+2|u_M|.$$

因为 $\sum|u_n|$ 收敛,且 $u_n+|u_n|\geqslant 0,n=1,2,3,\cdots$,则 S_M+T_M 是一单调递增且有界的序列,所以 $\lim\limits_{M\to\infty}(S_M+T_M)$存在.

同样,因为 $\lim\limits_{M\to\infty}T_M$ 存在(由假设知级数是绝对收敛的),

$$\lim_{M\to\infty}S_M=\lim_{M\to\infty}(S_M+T_M-T_M)=\lim_{M\to\infty}(S_M+T_M)-\lim_{M\to\infty}T_M$$

也存在,结论得证.

18. 判别级数$\frac{\sin\sqrt{1}}{1^{3/2}}-\frac{\sin\sqrt{2}}{2^{3/2}}+\frac{\sin\sqrt{3}}{3^{3/2}}-\cdots$的敛散性.

解 ☞ 考虑每一项加上绝对值后的级数不超过级数:$\frac{1}{1^{3/2}}+\frac{1}{2^{3/2}}+\frac{1}{3^{3/2}}+\cdots$的对应项,则由习题 17 知所求级数绝对收敛,所以收敛.

19. 判别收敛性及绝对收敛性:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{n^2+1}$;(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln^2 n}$;(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^n}{n^2}$

解 ☞ (a)由习题 13(b)知,加上绝对值的级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$是发散的. 因此原级数不是绝对收敛.

因而,设 $a_n=|u_n|=\frac{n}{n+1}$, $a_{n+1}=|u_{n+1}|=\frac{n+1}{(n+1)^2+1}$,则当 $n\geqslant 1$ 时,$a_{n+1}\leqslant a_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$. 因此由习题 15 知级数收敛.

因为级数收敛,但不是绝对收敛,所以是条件收敛.

(b)加上绝对值后的级数为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$,由积分判别法,根据$\lim\limits_{M\to\infty}\int_2^M\frac{dx}{x\ln^2 x}$存在与否来判别原级数的敛散性.

设 $u=\ln x$, $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}+c=-\frac{1}{\ln x}+c$ 因此$\lim\limits_{M\to\infty}\int_2^M\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim\limits_{M\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln M}\right)=\frac{1}{\ln 2}$且积分存在,则级数收敛.

级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln^2 n}$ 绝对收敛且收敛.

另一种解法

因为$\frac{1}{(n-1)\ln^2(n+1)}\leqslant\frac{1}{n\ln^2 n}$且$\frac{1}{n\ln^2 n}=0$,由习题 15(a)知,原交错级数收敛. 再用上面方法验证绝对收敛.

(c)因为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$,其中 $u_n=\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^n}{n^2}$,所给级数不收敛. 为了证明$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$,只要证明$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2}\neq 0$. 这可由洛必达法则或其他方法得证. [见习题 21(b)].

比值判别法

20. 证明判别级数敛散的比值判别法.

证明 ☞　先考虑级数 $u_1+u_2+u_3+\cdots$,其中每一项是非负的.下面将证明,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=L<1$,则 $\sum u_n$ 必收敛.

由假设,可以选择充分大的整数 N,对一切 $n\geqslant N$,当 $L<r<1$ 时,有 $(u_{n+1}/u_n)<r$,则

$$u_{N+1}<ru_N,$$

$$u_{N+2}<ru_{N+1}<r^2u_N,$$

$$u_{N+3}<ru_{N+2}<r^3u_N,\qquad \text{等等},$$

相加:$u_{N+1}+u_{N+2}+\cdots<u_N(r+r^2+r^3+\cdots)$.

因为 $0<r<1$,由比较判别法知所给级数收敛.

如果级数的项具有混合符号,考虑 $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots$,则由习题 17 及以上证明,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=L<1$,则级数(绝对)收敛.

类似地,可证明如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=L>1$,则级数发散.如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=L=1$,则比值判别法失效.[见习题 21(c)].

21. 判别收敛性:(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^4e^{-n^2}$,(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^n}{n^2}$,(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{n^2+1}$.

证明 ☞　(a) $u_n=n^4e^{-n^2}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^4e^{-(n+1)^2}}{n^4e^{-n^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4e^{-(n^2+1+2n)}}{n^4\cdot e^{-n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4e^{-2n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4\cdot\lim_{n\to\infty}e^{-2n-1}=1\cdot 0=0,$$

因为 $0<1$,则级数收敛.

(b) $u_n=\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^n}{n^2}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot 2^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{(-1)^{n-1}\cdot 2^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+1)^2}=2,$$

因为 $2>1$,级数发散.与习题 19(c)作比较.

(c) $u_n=\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{n^2+1}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot(n+1)}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{(-1)^{n-1}\cdot n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2+1)}{(n^2+2n+2)n}=1,$$

因此比值判别法失效.用其他判别法[见习题 19(a)]知级数是收敛的.

各种判别法

22. 判别 $1+2r+r^2+2r^3+r^4+2r^5+\cdots$ 的收敛性,其中
(a) $r=2/3$,(b) $r=-2/3$,(c) $r=4/3$.

解 ☞　当 n 是奇数或偶数时,因为 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=2|r|$ 或 $\frac{1}{2}|r|$,比值判别法不能用.

用 n 次根式判别法有

$$\sqrt[n]{|u_n|}=\begin{cases}\sqrt[n]{2|r^n|}=\sqrt[n]{2}\,|r|, & n\text{ 为奇数},\\ \sqrt[n]{|r^n|}=|r|, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=|r|$(因为 $\lim\limits_{n\to\infty}2^{1/n}=1$).

这样,如果 $|r|<1$,级数收敛,如果 $|r|>1$,级数发散.

因此(a)和(b)级数收敛,(c)级数发散.

23. 判别$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1\cdot4}{3\cdot6}\right)^2+\left(\frac{1\cdot4\cdot7}{3\cdot6\cdot9}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdots(3n)}\right)^2+\cdots$的敛散性.

解 ☞ 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2=1$,比值判别法失效.

再由拉阿伯判别法有

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}n\left\{1-\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2\right\}=4/3>1,$$

则级数收敛.

24. 判别级数$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right)^2+\cdots$的收敛性.

解 ☞ 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2=1$,比值判别法失效.

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left\{1-\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2\right\}=1$,

拉阿伯判别法也失效.由长除法知

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2=1-\frac{1}{n}+\frac{5-4/n}{4n^2+8n+4}=1-\frac{1}{n}+\frac{5-4/n}{4n^2+8n+4}$$

$$=1-\frac{1}{n}+\frac{c_n}{n^2},\text{其中}\ |c_n|<p,$$

则由高斯判别法知级数发散.

函数项级数

25. 问 x 取何值时下列级数收敛?

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot3^n}$,(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!}$,(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\ (x-a)^n$,(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$.

解 ☞ (a)$u_n=\frac{x^{n-1}}{n\cdot3^n}$,设 $x\neq0$(如果 $x=0$ 则级数收敛),有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{(n+1)\cdot3^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot3^n}{x^{n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+1)}\cdot|x|=\frac{|x|}{3},$$

如果$\frac{|x|}{3}<1$,则级数收敛,$\frac{|x|}{3}>1$ 时级数发散.

如果$\frac{|x|}{3}=1$,即 $x=\pm3$,该判别法失效.

当 $x=3$ 时,级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

当 $x=-3$ 时,级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n}=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$收敛.级数收敛区间为$-3\leqslant x<3$,在此区间外级数发散.

当$-3<x<3$时级数绝对收敛,当 $x=-3$ 时级数条件收敛.

(b)$u_n=\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}x^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)(2n)(2n-1)!}x^2=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+1)(2n)}=0,$$

则级数对一切 x(绝对)收敛,即(绝对)收敛区间为$-\infty<x<\infty$.

(c)$u_n=n!\ (x-a)^n$,$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\ (x-a)^{n+1}}{n!\ (x-a)^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)|x-a|$当 $x\neq a$ 时,

极限为无穷,当 $x=a$ 时级数收敛.

(d)$u_n=\frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$,$u_{n+1}=\frac{(n+1)(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(3n+2)}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(3n-1)(x-1)}{2n(3n+2)}\right| = \left|\frac{x-1}{2}\right| = \frac{|x-1|}{2},$$

则当$|x-1|<2$时级数收敛.当$|x-1|>2$时级数发散.

当$|x-1|=2$,即$x-1=\pm 2$或$x=3$和$x=-1$时,判别法失效.

当$x=3$时,级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1}$,因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}\neq 0$,级数发散.

当$x=-1$时,级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{3n-1}$,因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}\neq 0$,级数发散.

只有当$|x-1|<2$,即$-2<x-1<2$或$-1<x<3$时,级数收敛.

26. 问x取何值时,(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^n$,(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$收敛?

解☞　(a)$u_n=\frac{1}{2n-1}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^n$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}\left|\frac{x+2}{x-1}\right|=\left|\frac{x+2}{x-1}\right|$,其中$x\neq 1,-2$.

则当$\left|\frac{x+2}{x-1}\right|<1$时级数收敛,当$\left|\frac{x+2}{x-1}\right|>1$时发散,当$\left|\frac{x+2}{x-1}\right|=1$即$x=-\frac{1}{2}$时判别法失效.

当$x=1$时,级数发散.

当$x=-2$时,级数收敛.

当$x=-\frac{1}{2}$时,级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$收敛.

因而当$\left|\frac{x+2}{x-1}\right|<1$,$x=-\frac{1}{2}$和$x=-2$,即$x\leqslant-\frac{1}{2}$时级数收敛.

(b)因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$,其中$u_n=\frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$,比值判别法失效.又

$$\frac{1}{(x+n)(x+n-1)}=\frac{1}{x+n-1}-\frac{1}{x+n},$$

如果$x\neq 0,-1,-2,\cdots,-n$,则

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x+n-1}-\frac{1}{x+n}\right)$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+n}$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1/x$,当$x\neq 0,-1,-2,-3,\cdots$.

则级数对除了$x=0,-1,-2,-3,\cdots$外一切x都收敛,且和为$1/x$.

一致收敛

27. 求$(1-x)+x(1-x)+x^2(1-x)+\cdots$的收敛域.

解☞　**解法1**

前n项的和$=S_n(x)=(1-x)+x(1-x)+x^2(1-x)+\cdots+x^{n-1}(1-x)$

$$=1-x+x-x^2+x^2-x^3+\cdots+x^{n-1}-x^n$$

$$=1-x^n,$$

当$|x|<1$时,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(1-x^n)=1$;

当$|x|>1$时,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$不存在;

当$x=1$时,$S_n(x)=0$且$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0$;

当$x=-1$时,$S_n(x)=1-(-1)^n$且$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$不存在.

所以当$|x|<1$且$x=1$,即$-1<x\leqslant 1$时,级数收敛.

解法2　用比值判别法.

当$x=1$时级数收敛.当$x\neq 1$且$u_n=x^{n-1}(1-x)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}|x|$.当$|x|<1$时级数收敛;当$|x|>1$时发散.当$|x|=1$时,判别法失效.当$x=1$时级数收敛,当$x=-1$时级数发散.则当$-1<x\leqslant 1$时级数收敛.

28. 判别习题 27 中级数在下列区间上的一致收敛性：

(a) $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$；(b) $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$；(c) $-0.99\leqslant x\leqslant 0.99$；(d) $-1<x<1$；(e) $0\leqslant x<2$.

解 ☞ (a)由习题 27，$S_n(x)=1-x^n$，当 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ 时，$S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=1$，则级数在该区间上收敛. 第 n 项的余项为 $R_n(x)=S(x)-S_n(x)=1-(1-x^n)=x^n$.

如果 $\forall\varepsilon>0$，存在 N，只与 ε 有关，与 x 无关，当 $n>N$ 时有 $|R_n(x)|<\varepsilon$ 成立，则称级数在该区间上一致收敛. 而

$|R_n(x)|=|x^n|=|x|^n<\varepsilon$，当 $n\ln|x|<\ln\varepsilon$ 或 $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}$ 时，其中当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时有 $\ln|x|<0$，两边被 $\ln|x|$ 除，不等号方向改变.

但当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时，有 $\ln|x|<\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ 且 $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}>\frac{\ln\varepsilon}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}=N$，则 N 与 x 无关，级数在该区间上一致收敛.

(b)当 $|x|\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\ln|x|\leqslant\ln\left(\frac{1}{2}\right)$，$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}\geqslant\frac{\ln\varepsilon}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}=N$，则级数在 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 上也一致收敛.

(c)与上述方法类似，只要用 0.99 替换 $\frac{1}{2}$，则级数在 $-0.99\leqslant x\leqslant 0.99$ 时一致收敛.

(d)上述方法不再适用，因为当 $|x|$ 充分接近于 1 时，$\frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}$ 可以无限大，即 N 不存在，所以原级数在 $-1<x<1$ 上不一致收敛.

(e)因为级数在该区间上不处处收敛，也不一致收敛.

29. 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上讨论习题 27 中和函数 $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$ 的连续性.

解 ☞ 当 $0\leqslant x<1$ 时，$S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(1-x^n)=1$，

当 $x=1$，$S_n(x)=0$ 且 $S(x)=0$，

则 $S(x)=\begin{cases}1, & 当\ 0\leqslant x<1,\\ 0, & 当\ x=1,\end{cases}$ 即 $S(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，在 $0\leqslant x<1$ 上处处连续.

习题 34 表明如果一级数在一区间上一致收敛，则该区间上的和函数 $S(x)$ 一定连续. 即如果一区间上和函数不连续，则级数不是一致收敛的. 这个结论常被用作证明一级数(或序列)的不一致收敛性.

30. 证明 $x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\cdots$ 的一致收敛性.

证明 ☞ 设 $x\neq 0$，则级数是公比为 $1/(1+x^2)$ 的几何级数，其和为(见第三章习题 25)

$$S(x)=\frac{x^2}{1-1/(1+x^2)}=1+x^2.$$

如果 $x=0$，前 n 项和为 $S_n(0)=0$，因此 $S(0)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(0)=0$. 因为 $\lim\limits_{x\to 0}S(x)=1\neq S(0)$，所以 $S(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. 则由习题 34 知，级数在包含 $x=0$ 的任意区间上都不一致收敛，尽管任意区间上是(绝对)收敛的. 在不包括 $x=0$ 的任意区间上级数一致收敛.

也可以直接去证明(见习题 89).

魏尔斯特拉斯 M 判别法

31. 证明魏尔斯特拉斯 M 判别法，即如果 $|u_n(x)|\leqslant M_n$，$n=1,2,3,\cdots$，其中 M_n 是正常数且 $\sum M_n$ 收敛，则 $\sum u_n(x)$ 是一致(且绝对)收敛.

证明 ☞ 级数 $\sum u_n(x)$ 的第 n 项余项为 $R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots$，$|R_n(x)|=|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots|\leqslant|u_{n+1}(x)|+|u_{n+2}(x)|+\cdots\leqslant M_{n+1}+M_{n+2}+\cdots$. 因为 $\sum M_n$ 收敛，可选择 N，使得当 $n>N$ 时，$M_{n+1}+M_{n+2}+\cdots$ 小于任意的 ε. 因为 N 显然与 x 无关，当 $n>N$ 时，有 $|R_n(x)|<\varepsilon$ 则级数一致收敛. 由比较判别法知级数绝对收敛.

32. 判别一致收敛性：

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4}$，(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{3/2}}$，(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$，(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$.

解 ☞　(a) $\left|\frac{\cos nx}{n^4}\right|\leqslant\frac{1}{n^4}=M_n$，因为 $\sum M_n$ 收敛($p=4>1$ 时的 p 级数)，由 M 判别法知，对一切 x，该级数是一致(且绝对)收敛.

(b)由比值判别法，在区间 $-1\leqslant x\leqslant1$ 即 $|x|\leqslant1$ 上级数收敛.

对该区间上一切 x，$\left|\frac{x^n}{n^{3/2}}\right|=\frac{|x|^n}{n^{3/2}}\leqslant\frac{2}{n^{3/2}}$，取 $M_n=\frac{1}{n^{3/2}}$，则 $\sum M_n$ 收敛. 由 M 判别法知，当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时，所求级数一致收敛.

(c) $\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}$，$\sum M_n=\sum\frac{1}{n}$，并不收敛. 这时 M 判别法失效. 由该判别法不能判别该级数是否一致收敛.(见习题 121).

(d) $\left|\frac{1}{n^2+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$ 且 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛，则由 M 判别法知，对一切 x 所给级数一致收敛.

33. 设幂级数 $\sum a_nx^n$ 在 $x=x_0$ 处收敛，证明(a)在区间 $|x|<|x_0|$ 上绝对收敛；(b)在区间 $|x|\leqslant|x_1|$ 上一致收敛，其中 $|x_1|<|x_0|$.

证明 ☞　(a)因为 $\sum a_nx_0^n$ 收敛，$\lim_{n\to\infty}a_nx_0^n=0$，则可以使 n 充分大时有 $|a_nx_0^n|<1$ 成立，即当 $n>N$ 时，有 $|a_n|<\frac{1}{|x_0|^n}$，则

$$\sum_{N+1}^{\infty}|a_nx^n|=\sum_{N+1}^{\infty}|a_n|\cdot|x|^n<\sum_{N+1}^{\infty}\frac{|x|^n}{|x_0|^n}. \tag{1}$$

因为(1)中最后的级数当 $|x|<|x_0|$ 时收敛，由比较判别法知第一个级数收敛，即所给级数绝对收敛.

(b)设 $M_k=\frac{|x_1|^n}{|x_0|^n}$，则 $|x_1|<|x_0|$ 时 $\sum M_n$ 收敛. 如(a)一样，当 $|x|\leqslant|x_1|$ 时，$|a_nx^n|<M_n$，则由魏尔斯特拉斯 M 判别法知，$\sum a_nx^n$ 一致收敛.

则幂级数在收敛区间的任一子区间上都是一致收敛的.

一致收敛定理

34. 证明 p.207 定理 6.

证明 ☞　证 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

因为 $S(x)=S_n(x)+R_n(x)$，则 $S(x+h)=S_n(x+h)+R_n(x+h)$，

因而 $S(x+h)-S(x)=S_n(x+h)-S_n(x)+R_n(x+h)-R_n(x)$，

其中可以选择 h 使得 x 和 $x+h$ 都落在 $[a,b]$ 上(例如 $x=b$ 时，选择 $h<0$).

因为 $S_n(x)$ 是有限个连续函数的和，一定连续. 任给 $\varepsilon>0$，可以找到 δ，使得当 $|h|<\delta$ 时，有 $|S_n(x+h)-S_n(x)|<\varepsilon/3$ 成立.

由假设知级数一致收敛，可以选择 N 使得当 $n>N$ 时，$|R_n(x)|<\varepsilon/3$ 且 $|R_n(x+h)|<\varepsilon/3$，则由(1)，(2)和(3)，当 $|h|<\delta$ 时，有

$$|S(x+h)-S(x)|\leqslant|S_n(x+h)-S_n(x)|+|R_n(x+h)|+|R_n(x)|<\varepsilon,$$

连续性得证.

35. 证明 p.207 定理 7.

证明 ☞　如果函数在 $[a,b]$ 上连续，则积分存在. 因为 $S(x)$，$S_n(x)$ 和 $R_n(x)$ 是连续的，则

$$\int_a^bS(x)dx=\int_a^bS_n(x)dx+\int_a^bR_n(x)dx.$$

要证明定理，必须先证明，当 n 充分大时，

$$\left|\int_a^bS(x)dx-\int_a^bS_n(x)dx\right|=\left|\int_a^bR_n(x)dx\right|$$

可以任意地小. 因为级数的一致收敛，可选择 N 与 $[a,b]$ 上的 x 无关，使得当 $n\geqslant N$ 时，有 $|R_n(x)|<$

$\varepsilon/(b-a)$成立.则

$$\left|\int_a^b R_n(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |R_n(x)|dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon,$$

这等价于

$$\int_a^b S(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx \text{ 或} \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b \{\lim_{n\to\infty} S_n(x)\}dx.$$

36. 证明 p.208 定理 8.

证明 ☞ 设 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$,因为由假设知该级数在$[a,b]$上一致收敛,(由习题 35)可以逐项求积得

$$\int_a^x g(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u'_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\{u_n(x)-u_n(a)\}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty}u_n(a) = S(x)-S(a),$$

由假设知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上收敛到 $S(x)$.

在$\int_a^x g(x)dx = S(x)-S(a)$两边同时求导得 $g(x)=S'(x)$,定理得证.

37. 设 $S_n(x)=nxe^{-nx^2}$, $n=1,2,3,\cdots$, $0\leqslant x\leqslant 1$,

(a)判断$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} S_n(x)dx$ 是否成立;

(b)解释(a)的结论.

解 ☞ (a) $\int_0^1 S_n(x)dx = \int_0^1 nxe^{-nx^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-n})$,则

$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-e^{-n}) = \frac{1}{2}$.

$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}nxe^{-nx^2}=0$,其中 $x=0$ 或 $0<x\leqslant 1$,则$\int_0^1 S(x)dx=0$.

所以$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty}S_n(x)dx$,即极限不能拿到积分号外面.

(b)(a)的结论成立是因为尽管序列 $S_n(x)$收敛到 0,但它不一致收敛到 0.为了验证这一点,注意到函数 nxe^{-nx^2}在 $x=1/\sqrt{2n}$处有一最大值(由常用的初等微积分法则)为$\sqrt{\frac{1}{2}n}e^{-1/2}$.因此当 $n\to\infty$时,对一切 x,$S_n(x)$不能任意地小,也就不能一致收敛到 0.

38. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$,证明$\int_0^{\pi}f(x)dx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$.

证明 ☞ 因为$\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \leqslant \frac{1}{n^3}$,则由魏尔斯特拉斯 M 判别法知,对一切 x,级数都一致收敛.特别当$0\leqslant x\leqslant\pi$时,级数可以逐项求积.因而

$$\int_0^{\pi}f(x)dx = \int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n^3}dx$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n^4} = 2\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)$$
$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}.$$

39. 证明幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和相应的逐项求导后的级数 $\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$有相同的收敛半径.

证明 ☞ 设 $R>0$ 为 $\sum a_nx^n$ 的收敛半径,令 $0<|x_0|<R$,则如例 33 所示,可选择 N,当 $n>N$ 时

有$|a_n|<\frac{1}{|x_0|^n}$.

因而当$n>N$时,级数$\sum|na_nx^{n-1}|=\sum n|a_n|\cdot|x|^{n-1}$的每一项小于相应的级数$\sum n\frac{|x|^{n-1}}{|x_0|^n}$的每一项,且由比值判别法知,当$|x|<|x_0|<R$时,$\sum n\frac{|x|^{n-1}}{|x_0|^n}$收敛.

所以对一切x_0(不管$|x_0|$与R多接近),$\sum na_nx^{n-1}$绝对收敛.当$|x|>R$时,$\lim\limits_{n\to\infty}a_nx^n\neq0$,则有$\lim\limits_{n\to\infty}na_nx^{n-1}\neq0$,级数$\sum na_nx^{n-1}$不收敛.即$\sum na_nx^{n-1}$的收敛半径为$R$.

注:逐项求导后的级数当$|x|=R$时可能收敛,也可能发散.

40. 用级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\cdot3^n}$说明习题39.

解 ☞ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2\cdot3^{n+1}}\cdot\frac{n^2\cdot3^n}{x^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{3(n+1)^2}\cdot|x|=\frac{|x|}{3}$,

则当$|x|<3$时级数收敛.当$x=\pm3$时级数也收敛,即收敛区间为$-3\leqslant x\leqslant3$.

逐项求导后的级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n^2\cdot3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot3^n},$$

由习题25(a)知,收敛区间为$-3\leqslant x<3$.

这两个级数尽管收敛区间不同,但具有相同的收敛半径为$R=3$.

注:如果比值判别法可行,可用于证明习题39的结论.如果不可行,比如习题22中级数,用这里介绍的方法证明.

41. 证明幂级数在其收敛区间的任一子区间上

(a)表示为一连续函数$f(x)$;

(b)可以逐项积分得到$f(x)$的积分;

(c)可以逐项求导得到$f(x)$的导数.

证明 ☞ 考虑幂级数$\sum a_nx^n$.类似可以讨论$\sum a_n(x-a)^n$.

(a)由习题33,34知,级数的每一项a_nx^n连续.

(b)由习题33,35知,级数的每一项a_nx^n连续,因而可积.

(c)由习题39知,幂级数逐项求导后所得级数在原幂级数收敛区间上仍收敛,因而在该区间上是一致收敛的.由习题33和习题36,结论得证.

如果一幂级数在收敛区间的一个(或两个)端点处收敛,则(a)和(b)的结论中也包括端点(一个或两个).见习题42.

42. 证明阿贝尔定理,即当一幂级数在其收敛区间的一端点处收敛时,则在包含这一端点的收敛区间上一致收敛.

证明 ☞ 不失一般性设幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$在收敛区间的一端点$x=1$处收敛,则级数一定在$0\leqslant x\leqslant1$时收敛.下面证明级数在该区间上一致收敛.

设$R_n(x)=a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}+\cdots$,$R_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots$.为了证明所需要的结论,即证明对于任意$\varepsilon>0$,存在$N$,当$n>N$时有$|R_n(x)|<\varepsilon$成立,其中$N$与$0\leqslant x\leqslant1$中$x$无关.

$$\begin{aligned}\text{而 } R_n(x)&=(R_n-R_{n+1})x^n+(R_{n+1}-R_{n+2})x^{n+1}+(R_{n+2}-R_{n+3})x^{n+2}+\cdots\\&=R_nx^n+R_{n+1}(x^{n+1}-x^n)+R_{n+2}(x^{n+2}-x^{n+1})+\cdots\\&=x^n\{R_n-(1-x)(R_{n+1}+R_{n+2}x+R_{n+3}x^2+\cdots)\},\end{aligned}$$

因此当$0\leqslant x<1$时,

$$|R_n(x)|\leqslant|R_n|+(1-x)(|R_{n+1}|+|R_{n+2}|x+|R_{n+3}|x^2+\cdots).\tag{1}$$

由假设知$\sum a_k$收敛,则任给$\varepsilon>0$,存在N,当$k\geqslant N$时有$|R_k|<\varepsilon/2$成立,则当$n>N$时,由(1),

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + (1-x)\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}x + \frac{\varepsilon}{2}x^2 + \cdots\right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{2}$$

其中$(1-x)(1+x+x^2+x^3+\cdots)=1$(当$0\leqslant x<1$时).

因而当$n>N$时,其中N与$0\leqslant x\leqslant 1$上x无关,有$|R_n(x)|<\varepsilon$成立.结论得证.

其他形式的幂级数可类似证明.

43. 证明阿贝尔极限定理.(见 p.208)

证明 ☞ 如习题 42 所示,设幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$在$0\leqslant x\leqslant 1$上收敛.下面要证明$\lim_{x\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

由例 42 知,$\sum a_k x^k$在$0\leqslant x\leqslant 1$时一致收敛,再由习题 34 知当$x=1$时$\sum a_k x^k$连续,结论显然成立.

其他形式的幂级数类似可容易证明.

44. (a)证明$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$当$-1\leqslant x\leqslant 1$时一致收敛.

(b)证明$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$.

证明 ☞ (a)由第三章习题25知,当$r=-x^2$且$a=1$时,有$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$, $-1<x<1$, (1)

当$-1<x<1$时,从0到x积分,由习题33和35得

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots. \tag{2}$$

因为当$x=\pm 1$时,(2)右边级数收敛,由习题42知,这个级数在$-1\leqslant x\leqslant 1$上一致收敛,且在该区间上表示$\arctan x$.

(b)由习题43(a)有

$$\lim_{x\to 1}\arctan x = \lim_{x\to 1^-}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\right) \text{或} \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

45. 计算$\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx$的值,精确到小数点后面第3位.

解 ☞ $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3!}{3} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^5}{5!} + \cdots$, $-\infty<u<\infty$

如果$u=-x^2$, $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \cdots$,

$-\infty<x<\infty$.

因而$\frac{1-e^{-x^2}}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} - \frac{x^6}{4!} + \frac{x^8}{5!} - \cdots$.

因为级数对一切x都收敛,特别当$0\leqslant x\leqslant 1$时一致收敛,逐项积分得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx &= x - \frac{x^3}{3\cdot 2!} + \frac{x^5}{5\cdot 3!} - \frac{x^7}{7\cdot 4!} + \frac{x^9}{9\cdot 5!} - \cdots\Big|_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3\cdot 2!} + \frac{1}{5\cdot 3!} - \frac{1}{7\cdot 4!} + \frac{1}{9\cdot 5!} - \cdots \\ &= 1 - 0.16666 + 0.03333 - 0.00595 + 0.00092 - \cdots \\ &= 0.862.\end{aligned}$$

注:将交错级数的前四项求和,误差小于第五项,即小于0.001(见习题15).

杂题

46. 证明:由 p.210(16)定义的$y=J_p(x)$满足贝塞尔微分方程:$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$

证明 ☞ $J_p(x)$的级数对一切x均收敛[见习题106(a)],因为幂级数在收敛区间上可以逐项求导,对一切x有

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{p+2n}}{2^{p+2n}\cdot n!(n-p)!},$$

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(p+2n)x^{p+2n-1}}{2^{p+2n}n!(n+p)!},$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(p+2n)(p+2n-1)x^{p+2n-2}}{2^{p+2n}\cdot n!(n+p)!},$$

则$(x^2-p^2)y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{p+2n+2}}{2^{p+2n}\cdot n!\ (n+p)!}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n p^2 x^{p+2n}}{2^{p+2n}n!\ (n+p)!}$,

$$xy'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(p+2n)x^{p+2n}}{2^{p+2n}\cdot n!(n+p)!},$$

$$x^2y''=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(p+2n)(p+2n-1)x^{p+2n}}{2^{p+2n}\cdot n!(n+p)!}$$

相加,

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{p+2n+2}}{2^{p+2n}n!\ (n+p)!}+$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n[-p^2+(p+2n)(p+2n-1)]x^{p+2n}}{2^{p+2n}\cdot n!\ (n+p)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{p+2n+2}}{2^{p+2n}\cdot n!\ (n+p)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n[4n(n+p)]x^{p+2n}}{2^{p+2n}\cdot n!\ (n+p)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{p+2n}}{2^{p+2n-2}(n-1)!\ (n-1+p)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 4x^{p+2n}}{2^{p+2n}(n-1)!\ (n+p-1)!}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 4x^{p+2n}}{2^{p+2n}\cdot(n-1)!\ (n+p-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 4x^{p+2n}}{2^{p+2n}\cdot(n-1)!\ (n+p-1)!}$$

$=0$.

47. 判别复数项幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n^3\cdot 3^{n-1}}$的收敛性.

解 ☞　因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{z^n}{(n+1)^3\cdot 3^n}\cdot\frac{n^3\cdot 3^{n-1}}{z^{n-1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{3(n+1)^3}|z|=\frac{|z|}{3}$,

则当$\frac{|z|}{3}<1$即$|z|<3$时级数收敛,当$|z|>3$时发散.

当$|z|=3$,加上绝对值后级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^{n-1}}{n^3\cdot 3^{n-1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$,则当$|z|=3$时,级数是绝对收敛,因而也是收敛的.

因而级数在圆$|z|=3$的内部及圆周上都收敛.

48. 设e^x的幂级数对复数仍成立,证明$e^{ix}=\cos x+i\sin x$.

证明 ☞　设$z=ix$且$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$,有

$$e^{ix}=1+ix+\frac{i^2x^2}{2!}+\frac{i^3\cdot x^3}{3!}+\cdots=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)$$

$$=\cos x+i\sin x$$

类似地,$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$.这称之为欧拉恒等式.

49. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$存在.

证明 ☞　设例 11(1)中$f(x)=\frac{1}{x}$,有

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{M}\leqslant\ln M\leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{M-1},$$

用n替换M得

$$\frac{1}{n} \leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n \leqslant 1,$$

因而序列 $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 介于 0 和 1 之间.

考虑 $S_{n+1}-S_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$,将不等式 $\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{n}$ 两边同时对 x 从 n 到 $n+1$ 求积分得

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} \text{ 或 } \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n+1}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant 0$$

即 $S_{n+1}-S_n\leqslant 0$,则 S_n 是单调递减的.

因为 S_n 是有界且单调递减的,因而有极限.极限值用 γ 表示,等于 0.577215…称为欧拉常数.到目前为止还不知道 γ 是不是有理数.

50. 如果 $u_k>0$,且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 收敛,证明:有限积 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ 收敛.

证明 ☞ 由第四章习题 28 方程(1),当 $x>0$ 时,$1+x\leqslant e^x$,则

$$p_n=\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)=(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)\leqslant e^{u_1}\cdot e^{u_2}\cdots e^{u_n}=e^{u_1+u_2+\cdots+u_n}.$$

因为 $u_1+u_2+\cdots$ 收敛,则 p_n 是一单调递增且有界序列,极限存在,结论得证.

51. 证明级数 $1-1+1-1+\cdots$ 是 C-1 可求和到 1/2.

证明 ☞ 部分和序列为 1,0,1,0,1,0,….

则 $S_1=1,\frac{S_1+S_2}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2},\frac{S_1+S_2+S_3}{3}=\frac{1+0+1}{3}=\frac{2}{3},\cdots$

如此下去,得序列 $1,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{1}{2},\cdots$,

第 n 项为:

$$T_n=\begin{cases}1/2, & n \text{ 为偶数},\\ n/(2n-1), & n \text{ 为奇数},\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\frac{1}{2}$,结论得证.

52. (a)证明如果 $x>0$ 且 $p>0$,有

$$f(x)=\int_x^{\infty}\frac{e^{-u}}{u^p}du$$
$$=e^{-x}\left\{\frac{1}{x^p}-\frac{p}{x^{p+1}}+\frac{p(p+1)}{x^{p+2}}-\cdots(-1)^n\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{x^{p+n}}\right\}$$
$$\cdot(-1)^{n+1}p(p+1)\cdots(p+n)\int_x^{\infty}\frac{e^{-u}}{u^{p+n+1}}du.$$

(b)用(a)证明

$$f(x)=\int_x^{\infty}\frac{e^{-u}}{u^p}du\sim e^{-x}\left\{\frac{1}{x^p}-\frac{p}{x^{p+1}}+\frac{p(p+1)}{x^{p+2}}-\cdots\right\}=S(x),$$

即右边的级数为左边的函数 $f(x)$ 的渐近展开式.

证明 ☞ (a)由分部积分,有

$$I_p=\int_x^{\infty}\frac{e^{-u}}{u^p}du=\lim_{b\to\infty}\int_x^b e^{-u}u^{-p}du$$
$$=\lim_{b\to\infty}\left\{(-e^{-u})(u^{-p})\Big|_x^b-\int_x^b(-e^{-u})(-pu^{-p-1})du\right\}$$
$$=\lim_{b\to\infty}\left\{\frac{e^{-x}}{x^p}-\frac{e^{-b}}{b^p}-p\int_x^b\frac{e^{-u}}{u^{p+1}}du\right\}$$

$$= \frac{e^{-x}}{x^p} - p\int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{p+1}} du = \frac{e^{-x}}{x^p} - pI_{p+1},$$

类似地，$I_{p+1} = \frac{e^{-x}}{x^{p+1}} - (p+1)I_{p+2}$，则

$$I_p = \frac{e^{-x}}{x^p} - p\left\{\frac{e^{-x}}{x^{p+1}} - (p+1)I_{p+2}\right\}$$

$$= \frac{e^{-x}}{x^p} - \frac{pe^{-x}}{x^{p+1}} + p(p+1)I_{p+2},$$

如此下去，结论得证.

(b)设 $S_n(x) = e^{-x}\left\{\frac{1}{x^p} - \frac{p}{x^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{x^{p+2}} - \cdots (-1)^n \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{x^{p+n}}\right\}$，

则 $R_n(x) = f(x) - S_n(x) = (-1)^{n+1} p(p+1)\cdots(p+n)\int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{p+n+1}} du$，有

$$|R_n(x)| = p(p+1)\cdots(p+n)\cdot\int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{p+n+1}} du$$

$$\leqslant p(p+1)\cdots(p+n)\int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{x^{p+n+1}} du$$

$$\leqslant \frac{p(p+1)\cdots(p+n)}{x^{p+n+1}},$$

因为 $\int_x^{\infty} e^{-u} du \leqslant \int_0^{\infty} e^{-u} du = 1$，则

$$\lim_{x\to\infty} |x^n R_n(x)| \leqslant \lim_{|x|\to\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n)}{|x|^p} = 0,$$

即 $\lim_{|x|\to\infty} x^n R_n(x) = 0$，因而结论得证.

注：因为 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{p(p+1)\cdots(p+n)/x^{p+n+1}}{p(p+1)\cdots(p+n-1)/x^{p+n}}\right| = \frac{p+n}{|x|}$，对一切固定的 x 有 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \infty$，则由比值判别法知，对一切 x 级数发散.

补充习题

常数项级数的收敛与发散

53. (a)证明级数 $\frac{1}{3\cdot7} + \frac{1}{7\cdot11} + \frac{1}{11\cdot15} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ 收敛；

(b)求级数的和.

54. (a)证明一级数(a)每一项乘以一非零常数，(b)移去(或增加)有限项不改变级数的敛散性.

55. 设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 分别收敛到 A 和 B，证明 $\sum(u_n + v_n)$ 收敛到 $A+B$.

56. 证明级数 $\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \cdots = \sum\left(\frac{3}{2}\right)^n$ 发散.

57. 找错：令 $S = 1-1+1-1+1-1+\cdots$，则

$S = 1-(1-1)-(1-1)-\cdots = 1$ 且 $S = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0$，因此 $1=0$.

比较判别法和商判别法

58. 判别收敛性：

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$，(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-3}$，(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n+3}}$，(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\cdot5^n}$，(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-3}$，

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(3n+2)n^{4/3}}$.

59. 判别收敛性：(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+5n-2}{n(n^2+1)^{3/2}}$，(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n-\ln n}{n^2+10n^3}}$.

60. 建立判别级数发散的比较判别法(见 p. 204).

61. 用比较判别法证明：

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$当$p>1$收敛且$p\leqslant 1$时发散;(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n}$发散;(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$收敛.

62. 证明 p.205 商判别法中结论(b)和(c).

63. 判别收敛性:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^2}{n^2}$,(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n\arctan(1/n^3)}$,(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+\sin n}{n(1+e^{-n})}$,(d) $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\sin^2(1/n)$.

64. 设$\sum u_n$收敛,其中$n>N$有$u_n\geqslant 0$,如果$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n$存在,证明$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$.

65. (a)判别$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+1/n}}$的敛散性;(b)由 p.204 有 p 级数$\sum 1/n^p$当$p>1$时收敛与(a)的结论矛盾吗?

积分判别法

66. 判别收敛性:(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^3-1}$,(b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^3}$,(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$,(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$,(e) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$,

(f) $\sum_{n=10}^{\infty}\frac{2^{\ln(\ln n)}}{n\ln n}$.

67. 证明$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$,其中 p 为常数,(a)当$p>1$收敛;(b)当$p\leqslant 1$发散.

68. 证明$\frac{9}{8}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}$.

69. 判别$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\arctan n}}{n^2+1}$收敛性.

70. (a)证明:$\frac{2}{3}n^{3/2}+\frac{1}{3}\leqslant\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\leqslant\frac{2}{3}n^{3/2}+n^{1/2}-\frac{2}{3}$;

(b)用(a)估算$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{100}$的值,求最大误差,

(c)说明可以通过估算,提高(b)的精度,如将$\sqrt{10}+\sqrt{11}+\cdots+\sqrt{100}$和满足预先给定精度要求的$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{9}$相加.

交错级数

71. 判别收敛性:(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$,(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+2n+2}$,(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{3n-1}$,(d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\arcsin\frac{1}{n}$,

(e) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{\ln n}$.

72. (a)取级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}$的前 5 项和作为近似,最大绝对值误差是多少?

(b)问至少取几项,才能使精度达到小数点后第 3 位?

73. (a)证明:$S=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{1^3}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\cdots\right)$.

(b)问右边的级数取几项时,估算 S 时才能达到小数点后第 6 位的精度要求?

绝对和条件收敛

74. 判别绝对收敛和条件收敛:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1}$,(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{n^2+1}$,(c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$,(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^3}{(n^2+1)^{4/3}}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$,(f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n^3}{2^n-1}$.

75. 证明对一切实数 x 和 a,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi a}{n^2+x^2}$收敛.

76. 设$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$收敛到 S,证明重新排序后的级数$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots=\frac{3}{2}S$,并作出解释.

[提示:将第一个级数每一项乘以$\frac{1}{2}$后,改写为$0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+\cdots$,再与第一个级数逐项相加,如习题 96 所示,$S=\ln 2$.]

77. 将绝对收敛级数重排后和不变.

比值判别法

78. 判别收敛性：

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{(n+1)e^n}$,(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{2n}}{(2n-1)!}$,(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}$,(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{3n}}{3^{2n}}$,(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{5}-1)^n}{n^2+1}$.

79. 说明比值判别法不能用来判别级数的条件收敛.

80. 证明:(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$收敛,(b) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

各种判别法

81. 确定 p.206 n 次根式判别法的正确性.

82. 运用 n 次根式判别法计算习题 78(a),(c),(d)和(e).

83. 证明$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^5+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots$收敛.

84. 判别收敛性:(a)$\frac{1}{3}+\frac{1\cdot4}{3\cdot6}+\frac{1\cdot4\cdot7}{3\cdot6\cdot9}+\cdots$;(b)$\frac{2}{9}+\frac{2\cdot5}{9\cdot12}+\frac{2\cdot5\cdot8}{9\cdot12\cdot15}+\cdots$.

85. 如果 a,b 和 d 是正数且$b>a$,证明

$$\frac{a}{b}+\frac{a(a+d)}{b(b+d)}+\frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\cdots$$

当 $b-a>d$ 时收敛,当 $b-a\leqslant d$ 时发散.

函数项级数

86. 求下列级数的收敛域.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$,(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$,(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+x^2)^n}$,(d) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^2-n+1}$.

87. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}x^n$,当$-1\leqslant x\leqslant1$ 时收敛.

一致收敛

88. 用定义研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[1+(n-1)x][1+nx]}$一致收敛性.

[提示:将第 n 项分解成部分分式,证明部分和为 $S_n(x)=1-\frac{1}{1+nx}$]

89. 通过求 $S_n(x)$直接计算习题 30.

90. 用任意方式研究下列级数的收敛和一致收敛性:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n$,(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{2^n-1}$,(c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}$,$x\geqslant0$.

91. 设 $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$, 证明:

(a)对一切 x,$F(x)$连续;(b)$\lim_{x\to0}F(x)=0$;(c)$F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$处处连续.

92. 证明$\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos2x}{1\cdot3}+\frac{\cos4x}{3\cdot5}+\frac{\cos6x}{5\cdot7}+\cdots\right)dx=0$.

93. 证明 $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sinh n\pi}$对任意实数 x 有任意阶导数.

94. 判别序列 $u_n(x)=\frac{1}{1+x^{2n}}$,$n=1,2,3,\cdots$是否一致收敛.

95. 证明$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{(1+x/n)^n}=1-e^{-1}$.

幂级数

96. (a)证明 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$;

(b)证明 $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$.

[提示:用$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$,求积分.]

97. 证明 $\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots,-1\leqslant x\leqslant 1$.

98. 计算:(a) $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx$;(b) $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x}dx$ 到小数点后第3位,说明每一步的理由.

99. 计算:(a)sin40°,(b)cos65°,(c)tan12°精确到小数点后第3位.

100. 证明 p.209~p.210 展开式 4,5 和 6.

101. 将 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的级数相乘,证明 $2\sin x\cos x=\sin 2x$.

102. 证明 $e^{\cos x}=e\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{4x^4}{4!}+\frac{31x^6}{6!}+\cdots\right),-\infty<x<\infty$.

103. 证明展开式

(a)$\operatorname{artanh}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots,-1<x<1$;

(b)$\ln(x+\sqrt{x^2+1})=x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots,-1\leqslant x\leqslant 1$

104. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 证明相应于 $f(x)$ 的形式泰勒级数在 $x=0$ 处存在,但 $x\neq 0$ 时不收敛到给定的函数 $f(x)$.

[提示:见第四章习题 38].

105. 证明(a)$\frac{\ln(1+x)}{1+x}=x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\cdots$当$-1<x<1$;

(b)$\{\ln(1+x)\}^2=x^2-\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{2x^3}{3}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{2x^4}{4}-\cdots$当$-1<x\leqslant 1$.

杂题

106. 证明 $J_p(x)$的级数(a)对一切 x 收敛;(b)在任意有限区间上绝对且一致收敛.

107. 证明:(a)$\frac{d}{dx}\{J_0(x)\}=-J_1(x)$;(b)$\frac{d}{dx}\{x^pJ_p(x)\}=x^pJ_{p-1}(x)$;(c)$J_{p+1}(x)=\frac{2p}{x}J_p(x)-J_{p-1}(x)$.

108. 设习题 107(c)结论对 $p=0,-1,-2,\cdots$成立,证明:

(a)$J_{-1}(x)=-J_1(x)$;(b)$J_{-2}(x)=J_2(x)$;(c)$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x),n=1,2,3,\cdots$.

109. 证明:$e^{1/2x(t-1/t)}=\sum_{p=-\infty}^{\infty}J_p(x)\cdot t^p$.

[提示:将左边改写为:$e^{xt/2}\cdot e^{-x/2t}$,用习题 108 展开].

110. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)z^n}{n(n+2)^2}$在圆$|z|=1$内部及圆周上是绝对且一致收敛的.

111. (a)设 $R>0$.在公共收敛区域$|x|<R$上,对一切 x 有 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$,证明 $a_n=b_n$,$n=0,1,2,\cdots$;(b)用(a)证明如果-函数的泰勒展开式存在,则展开式惟一.

112. 设$\overline{\lim}\sqrt[n]{|u_n|}=L$,证明当 $L<1$ 时,$\sum u_n$ 收敛;当 $L>1$ 时$\sum u_n$ 发散;如果 $L=1$ 判别法失效.

113. 证明级数 $\sum a_nx^n$ 的收敛半径可由下列极限确定(当极限存在时),并举例说明:

(a)$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$;(b)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$;(c)$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

114. 用习题 113 求习题 22 中级数的收敛半径.

115. (a)证明级数 $\sum u_n$ 收敛的充分必要条件是任给 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,与 ε 相关,当 $p>N$ 和 $q>N$ 时,有 $|S_p-S_q|<\varepsilon$ 成立,其中 $S_k=u_1+u_2+\cdots+u_k$;(b)用(a)证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)3^n}$ 收敛;(c)用(a)证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

[提示:用 p.41 柯西收敛准则.]

116. 证明超几何级数(p.210)(a)当$|x|<1$时绝对收敛;(b)当$|x|>1$时发散;(c)当$|x|=1$且$a+b-c>0$时绝对收敛;(d)满足微分方程$x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0$.

117. 设$F(a,b;c;x)$是由 p.210 中级数定义的超几何函数,证明:

(a)$F(-p,1;1;-x)=(1+x)^p$;(b)$xF(1,1;2;-x)=\ln(1+x)$;(c)$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^2\right)=(\arcsin x)/x$.

118. 求级数和$S(x)=x+\frac{x^3}{1\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots$.

[提示:证明$S'(x)=1+xS(x)$,解方程.]

119. 证明:

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots=\sqrt{e}\left(1-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2^2\cdot 2!\cdot 5}-\frac{1}{2^3\cdot 3!\cdot 7}+\frac{1}{2^4\cdot 4!\cdot 9}-\cdots\right).$$

120. 证明 p.207 狄利克雷判别法.

121. 证明:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$在不包括$0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots$的任意区间上一致收敛.

[提示:用第一章习题 94 和 p.207 狄利克雷判别法.]

122. 证明 p.210 关于二项级数的结论.

[提示:用泰勒定理检验拉格朗日和柯西形式的余项].

123. 证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$对一切$x$一致收敛,但不绝对收敛.

124. 证明$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\ln 2$.

125. 设$x=ye^y$,证明:$y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n^{n-1}}{n!}x^n$,其中$-1/e<x\leqslant 1/e$.

126. 证明方程$e^{-\lambda}=\lambda-1$有惟一实根,且由下式确定:$\lambda=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^{n-1}e^{-n}}{n!}$.

127. 设$\frac{x}{e^x-1}=1+B_1x+\frac{B_2x^2}{2!}+\frac{B_3x^3}{3!}+\cdots$,(a)证明数$B_n$,称为伯努利数,满足递推公式$(B+1)^n-B^n=0$,其中$B^k$是展开后形式地用$B_k$代替.(b)用(a)或其他方法,确定$B_1,\cdots,B_6$.

128. (a)证明$\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{2}\left(\coth\frac{x}{2}-1\right)$;(b)当$k=1,2,3,\cdots$时用习题 127 及(a)证明$B_{2k+1}=0$.

129. 推导下列级数展开式:

(a)$\coth x=\frac{1}{x}+\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+\cdots+\frac{B_{2n}(2x)^{2n}}{(2n)!\,x}+\cdots$,

(b)$\cot x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+\cdots+(-1)^n\frac{B_{2n}(2x)^{2n}}{(2n)!\,x}+\cdots$,

(c)$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2(2^{2n}-1)B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!}+\cdots$,

(d)$\csc x=\frac{1}{x}+\frac{x}{6}+\frac{7}{360}x^3+\cdots(-1)^{n-1}\frac{2(2^{2n-1}-1)B_{2n}x^{2n-1}}{(2n)!}+\cdots$.

[提示:对(a)用习题 128,对(b)将(a)中x替换为ix,对(c)用$\tan x=\cot x-2\cot 2x$,对(d)用$\csc x=\cot x+\tan x/2$.]

130. 证明$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$收敛.

131. 用定义证明$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$发散.

132. 证明$\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n)$,当$0<u_n<1$收敛当且仅当$\sum u_n$收敛.

133. (a)证明$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$收敛到$\frac{1}{2}$;(b)计算(a)中无穷积到小数后第 2 位,并与真值作比较.

134. 证明级数$1+0-1+1+0-1+1+0-1+\cdots$时 C-1 可求和到零.

135. 证明可求和 Césaro 方法是正则的.

[提示:见第三章习题 28.]

136. 当 $|x|<1$ 时,证明级数 $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$ 收敛到 $1/(1-x)^2$.

137. 如果 $S=\lim\limits_{x\to1^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_nx^n$ 存在,称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 为阿贝尔可求和到 S.

证明:(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)$ 是阿贝尔可求和到 1/4.

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2}$ 是阿贝尔可求和到 1/8.

138. 证明二重级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(m^2+n^2)^p}$,其中 p 为常数,当 $p>1$ 或 $p\leqslant1$ 时分别收敛或发散.

139. (a)证明 $\int_x^{\infty}\dfrac{e^{x-u}}{u}du=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+$

$\dfrac{2!}{x^3}-\dfrac{3!}{x^4}+\cdots\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}+(-1)^nn!\int_x^{\infty}\dfrac{e^{x-u}}{u^{n+1}}du$.

(b)用(a)证明 $\int_x^{\infty}\dfrac{e^{x-u}}{u}du\sim\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2!}{x^3}-\dfrac{3!}{x^4}+\cdots$.

140. 证明:

$$\int_x^{\infty}\frac{\sin u}{u}du\sim\frac{\cos x}{x}\left(1-\frac{2!}{x^2}+\frac{4!}{x^4}-\cdots\right)+\frac{\sin x}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{3!}{x^3}+\frac{5!}{x^5}-\cdots\right),$$

$$\int_x^{\infty}\frac{\cos u}{u}du\sim\frac{\cos x}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{3!}{x^3}+\frac{5!}{x^5}-\cdots\right)-\frac{\sin x}{x}\left(1-\frac{2!}{x^2}+\frac{4!}{x^4}-\cdots\right).$$

141. 设 $f(x)$ 的渐近展开式为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nx^{-n}$,证明 $\int_x^{\infty}f(x)dx$ 有渐近展开式 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_nx^{1-n}}{n-1}$.

第十二章　广义积分

广义积分的定义

积分$\int_a^b f(x)dx$ 称为是广义积分，当

(1) $a=-\infty$ 或 $a=\infty$ 或 a,b 都为 ∞，即一个或两个积分限是无穷.

(2) $f(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一点或几点处无界. 这些点称为是 $f(x)$ 的奇点.

对应于(1) 和(2) 的积分分别称为是第一类和第二类广义积分. 同时满足条件(1) 和(2) 的积分称为第三类广义积分.

例 1：$\int_0^\infty \sin x^2 dx$ 是第一类广义积分.

例 2：$\int_0^4 \frac{dx}{x-3}$ 是第二类广义积分.

例 3：$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ 是第三类广义积分.

例 4：因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，所以$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ 是正常积分.

本章我们阐述广义积分敛散的判别法. 这些判别法相关定理的证明类似于无穷级数的敛散性的判别及相关的定理.（见第十一章）.

第一类广义积分

设 $f(x)$ 在每个有限区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有界且可积，则定义

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx, \tag{1}$$

如果右侧极限存在，则称左侧积分是收敛的；如果极限不存在，则称为发散. 注：$\int_a^\infty f(x)dx$ 类似于无穷级数$\sum\limits_{n=1}^\infty u_n$，其中 $u_n=f(n)$，而$\int_a^b f(x)dx$ 对应于无穷级数的部分和. 在(1) 中我们经常用 M 代替 b.

类似地，我们定义

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx, \tag{2}$$

可按右侧极限存在与否判断左侧积分的敛散性.

例 1：$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1$，则$\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}$ 收敛到 1.

例 2：$\int_{-\infty}^u \cos x dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^u\cos x dx=\lim\limits_{a\to-\infty}(\sin u-\sin a)$，因为该极限不存在，则$\int_{-\infty}^u\cos x dx$ 发散.

同样，我们定义

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx=\int_{-\infty}^{x_0}f(x)dx+\int_{x_0}^\infty f(x)dx, \tag{3}$$

其中 x_0 是实数，如定义(1) 和(2) 一样，按照右侧积分敛散性判断左侧积分敛散性.

第一类特殊广义积分

1. 几何或指数积分 $\int_a^{\infty} e^{-tx}dx$,其中 t 为常数,当 $t>0$ 时收敛,当 $t\leqslant 0$ 时发散.注:当 $r=e^{-t}$,$e^{-tx}=r^x$ 时类似于几何级数.

2. 第一类 p 积分 $\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^p}$,其中 p 是一常数且 $a>0$,当 $p>1$ 时收敛且 $p\leqslant 1$ 时发散.与 p 级数作比较.

第一类广义积分收敛判别法

以下判别法针对积分限为 ∞ 时给出.类似地当积分限为 $-\infty$ 时,判别法也存在(作变量代换 $x=-y$,使积分限变为 ∞),除了专门说明,我们都假设 $f(x)$ 在第一个有限区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续,因而是可积的.

1. 比较判别法适用于被积函数是非负的积分.

(a) 收敛性.设当 $x\geqslant a$ 时,$g(x)\geqslant 0$ 且 $\int_a^{\infty}g(x)dx$ 收敛,则当 $x\geqslant a$ 时,$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,有 $\int_a^{\infty}f(x)dx$ 也收敛.

例:因为 $\frac{1}{e^x+1}\leqslant\frac{1}{e^x}$ 且 $\int_0^{\infty}e^{-x}dx$ 收敛,$\int_0^{\infty}\frac{dx}{e^x+1}$ 也收敛.

(b) 发散性.设当 $x\geqslant a$ 时,$g(x)\geqslant 0$ 且 $\int_a^{\infty}g(x)dx$ 发散,则当 $x\geqslant a$ 时,若 $f(x)\geqslant g(x)$,有 $\int_a^{\infty}f(x)dx$ 也发散.

例:因为 $\frac{1}{\ln x}>\frac{1}{x}$,当 $x\geqslant 2$ 时且 $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x}$ 发散($p=1$ 时 p 积分).$\int_2^{\infty}\frac{dx}{\ln x}$ 也发散.

2. 商判别法适用于被积表达式是非负函数的积分.

(a) 设 $f(x)\geqslant 0$ 且 $g(x)\geqslant 0$,则如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$ 或 ∞,则 $\int_a^{\infty}f(x)dx$ 和 $\int_a^{\infty}g(x)dx$ 同敛散.

(b) 如果(a) 中 $A=0$ 且 $\int_a^{\infty}g(x)dx$ 收敛,则 $\int_a^{\infty}f(x)dx$ 收敛.

(c) 如果(a) 中 $A=\infty$ 且 $\int_a^{\infty}g(x)dx$ 发散,则 $\int_a^{\infty}f(x)dx$ 发散.

该判别法与比较判别法相关,是比较判别法的一种有效的替换.特别地,令 $g(x)=1/x^p$,由已知 p 积分性质,有

定理 1　设 $\lim\limits_{x\to\infty}x^pf(x)=A$,则

(i) $\int_a^{\infty}f(x)dx$ 当 $p>1$ 收敛且 A 是有限值.

(ii) $\int_a^{\infty}f(x)dx$ 当 $p\leqslant 1$ 且 $A\neq 0$(A 可能为 ∞) 时发散.

例 1:$\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{4x^4+25}$,因为 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\frac{x^2}{4x^4+25}=\frac{1}{4}$,所以收敛.

例 2:$\int_0^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$,因为 $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}=1$,所以发散.

用 $g(x)=e^{-tx}$ 可得到类似的判别法.

3. 级数判别法适用于被积表达式为非负函数的积分,按照 $\sum u_n$(其中 $u_n=f(n)$) 的收

敛与发散，判别$\int_a^{\infty} f(x)dx$ 收敛与发散.

4. 绝对收敛和条件收敛. 如果$\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ 收敛，则称$\int_a^{\infty} f(x)dx$ 绝对收敛. 如果$\int_a^{\infty} f(x)dx$，收敛但$\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ 发散，则称$\int_a^{\infty} f(x)dx$ 为条件收敛.

定理 2　设$\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ 收敛，则$\int_a^{\infty} f(x)dx$ 收敛. 即绝对收敛积分必收敛.

例 1: $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx$，因为$\int_0^{\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2+1}\right| dx \leqslant \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ 且$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ 收敛，所以原积分绝对收敛，因而也收敛.

例 2: $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ 收敛(见习题 11)，但$\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|$ 不收敛，则$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ 是条件收敛的.

所有用于判别积分表达式是非负函数的积分敛散性的判别法，同样适用于判别绝对收敛.

第二类广义积分

设 $f(x)$ 在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 的端点 $x = a$ 处无界，则定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \tag{4}$$

如果(4) 右侧极限存在，则称左侧积分收敛，否则称为发散.

类似地，如果 $f(x)$ 在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 的端点 $x = b$ 处无界，则定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{5}$$

按照右侧极限存在与否判别(5) 中左侧积分敛散性.

如果 $f(x)$ 在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 内一点 $x = x_0$ 处无界，则定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{x_0-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{x_0+\varepsilon_2}^b f(x)dx. \tag{6}$$

按照右侧极限存在与否判别(6) 中左侧积分敛散性.

如果 $f(x)$ 在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上有两点或更多的点处无界，可类似定义.

柯西主值

当 ε_1 和 ε_2 分别趋于零时，(6) 右侧极限有可能不存在. 这种情况下，选择(6) 中 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$，即为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)dx\right\}. \tag{7}$$

如果(7) 右侧极限存在，则称此极限值为左侧积分的柯西主值. 见习题 14.

第二类特殊广义积分

1. $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$，当 $p < 1$ 时收敛且 $p \geqslant 1$ 时发散，
2. $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$，当 $p < 1$ 时收敛且 $p \geqslant 1$ 时发散.

这称为是第二类 p 积分. 注：当 $p \leqslant 0$ 时为正常积分.

第二类广义积分收敛性判别

以下判别法是针对 $f(x)$ 仅在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 端点 $x = a$ 处无界情况给出的. 如果 $f(x)$

在 $x = b$ 处或 $x = x_0(a < x_0 < b)$ 处无界时，有类似的判别法.

1. 比较判别法适用于被积式为非负函数的积分.

(a) 收敛性. 设 $a < x \leqslant b$ 时 $g(x) \geqslant 0$ 且 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛，则当 $a < x \leqslant b$ 时，如果 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，有 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛.

例：$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} < \frac{1}{\sqrt{x-1}}(x > 1$ 时)，因为 $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ 收敛($a = 1, p = \frac{1}{2}$ 的 p 积分)，则 $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ 也收敛.

(b) 发散性. 设 $a < x \leqslant b$ 时，$g(x) \geqslant 0$ 且 $\int_a^b g(x)dx$ 发散，则当 $a < x \leqslant b$ 时，如果 $f(x) \geqslant g(x)$，有 $\int_a^b f(x)dx$ 也发散.

例：$\frac{\ln x}{(x-3)^4} > \frac{1}{(x-3)^4}(x > 3$ 时)，因为 $\int_3^6 \frac{dx}{(x-3)^4}$ 发散($a = 1, p = 4$ 的 p 积分)，则 $\int_3^6 \frac{\ln x}{(x-3)^4}dx$ 也发散.

2. 商判别法适用于被积式为非负函数的积分.

(a) 当 $a < x \leqslant b$ 时，设 $f(x) \geqslant 0$ 且 $g(x) \geqslant 0$，如果 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$. 或 ∞，则 $\int_a^b f(x)dx$ 和 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛散.

(b) 如果(a) 中 $A = 0$ 且 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

(c) 如果(a) 中 $A = \infty$ 且 $\int_a^b g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

该判别法与比较判别法相关，是一种非常有效的替换方法. 特别地，取 $g(x) = 1/(x-a)^p$，由已知 p 积分性质有：

定理 3 设 $\lim\limits_{x \to a^+} (x-a)^p f(x) = A$，则

(i) $\int_a^b f(x)dx$，当 $p < 1$ 时收敛且 A 是有限值，

(ii) $\int_a^b f(x)dx$，当 $p \geqslant 1$ 且 $A \neq 0$(A 可能为 ∞) 时发散.

如果 $f(x)$ 在积分上限处无界，上述条件变为：

定理 4 设 $\lim\limits_{x \to b} (b-x)^p f(x) = B$，则

(i) $\int_a^b f(x)dx$ 当 $p < 1$ 时收敛且 B 是有限值.

(ii) $\int_a^b f(x)dx$ 当 $p \geqslant 1$ 时 $B \neq 0$(B 可能为 ∞) 时发散.

例 1: $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$，因为 $\lim\limits_{x \to 1^+} (x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(x^4-1)^{\frac{1}{2}}} = \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{x^4-1}} = \frac{1}{2}$，所以收敛.

例 2: $\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$，因为 $\lim\limits_{x \to 3} (3-x)\frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$，所以发散.

3. 绝对和条件收敛. 如果 $\int_a^b |f(x)| dx$ 收敛，则称 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛. 如果 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛但 $\int_a^b |f(x)| dx$ 发散，则称 $\int_a^b f(x)dx$ 条件收敛.

定理 5　设$\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛,则$\int_a^b f(x)dx$ 收敛.即绝对收敛积分必收敛.

例:因为$\left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}$ 且$\int_\pi^{4\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-\pi}}$ 收敛($a=\pi, p=\frac{1}{3}$ 的 p 级数)则$\int_\pi^{4\pi}\left|\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right|dx$ 收敛.因而$\int_\pi^{4\pi}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x-\pi}}dx$ 绝对收敛.

任何用于判别被积函数为非负函数积分敛散性的判别法都可用于判别绝对收敛.

第三类广义积分

第三类广义积分可以表示为第一和第二类广义积分.因此它们的敛散性可用以上已给的方法判别.

带参数的广义积分,一致收敛

设
$$\phi(\alpha) = \int_a^\infty f(x,\alpha)dx, \tag{8}$$
该积分类似于函数项级数,同理可引入积分一致收敛的概念,寻求 $\phi(\alpha)$ 在什么条件下关于 α 可以求导和积分.

假设积分(8)在 $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$(简记为$[\alpha_1,\alpha_2]$)上收敛.

定义

积分(8)称为在$[\alpha_1,\alpha_2]$上一致收敛,如果任给 $\varepsilon>0$,存在 N 与ε 相关,与 α 无关,使得对一切 $U>N$ 和 $\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]$,有 $\left|\phi(\alpha)-\int_a^u f(x,\alpha)dx\right|<\varepsilon$ 成立。也可以描述为 $\left|\phi(\alpha)-\int_a^u f(x,\alpha)dx\right| = \left|\int_u^\infty f(x,\alpha)dx\right|$,类似于无穷级数第 N 项余项的绝对值.

上述一致收敛的定义和性质是按照第一类广义积分来建立的.关于第二类和第三类广义积分可得到类似的结论.

积分一致收敛的特殊判别法

1.魏尔斯特拉斯 M 判别法. 设函数 $M(x)\geqslant 0$ 满足

(a) $|f(x,\alpha)|\leqslant M(x), \alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2, x>a$,

(b) $\int_a^{\infty} M(x)dx$ 收敛,

则$\int_a^\infty f(x,\alpha)dx$ 在$\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2$ 上一致且绝对收敛.

例:因为$\left|\frac{\cos\alpha x}{x^2+1}\right|\leqslant\frac{1}{x^2+1}$ 且$\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+1}$ 收敛,则$\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x}{x^2+1}dx$ 对一切实数值α 一致且绝对收敛.

和无穷级数一样,积分可能一致收敛但不是绝对收敛,反之亦然.

2.狄利克雷判别法. 设

(a) $\psi(x)$ 是 E 的单调递增函数且 $x\to\infty$ 时收敛到零.

(b) $\left|\int_a^u f(x,\alpha)dx\right|<p$ 对一切$u>a$ 且$\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2$ 成立,则积分$\int_a^\infty f(x,\alpha)\psi(x)dx$ 在$\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2$ 上一致收敛.

积分一致收敛定理

定理 6　设 $f(x,\alpha)$ 当 $x\geqslant a$ 且$\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2$ 时连续.如果当 $\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2$ 时$\int_a^\infty f(x,\alpha)dx$

一致收敛,则 $\phi(\alpha)=\int_a^\infty f(x,\alpha)dx$ 在 $\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2$ 上连续. 特别地,如果 α_0 是 $\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2$ 上任一点,记为

$$\lim_{\alpha\to\infty}\phi(\alpha)\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_a^\infty f(x,\alpha)dx - \int_a^\infty \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)dx. \tag{9}$$

如果 α_0 是区间的两端点之一,就取右极限或左极限.

定理 7　在定理 6 的条件下,对 $\phi(\alpha)$ 关于 α 从 α_1 到 α_2 积分,得

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\phi(\alpha)d\alpha=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left\{\int_a^\infty f(x,\alpha)dx\right\}d\alpha=\int_a^\infty\left\{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)d\alpha\right\}dx, \tag{10}$$

改变了积分次序.

定理 8　设 $f(x)$ 当 $x\geqslant a$ 且 $\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2$ 时连续,关于 α 有连续偏导数,如果 $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial\alpha}dx$ 当 $\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2$ 时一致收敛,则当 a 不依赖于 α 时,有

$$\frac{d\phi}{d\alpha}=\int_a^\infty\frac{\partial f}{\partial\alpha}dx. \tag{11}$$

如果 a 依赖于 α,结论可以稍作修改.(见 p.148 莱布尼茨法则).

定积分计算

计算广义定积分有许多方法. 一种有效的方法是在积分中适当地引入参数,对这个参数求导或积分,再用上述一致收敛的性质.

拉普拉斯变换

函数 $F(x)$ 的拉普拉斯变换定义为

$$F(s)=\mathscr{L}\{F(x)\}=\int_0^\infty e^{-sx}F(x)dx, \tag{12}$$

取 t 取代 e^{-s} 得 $e^{-sx}=t^x$,类似于幂级数. 许多幂级数的性质可以用于拉普拉斯变换. 下面的关于拉普拉斯变换的简表非常有用. 其中 a 是常数.

$F(x)$	$\mathscr{L}\{F(x)\}$	
a	$\frac{a}{s}$	$s>0$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$
$\sin ax$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s>0$
$\cos ax$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s>0$
$x^n n=1,2,3,\cdots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$
$Y'(x)$	$s\mathscr{L}\{Y(x)\}-Y(0)$	
$Y''(x)$	$s^2\mathscr{L}\{Y(x)\}-sY(0)-Y'(0)$	

拉普拉斯变换可用于解微分方程(见习题 34 ~ 36).

广义重积分

广义单重积分的定义和结论可以推广到广义多重积分.

习题与解答

广义积分

1. 确定下列广义积分的类型：

$$(a)\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x+1)},\ (b)\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+\tan x},\ (c)\int_{3}^{10}\frac{xdx}{(x-2)^2},\ (d)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{x^4+x^2+1},$$

$$(e)\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos x}{x^2}dx.$$

解 ☞ (a) 第二类(被积表达式在 $x=0$ 和 $x=-1$ 处无界).

(b) 第三类(积分限为 ∞ 且被积表达式在 $\tan x=-1$ 时无界).

(c) 这是一正常积分(在 $x=2$ 时被积函数无界,但超出了积分范围 $3\leqslant x\leqslant 10$).

(d) 第一类(积分限是无穷但被积函数有界).

(e) 这是一正常积分(由洛必达法则知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$).

2. 将第二类广义积分 $\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$ 变换为(a) 第一类广义积分,(b) 正常积分.

解 ☞ (a) 考虑 $\int_{1}^{2-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$,其中 $0<\varepsilon<1$. 令 $2-x=\frac{1}{y}$,则积分变为 $\int_{1}^{1/\varepsilon}\frac{dy}{y\sqrt{2y-1}}$,当 $\varepsilon\to 0^+$ 时,原积分等价于 $\int_{1}^{\infty}\frac{dy}{y\sqrt{2y-1}}$ 是第一类广义积分.

(b) 令 $2-x=v^2$,则积分(a) 变为 $2\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{1}\frac{dv}{\sqrt{v^2+2}}$,则考虑 $2\int_{0}^{1}\frac{dv}{\sqrt{v^2+2}}$,是一正常积分.

由上可知第一类广义积分可以变换为第二类广义积分,反之亦然(实际上可以实现).

同样广义积分也可以变换为一正常积分(这有时可以实现.)

第一类广义积分

3. 证明判别第一类广义积分收敛的比较判别法(p.234).

证明 ☞ 因为当 $x\geqslant a$ 时,$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,用 p.74 性质 7 得:

$$0\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx\leqslant\int_a^{\infty}g(x)dx.$$

由假设知上一积分存在,因而 $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)$ 存在,因此 $\int_a^{\infty}f(x)dx$ 收敛.

4. 证明 p.234 商判别法(a).

证明 ☞ 由假设知: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A>0$,任给 $\varepsilon>0$,存在 N,使得当 $x\geqslant N$ 时,有 $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|<\varepsilon$ 成立. 因而当 $x\geqslant N$ 时有

$$A-\varepsilon\leqslant\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant A+\varepsilon\text{ 或}(A-\varepsilon)g(x)\leqslant f(x)\leqslant(A+\varepsilon)g(x).$$

则 $(A-\varepsilon)\int_N^b g(x)dx\leqslant\int_N^b f(x)dx\leqslant(A+\varepsilon)\int_N^b g(x)dx.$

不失一般性,设 $A-\varepsilon>0$

如果 $\int_a^{\infty}g(x)dx$ 收敛,则由(1) 右边不等式,

$\lim\limits_{b\to\infty}\int_N^b f(x)dx$ 存在,则 $\int_a^{\infty}f(x)dx$ 收敛.

如果 $\int_a^{\infty}g(x)dx$ 发散,则由(1) 左边不等式

$\lim\limits_{b\to\infty}\int_N^b f(x)dx = \infty$，则$\int_a^\infty f(x)dx$ 发散.

如果 $A = 0$ 和 $A = \infty$ 时，见习题 41.

由以上两个例子可以发现在证明无穷级数和广义积分时有明显相似之处.

5. 判别收敛性：

$$(a)\int_1^\infty \frac{xdx}{3x^4+5x^2+1},(b)\int_2^\infty \frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}dx.$$

解 ☞　(a) **解法 1**　当 x 充分大时，被积函数近似为 $x/3x^4 = 1/3x^3$ 因为 $\frac{x}{3x^4+5x^2+1}\leqslant\frac{1}{3x^3}$ 且 $\frac{1}{3}\int_1^\infty\frac{dx}{x^3}$ 收敛（$p = 3$ 的 p 级数）. 由比较判别法知 $\int_1^\infty\frac{xdx}{3x^4+5x^2+1}$ 收敛.

注：让 x 充分大的目的是为了得到一合适的可用于比较的积分.

解法 2　设 $f(x) = \frac{x}{3x + 5x^2 + 1}$，$g(x) = \frac{1}{x^3}$，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3}$ 且 $\int_1^\infty g(x)dx$ 收敛，由商判别法知 $\int_1^\infty f(x)dx$ 也收敛.

注：这里用于比较的函数 $g(x)$，舍弃了因子 $\frac{1}{3}$. 如前一种方法所示，因子 $\frac{1}{3}$ 也可以包含在比较函数中.

解法 3　$\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(\frac{x}{3x + 5x^2+1}\right) = \frac{1}{3}$，因此由 p.234 定理 1，原积分收敛.

(b) **解法 1**　当 x 充分大时，被积函数近似为 $x^2/\sqrt{x^6} = 1/x$

当 $x\geqslant 2$，$\frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$. 因为 $\frac{1}{2}\int_2^\infty\frac{dx}{x}$ 发散，

$\int_2^\infty\frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}dx$ 也发散.

解法 2　设 $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}$，$g(x) = \frac{1}{x}$，则因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 且 $\int_2^\infty g(x)dx$ 发散，则 $\int_2^\infty f(x)dx$ 也发散.

解法 3　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}\right) = 1$，由 p.234 定理 1 知原积分发散.

注：解法 1 中要用比较判别法，需要有一不等式因子（本例为 $\frac{1}{2}$ 或小于 $\frac{1}{2}$ 的常数），而解法 2 和解法 3 却不需要有这样的因子.

6. 证明 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ 收敛.

证明 ☞　$\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x^2} = 0$（由洛必达法则或其他），则由定理 1，且 $A = 0$，$p = 2$，原积分收敛. 与第十一章习题 10(a) 作比较.

7. 判别收敛性：

$$(a)\int_1^\infty\frac{\ln x}{x+a}dx，其中 a 是一正常数；(b)\int_0^\infty\frac{1-\cos x}{x^2}dx$$

解 ☞　(a) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{\ln x}{x+a} = \infty$，由 p.234 定理 1 且 $A = \infty$，$p = 1$ 原积分发散.

(b) $\int_0^\infty\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \int_0^\pi\frac{1-\cos x}{x^2}dx + \int_\pi^\infty\frac{1-\cos x}{x^2}dx$，

右侧第一个积分收敛[见习题 1(e)].

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{3/2}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = 0$. 由 p.234 定理 1 知右侧第二个积分收敛且 $A = 0$，p = 3/2，因而原积分收敛.

8. 判别收敛性：

$$(a)\int_{-\infty}^{-1}\frac{e^x}{x}dx,(b)\int_{-\infty}^\infty\frac{x^3+x^2}{x^6+1}dx.$$

解 ☞　(a) 设 $x = -y$，则积分变为 $-\int_1^\infty\frac{e^{-y}}{y}dy$.

解法 1　$\frac{e^{-y}}{y}\leqslant e^{-y}$，当 $y\geqslant 1$. 则因为 $\int_1^{\infty}e^{-y}dy$ 收敛，$\int_1^{\infty}\frac{e^{-y}}{y}dy$ 收敛，因此原积分收敛.

解法 2　$\lim\limits_{y\to\infty}y^2\left(\frac{e^{-y}}{y}\right)=\lim\limits_{y\to\infty}ye^{-y}=0$，则由 p.254 定理 1，$A=0$ 且 $p=2$，所以原积分收敛.

(b) 将原积分改写为 $\int_{-\infty}^{0}\frac{x^3+x^2}{x^6+1}dx+\int_0^{\infty}\frac{x^3+x^2}{x^6+1}dx$. 在第一项积分中令 $x=-y$，则积分变为 $-\int_0^{\infty}\frac{y^3-y^2}{y^6+1}dy$. 因为 $\lim\limits_{y\to\infty}y^3\left(\frac{y^3-y^2}{y^6+1}\right)=1$，该积分收敛.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(\frac{x^3+x^2}{x^6+1}\right)=1$，第二个积分收敛，因而原积分收敛.

第一类广义积分的绝对和条件收敛

9. 设 $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$ 收敛，证明 $\int_a^{\infty}f(x)dx$ 收敛. 即一绝对收敛积分必收敛.

证明 ☞　$\because -|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant f(x)$ 即 $0\leqslant f(x)+|f(x)|\leqslant 2|f(x)|$，则

$$0\leqslant\int_a^b[f(x)+|f(x)|]dx\leqslant 2\int_a^b|f(x)|dx.$$

如果 $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则 $\int_a^{\infty}[f(x)+|f(x)|]dx$ 收敛. 因此减去收敛积分 $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$，得 $\int_a^{\infty}f(x)dx$ 收敛.

10. 证明 $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ 收敛.

解 ☞　**解法 1**

当 $x\geqslant 1$，$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\leqslant\frac{1}{x^2}$，则由比较判别法，因为 $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ 收敛，则 $\int_1^{\infty}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx$ 收敛，即由习题 9 得 $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ 绝对收敛，也收敛.

解法 2

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{3/2}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{\cos x}{x^{1/2}}\right|=0$，则由 p.234 定理 1 及 $A=0$ 且 $p=3/2$，知 $\int_1^{\infty}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx$ 收敛，因而 $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$（绝对）收敛.

11. 证明 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛.

证明 ☞　因为 $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛（在 $0<x\leqslant 1$ 时 $\frac{\sin x}{x}$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$）. 下面只要证明 $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛.

证法 1　分部积分得

$$\int_1^M\frac{\sin x}{x}dx=-\frac{\cos x}{x}\Big|_1^M+\int_1^M\frac{\cos x}{x^2}dx=\cos 1-\frac{\cos M}{M}+\int_1^M\frac{\cos x}{x^2}dx,\tag{1}$$

或在 (1) 两边取极限 $M\to\infty$，且因为 $\lim\limits_{M\to\infty}\frac{\cos M}{M}=0$，则

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\cos 1+\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx.\tag{2}$$

由习题 10 知 (2) 右侧部分收敛，则原积分收敛.

用分部积分法判别收敛性在实际中非常有用.

证法 2

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\cdots+\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx.$$

令 $x = v + n\pi$,和式变为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin v}{v+n\pi}dv = \int_0^{\pi}\frac{\sin v}{v}dv - \int_0^{\pi}\frac{\sin v}{v+\pi}dv + \int_0^{\pi}\frac{\sin v}{v+2\pi}dv - \cdots$$

是一个交错级数. 因为 $\frac{1}{v+n\pi} \leqslant \frac{1}{v+(n+1)\pi}$ 且在 $[0,\pi]$ 上 $\sin v \geqslant 0$, 则 $\int_0^{\pi}\frac{\sin v}{v+n\pi}dv \leqslant \int_0^{\pi}\frac{\sin v}{v+(n+1)\pi}dv$,

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin v}{v+n\pi}dv \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{dv}{n\pi} = 0$

交错级数每一项的绝对值小于前一项的绝对值,当 $n\to\infty$ 时,第 n 项趋于零. 由交错级数判别法(p. 205)知级数和积分收敛.

12. 证明 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}$ 条件收敛.

证明 ☞ 因为由习题 11 知原积分收敛,下面要证明不是绝对收敛即 $\int_0^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ 发散.

如习题 12 解法 2,有

$$\int_0^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin v}{v+n\pi}dv. \tag{1}$$

而当 $0 \leqslant v \leqslant \pi$ 时, $\frac{1}{v+n\pi} \geqslant \frac{1}{(n+1)\pi}$, 因此

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin v}{v+n\pi}dv \geqslant \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin v dv = \frac{2}{(n+1)\pi}. \tag{2}$$

因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n+1)\pi}$ 发散,由比较判别法知(1)右边级数发散. 因此 $\int_0^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ 发散,结论得证.

第二类广义积分,柯西主值

13. (a) 证明 $\int_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$ 收敛, (b) 计算积分值.

证明 ☞ 被积函数在 $x=-1$ 时无界,定义积分为

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{-1+\epsilon}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \lim_{\epsilon\to0^+}\frac{(x+1)^{2/3}}{2/3}\Big|_{-1+\epsilon}^{7} = \lim_{\epsilon\to0^+}\left(6-\frac{3}{2}\epsilon^{2/3}\right) = 6,$$

则积分收敛到 6.

14. 判别 $\int_{-1}^{5}\frac{dx}{(x-1)^3}$ 是否收敛: (a) 在通常意义下, (b) 用柯西主值.

解 ☞ (a) 由定义

$$\int_{-1}^{5}\frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\epsilon_1\to0^+}\int_{-1}^{1-\epsilon_1}\frac{dx}{(x-1)^3} + \lim_{\epsilon_2\to0^+}\int_{1+\epsilon_2}^{5}\frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$= \lim_{\epsilon_1\to0^+}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2\epsilon_1^2}\right) + \lim_{\epsilon_2\to0^+}\left(\frac{1}{2\epsilon_2^2}-\frac{1}{32}\right),$$

因为极限不存在,则在通常意义下积分不收敛.

(b) 因为

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\left\{\int_{-1}^{1-\epsilon}\frac{dx}{(x-1)^3} + \int_{1+\epsilon}^{5}\frac{dx}{(x-1)^3}\right\} = \lim_{\epsilon\to0^+}\left\{\frac{1}{8}-\frac{1}{2\epsilon^2}+\frac{1}{2\epsilon^2}-\frac{1}{32}\right\} = \frac{3}{32},$$

则在柯西主值意义下,积分存在. 柯西主值为 3/32.

15. 判别收敛性:

(a) $\int_2^3\frac{dx}{x^2(x^3-8)^{2/3}}$, (b) $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^3}dx$, (c) $\int_1^5\frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}}$, (d) $\int_{-1}^{1}\frac{2^{\arcsin x}}{1-x}dx$,

(e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\cos x)^{1/n}}, n > 1$.

解 ☞　(a) $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)^{2/3} \cdot \frac{1}{x^2(x^3-8)^{2/3}} = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^2+2x+4}\right)^{2/3} = \frac{1}{8\sqrt[3]{18}}$,

因此,由 p.236 定理 3(i) 知积分收敛.

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \cdot \frac{\sin x}{x^3} = 1$,因此由 p.236 定理 3(ii) 知积分收敛.

(c) 将积分写为 $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} + \int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}}$.

因为 $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} = \frac{1}{2}$,第二个积分收敛.

因为 $\lim\limits_{x\to 5^-} (5-x)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} = \frac{1}{2}$,第二个积分收敛.

所以原积分收敛.

(d) $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)\frac{2^{\arcsin x}}{1-x} = 2^{\frac{\pi}{2}}$,因此积分发散.

另一种解法

$\frac{2^{\arcsin x}}{1-x} \geqslant \frac{2^{-\pi/2}}{1-x}$ 且 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-x}$ 发散,因此原积分发散.

(e) $\lim\limits_{x\to 1/2\pi^-} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{1/n} \cdot \frac{1}{(\cos x)^{1/n}} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi^-} \left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\right)^{1/n} = 1$,因此积分收敛.

16. 设 m 和 n 是实数,证明 $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ (a) 当 $m > 0$,同时 $n > 0$ 时,收敛;(b) 否则发散.

证明 ☞　(a) 当 $m \geqslant 1$ 同时 $n \geqslant 1$ 时,因为被积函数在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时连续,积分收敛,将积分记为

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx + \int_{1/2}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx. \tag{1}$$

当 $0 < m < 1$ 且 $0 < n < 1$,因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-x)^{1-m} \cdot x^{m-1}(1-x)^{n-1} = 1$,用 p.236 定理 3(i) 有 $p = 1-m$ 且 $a = 0$,知第一个积分收敛.

类似地,因为 $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{1-n} \cdot x^{m-1}(1-x)^{n-1} = 1$,用 p.236 定理 4(i) 及 $p = 1-n$ 和 $b = 1$,知第二个积分也收敛.

因而当 $m > 0$ 同时 $n > 0$ 时,原积分收敛.

(b) 当 $m \leqslant 0$ 时,$\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot x^{m-1}(1-x)^{n-1} = \infty$,因此不管 n 取何值,由 p.236 定理 3(ii) 及 $p = 1$ 且 $a = 0$ 知,(1) 中第一个积分发散.

类似地,当 $n \leqslant 0$,m 不管取何值时,第二个积分发散.结论得证.

原积分称为 B 积分或 B 函数,有许多有趣的性质,将在第十三章里讨论.

17. 证明 $\int_0^\pi \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$ 条件收敛.

证明 ☞　设 $x = \frac{1}{y}$,则积分变为 $\int_{1/\pi}^\infty \frac{\sin y}{y}dy$,由习题 12 知结论得证.

第三类广义积分

18. 设 n 是一实数,证明 $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ (a) 当 $n > 0$ 收敛.

(b) 当 $n \leqslant 0$ 发散.

证明 ☞　将积分写为

$$\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx+\int_1^{\infty}x^{n-1}e^{-x}dx, \tag{1}$$

(a) 当 $n\geqslant 1$ 时,因为被积函数在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上连续,所以(1)中第一个积分收敛.

当 $0<n<1$ 时,(1)中第一个积分是 $x=0$ 处第二类广义积分.因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{1-n}x^{n-1}e^{-x}=1$,由 p.236 定理 3(i) 且 $p=1-n$ 和 $a=0$ 知,积分收敛.

因此,当 $n>0$ 时,第一个积分收敛.

当 $n>0$ 时,(1)中第二个积分是第一类广义积分.因为 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot x^{n-1}\cdot e^{-x}=0$(由洛必达法则或其他),由 p.234 定理 1(i) 且 $p=2$ 知积分收敛.

因而当 $n>0$ 时,第二个积分也收敛,则当 $n>0$ 时原积分收敛.

(b) 当 $n\leqslant 0$ 时,因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot x^{n-1}e^{-x}=\infty$[p.236 定理 3(ii)],(1)中第一个积分发散.

当 $n\leqslant 0$,因为 $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot x^{n-1}\cdot e^{-x}=0$[p.234 定理 1(i)],(1)中第二个积分收敛.

因为(1)第一个积分发散而第二个积分收敛,它们的和也发散,即当 $n\leqslant 0$ 时,原积分发散.

原积分称为 Γ 函数,有许多有趣的性质,将在第十三章中讨论.

广义积分的一致收敛

19. (a) 计算 $\phi(\alpha)=\int_0^{\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$,当 $\alpha>0$.

(b) 证明:当 $\alpha\geqslant\alpha_1>0$ 时,(a)中积分一致收敛到 1.

(c) 说明当 $\alpha>0$ 时,积分为什么不一致收敛到 1.

解 ☞ (a) 当 $\alpha>0$ 时,$\phi(\alpha)=\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b\alpha e^{-\alpha x}dx=\lim\limits_{b\to\infty}-e^{-\alpha x}\Big|_{x=0}^b=\lim\limits_{b\to\infty}1-e^{-\alpha b}=1$

则当 $\alpha>0$ 时,积分收敛到 1.

(b) **解法 1** 用定义

当 $\alpha\geqslant\alpha_1>0$ 时,如果任意 $\epsilon>0$,存在 N,与 ϵ 相关,与 α 无关.当 $u>N$ 时有 $\left|1-\int_0^u\alpha e^{-\alpha x}dx\right|<\epsilon$ 成立,则称积分一致收敛到 1.

而当 $u>\dfrac{1}{\alpha_1}\ln\dfrac{1}{\epsilon}=N$ 时,因为 $\left|1-\int_0^u\alpha e^{-\alpha x}dx\right|=|1-(1-e^{-\alpha u})|=e^{-\alpha u}\leqslant e^{-\alpha_1 u}<\epsilon$,所以结论得证.

解法 2 用魏尔斯特拉斯 M 判别法.

因为当 $\alpha\geqslant\alpha_1>0$ 时,$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\alpha e^{-\alpha x}=0$,当 x 充分大时,即 $x\geqslant x_0$ 时,有 $|\alpha e^{-\alpha x}|<\dfrac{1}{x^2}$,取 $M(x)=\dfrac{1}{x^2}$,而 $\int_{x_0}^{\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ 收敛,则 $\alpha\geqslant\alpha_1>0$ 时,原积分一致收敛到 1.

(c) 当 $\alpha_1\to 0$ 时,(b)中第一种方法里的数 N 递增无极限,则当 $\alpha>0$ 时,积分不可能一致收敛.

20. 当 $\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2$ 时,$\phi(\alpha)=\int_a^{\infty}f(x,\alpha)dx$ 是一致收敛,

证明在该区间上 $\phi(\alpha)$ 连续.

证明 ☞ 令 $\phi(\alpha)=\int_a^u f(x,\alpha)dx+R(u,\alpha)$,其中 $R(u,\alpha)=\int_u^{\infty}f(x,\alpha)dx$,则 $\phi(\alpha+h)=\int_a^u f(x,\alpha+h)dx+R(u,\alpha+h)$ 且

$$\phi(\alpha+h)-\phi(\alpha)=\int_a^u\{f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)\}dx+R(u,\alpha+h)-R(u,\alpha),$$

因而 $|\phi(\alpha+h)-\phi(\alpha)|\leqslant\int_a^u|f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)|dx+|R(u,\alpha+h)|+|R(u,\alpha)|$. (1)

因为当 $\alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2$ 时积分一致收敛,对任给 $\epsilon>0$ 时,存在 N 与 α 无关,当 $u>N$ 时,有

$$|R(u,\alpha+h)|<\epsilon/3,\ |R(u,\alpha)|<\epsilon/3. \tag{2}$$

因为 $f(x,\alpha)$ 连续,对任给 $\epsilon>0$ 时,存在相应的 $\delta>0$,使得当 $|h|<\delta$ 时有

$$\int_a^u |f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)|\,dx < \epsilon/3. \tag{3}$$

将(2)、(3)代入(1),当 $|h|<\delta$ 时,有 $|\phi(\alpha+h)-\phi(\alpha)|<\epsilon$ 成立,即 $\phi(\alpha)$ 是连续的.

注:在证明过程中,我们假设 α 和 $\alpha+h$ 都在区间 $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$ 上.因而,例如当 $\alpha=\alpha_1$ 时,$h>0$ 则假设是右连续.

同样注意到该证明过程类似于无穷级数.

一致收敛积分的其他性质可类似去证明.

21. (a) 证明 $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}dx \neq \int_0^\infty (\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\alpha e^{-\alpha x})dx$,(b) 解释(a)的结论.

证明 ☞　(a) 由习题19(a)知,$\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}dx = \lim\limits_{\alpha\to 0^+} 1 = 1$,

$\int_0^\infty (\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\alpha e^{-\alpha x})dx = \int_0^\infty 0dx = 0$,因而结论得证.

(b) 当 $\alpha\geqslant 0$ 时,由习题19知 $\phi(\alpha)=\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}dx$ 不一致收敛.因而当 $\alpha\geqslant 0$ 时,不能保证 $\phi(x)$ 连续.所以 $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\phi(\alpha)$ 不可能等于 $\phi(0)$.

22. (a) 当 $\alpha>0$ 时,对任意实数 r,证明 $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos rx\,dx = \dfrac{\alpha}{\alpha^2+r^2}$.

(b) 当 $a\leqslant\alpha\leqslant b$ 时,证明(a)中积分绝对且一致收敛,其中 r 任意,$0<a<b$.

证明 ☞　(a) 由 p.77 积分公式 34 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^M e^{-\alpha x}\cos rx\,dx = \lim_{M\to\infty}\frac{e^{-\alpha x}(r\sin rx-\alpha\cos rx)}{\alpha^2+r^2}\bigg|_0^M = \frac{\alpha}{\alpha^2+r^2}.$$

(b) 由积分的魏尔斯特拉斯 M 判别法及 $|e^{-\alpha x}\cos rx|\leqslant e^{-\alpha x}$ 和 $\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx$ 收敛,结论得证.

计算定积分

23. 证明 $\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

证明 ☞　原积分收敛[习题42(f)].令 $x=\dfrac{\pi}{2}-y$,

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx = \int_0^{\pi/2}\ln\cos y\,dy = \int_0^{\pi/2}\ln\cos x\,dx,$$

则 $2I = \int_0^{\pi/2}(\ln\sin x+\ln\cos x)dx = \int_0^{\pi/2}\ln\left(\dfrac{\sin 2x}{2}\right)dx$

$$= \int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x\,dx - \int_0^{\pi/2}\ln 2dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x\,dx - \frac{\pi}{2}\ln 2. \tag{1}$$

设 $2x=N$,

$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin u\,dv = \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\pi/2}\ln\sin u\,dv + \int_{\pi/2}^{\pi}\ln\sin u\,dv\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(I+I) = I(\text{在上一个积分中令 } v=\pi-u),$$

因此(1)变为 $2I = I-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$ 或 $I=-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

24. 证明:$\int_0^\pi x\ln\sin x\,dx = -\dfrac{\pi^2}{2}\ln 2$.

证明 ☞　设 $x=\pi-y$,则用先前例子中结论有

$$J=\int_0^\pi x\ln\sin x\,dx = \int_0^\pi(\pi-u)\ln\sin u\,du = \int_0^\pi(\pi-x)\ln\sin x\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \ln \sin x dx - \int_0^{\pi} x\ln\sin x dx$$
$$= - \pi^2 \ln 2 - J,$$

或 $J = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$.

25. (a) 当 $\alpha \geqslant 1$ 时证明 $\phi(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha}$ 是一致收敛,

(b) 证明 $\phi(\alpha) = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$,

(c) 计算 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$,

(d) 证明 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n+1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta d\theta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \frac{\pi}{2}$.

证明 ☞　(a) 当 $\alpha \geqslant 1$ 时,因为 $\frac{1}{x^2 + \alpha} \leqslant \frac{1}{x^2 + 1}$ 且 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$ 收敛,则由魏尔斯特拉斯判别法知,结论得证.

(b) $\phi(\alpha) = \lim\limits_{b \to \infty}\int_0^{b} \frac{dx}{x^2 + \alpha} = \lim\limits_{b \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{\alpha}}\Big|_0^{b} = \lim\limits_{b \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\tan^{-1} \frac{b}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$.

(c) 由(b), $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$,两边对 α 同时求导,有

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha x}\left(\frac{1}{x^2 + \alpha}\right)dx = -\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \alpha)^2} = -\frac{\pi}{4}\alpha^{-3/2},$$

当 $\alpha \geqslant 1$ 时,因为 $\frac{1}{(x^2 + \alpha)^2} \leqslant \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$ 且 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$ 收敛,则

$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \alpha)^2}$ 一致收敛,由 p.238 定理 8 知,结论成立.

(d) 对 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha} = \frac{\pi}{2}\alpha^{-1/2}$ 两边求导 n 次,同理于(c) 有 $(-1)(-2)\cdots(-n)\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \alpha)^{n+1}} =$

$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\alpha^{-(2n+1)/2}$,

令 $\alpha \to 1^+$ 得 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}\frac{\pi}{2}$,

令 $x = \tan\theta$,积分变为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta d\theta$,则结论得证.

26. 证明:当 $a, b > 0$ 时, $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x\sec rx}dx = \frac{1}{2}\ln \frac{b^2 + r^2}{a^2 + r^2}$.

证明 ☞　由习题 22 及 p.238 定理 7,有

$$\int_{x=0}^{\infty}\left\{\int_{\alpha=a}^{b} e^{-\alpha x}\cos rx dx\right\}dx = \int_{\alpha=a}^{b}\left\{\int_{x=0}^{\infty} e^{-\alpha x}\cos rx dx\right\}d\alpha$$

或 $\int_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}\cos rx}{-x}\Big|_{\alpha=a}^{b} dx = \int_{\alpha=a}^{b} \frac{\alpha}{\alpha^2 + r^2}d\alpha$,

即 $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x\sec rx}dx = \frac{1}{2}\ln \frac{b^2 + r^2}{a^2 + r^2}$.

27. 证明 $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2}dx = \arctan \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{2}\ln(\alpha^2 + 1), \alpha > 0$.

证明 ☞　由习题 22 及 p.238 定理 7 知

$$\int_0^{r}\left\{\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\cos rx dx\right\}dr = \int_0^{\infty}\left\{\int_0^{r} e^{-\alpha x}\cos rx dr\right\}dx$$

或$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin rx}{x}dx = \int_0^r \frac{\alpha}{\alpha^2+r^2}dr = \arctan\frac{r}{\alpha}$

对 r 从 0 到 r 再次积分.分部积分得

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{1-\cos rx}{x^2}dx = \int_0^r \arctan\frac{r}{\alpha}dr = r\arctan\frac{r}{\alpha} - \frac{\alpha}{2}\ln(\alpha^2+r^2),$$

其中令 $r=1$,结论得证.

28. 证明$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

证明 ☞　当 $\alpha\geqslant 0, x\geqslant 0$ 时,因为 $e^{-\alpha x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\leqslant\frac{1-\cos x}{x^2}$ 且$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ 收敛[见习题7(b)],则由魏尔斯特拉斯判别法知当 $\alpha\geqslant 0$ 时,$\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ 是一致收敛的且表示 α 的一连续函数(p.237 定理 6).再令 $\alpha\to 0^+$,用习题 27,有

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \lim_{\alpha\to 0}\left\{\arctan\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{2}\ln(\alpha^2+1)\right\} = \frac{\pi}{2}.$$

29. 证明$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x} = \int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

证明 ☞　由分部积分有

$$\int_{\varepsilon}^{M}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \left(-\frac{1}{x}\right)(1-\cos x)\Big|_{\varepsilon}^{M} + \int_{\varepsilon}^{M}\frac{\sin x}{x}dx$$

$$= \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{1\cos M}{M} + \int_{\varepsilon}^{M}\frac{\sin x}{x}dx,$$

当 $\varepsilon\to 0^+$ 和 $M\to\infty$ 时,取极限得

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

因为$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = 2\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(x/2)}{x^2}dx = \int_0^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2} = du$,

令 $u=\frac{x}{2}$,有$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

30. 证明$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x}dx = \frac{\pi}{4}$.

证明 ☞　$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{(e^{ix})^3 - 3(e^{ix})^2(e^{-ix}) + 3(e^{ix})(e^{-ix})^2 - (e^{-ix})^3}{(2i)^3}$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x,$$

则

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin 3x}{x}dx = \frac{3}{4}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx - \frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{\sin 3x}{x}dx$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx - \frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

31. 证明$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$.

证明 ☞　由习题 6 知积分收敛.设 $I_M = \int_0^M e^{-x^2}dx = \int_0^M e^{-y^2}dy$ 及 $\lim\limits_{M\to\infty}I_M = I$ 为所求的积分值,则

$$I_M^2 = \left(\int_0^M e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^M e^{-y^2}dy\right)$$

$$= \int_0^M \int_0^M e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \iint_{\mathscr{R}_M} e^{-(x^2+y^2)} dxdy,$$

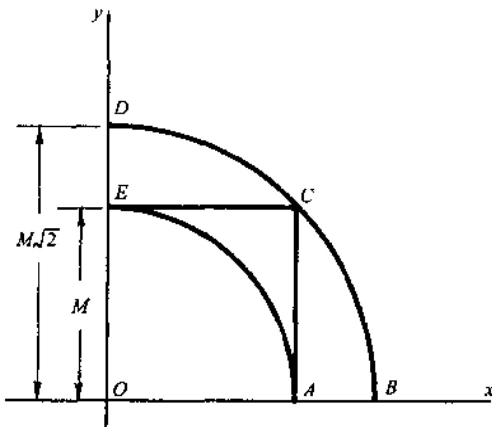


图 12 - 1

其中 $\mathscr{R}_M$ 是边长为 M 的正方形(见图 12-1),因为被积函数是正的,有

$$\iint_{\mathscr{R}_1} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \leqslant I_M^2 \leqslant \iint_{\mathscr{R}_2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy, \quad (1)$$

其中 $\mathscr{R}_1$ 和 $\mathscr{R}_2$ 是半径 M 和 $M\sqrt{2}$ 的圆在第一象限内所围成的区域.

对(1)用极坐标,有

$$\int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^{M} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\phi \leqslant I_M^2 \leqslant \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^{M\sqrt{2}} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\phi, (2)$$

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-M^2}) \leqslant I_M^2 \leqslant \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2M^2}).$$

在(3)中取 $M \to \infty$,有 $\lim\limits_{M\to\infty} I_M^2 = I^2 = \pi/4$,则 $I = \sqrt{\pi}/2$.

32. 计算 $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos\alpha x dx$.

解 ☞ 设 $I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos\alpha x dx$,用分部积分和取极限得

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_0^\infty - xe^{-x^2} \sin\alpha x dx = \frac{1}{2} e^{-x^2} \sin\alpha x \Big|_0^\infty - \frac{1}{2}\alpha \int_0^\infty e^{-x^2} \cos\alpha x dx = -\frac{\alpha}{2} I.$$

由 p. 238 定理 8 知,可将求导符号移到积分号内,而 $\int_0^\infty xe^{-x^2} \sin\alpha x dx$ 对一切 α 是一致连续的(因为由魏尔斯特拉斯判别法, $|xe^{-x^2} \sin\alpha x| \leqslant xe^{-x^2}$ 且 $\int_0^\infty xe^{-x^2} dx$ 收敛)

从习题 31 及一致收敛性知,原积分因而连续(因为 $|e^{-x^2} \cos\alpha x| \leqslant e^{-x^2}$ 且 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ 收敛,由魏尔斯特拉斯判别法可知),有 $I(0) = \lim\limits_{\alpha\to0} I(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

由 $I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,解方程 $\frac{dI}{d\alpha} = -\frac{\alpha}{2} I$,得 $I(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2/4}$.

33. (a) 证明 $I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-(x-\alpha/x)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, (b) 计算 $\int_0^\infty e^{-(x^2+x^{-2})} dx$.

证明 ☞ (a) $I'(\alpha) = 2\int_0^\infty e^{-(x-\alpha/x)^2} (1 - \alpha/x^2) dx$.

当 $x \to 0^+$ 时,被积函数是有界的,上述求导过程是正确的. 且对于充分大的 x,有 $e^{-(x-\alpha/x)^2} (1 - \alpha/x^2) = e^{-x^2+2\alpha-\alpha^2/x^2} (1 - \alpha/x^2) \leqslant e^{2\alpha} e^{-x^2}$,因为 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ 收敛,则由魏尔斯特拉斯判别法知,当 $\alpha \geqslant 0$ 时 $I'(\alpha)$ 一致收敛. 而

$$I'(\alpha) = 2\int_0^\infty e^{-(x-\alpha/x)^2} dx - 2\alpha \int_0^\infty \frac{e^{-(x-\alpha/x)^2}}{x^2} dx = 0,$$

其中第二个积分中令 $\alpha/x = y$ 即得. 因而 $I(\alpha) = c$,是一常数. 为了确定 c,在原积分中令 $\alpha \to 0^+$,用习题 31 得 $c = \sqrt{\pi}/2$.

(b) 由(a), $\int_0^\infty e^{-(x-\alpha/x)^2} dx = \int_0^\infty e^{-(x^2-2\alpha+\alpha^2x^{-2})} dx = e^{2\alpha} \int_0^\infty e^{-(x^2+\alpha^2x^{-2})} dx$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

则 $\int_0^\infty e^{-(x^2+\alpha^2x^{-2})} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\alpha}$ 令 $\alpha = 1$, $\int_0^\infty e^{-(x^2+x^{-2})} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2}$.

34. 证明下列结论: (a) $\mathscr{L}\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a}, s > a$,

(b)$\mathscr{L}\{\cos ax\}=\frac{s}{s^2+a^2}, s>0$.

证明 ☞ (a)$\mathscr{L}\{e^{ax}\}=\int_0^{\infty}e^{-sx}e^{ax}dx=\lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-(s-a)x}dx$

$$=\lim_{M\to\infty}\frac{1-e^{-(s-a)M}}{s-a}=\frac{1}{s-a}, \text{当 } s>a \text{ 时}.$$

(b) 由例 22 及 $\alpha=s, r=a$ 知 $\mathscr{L}\{\cos ax\}=\int_0^{\infty}e^{-sx}\cos ax dx$

$$=\frac{S}{s^2+a^2}.$$

另一种解法　用复数.

由(a)$\mathscr{L}\{e^{ax}\}=\frac{1}{s-a}$,用 ai 代替 a,则

$$\mathscr{L}\{e^{aix}\}=\mathscr{L}\{\cos ax+i\sin ax\}=\mathscr{L}\{\cos ax\}+i\mathscr{L}\{\sin ax\}$$

$$=\frac{1}{s-ai}=\frac{s+ai}{s^2+a^2}=\frac{s}{s^2+a^2}+i\frac{a}{s^2+a^2}.$$

令实部和虚部等于 $\mathscr{L}\{\cos ax\}=\frac{s}{s^2+a^2}$, $\mathscr{L}\{\sin ax\}=\frac{a}{s^2+a^2}$.

上面的方法由第十七章知是正确的.

35. 证明 $Y(x)$ 满足适当的条件时,有

(a)$\mathscr{L}\{Y'(x)\}=s\mathscr{L}\{Y(x)\}-Y(0)$,

(b)$\mathscr{L}\{Y''(x)\}=s^2\mathscr{L}\{Y(x)\}-sY(0)-Y'(0)$.

证明 ☞ (a) 由定义

$$\mathscr{L}\{Y'(x)\}=\int_0^{\infty}e^{-sx}Y'(x)dx=\lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-sx}Y'(x)dx$$

$$=\lim_{M\to\infty}\left\{e^{-sx}Y(x)\Big|_0^M+s\int_0^M e^{-sx}Y(x)dx\right\}$$

$$=s\int_0^{\infty}e^{-sx}Y(x)dx-Y(0)=s\mathscr{L}\{Y(x)\}-Y(0),$$

假设 s 满足 $\lim_{M\to\infty}e^{-sM}Y(M)=0$.

(b) 设 $u(x)=Y'(x)$,则由(a),$\mathscr{L}\{u'(x)\}=s\mathscr{L}\{u(x)\}-u(0)$,则

$$\mathscr{L}\{Y''(x)\}=s\mathscr{L}\{Y'(x)\}-Y'(0)=s[s\mathscr{L}\{Y(x)\}-Y(0)]-Y'(0)$$

$$=s^2\mathscr{L}\{Y(x)\}-sY(0)-Y'(0).$$

36. 解微分方程 $Y''(x)+y(x)=x, Y(0)=0, y'(0)=2$.

解 ☞ 将原微分方程两边取拉普拉斯变换,则由习题35知 $\mathscr{L}\{Y''(x)+Y(x)\}=\mathscr{L}\{x\}$,$\mathscr{L}\{Y''(x)\}+\mathscr{L}\{Y(x)\}=1/s^2$,

且 $s^2\mathscr{L}\{Y(x)\}-sY(0)-Y'(0)+\mathscr{L}\{Y(x)\}=1/s^2$.

用原条件解出 $\mathscr{L}\{Y(x)\}$,由部分分式方法得

$$\mathscr{L}\{Y(x)\}=\frac{2s^2+1}{s^2(s^2+1)}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2+1}. \tag{1}$$

因为$\frac{1}{s^2}=\mathscr{L}\{x\}$ 且$\frac{1}{s_2+1}=\mathscr{L}\{\sin x\}$,则$\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2+1}=\mathscr{L}\{x+\sin x\}$,

因此由(1)得 $\mathscr{L}\{Y(x)\}=\mathscr{L}\{x+\sin x\}$,则有 $Y(x)=x+\sin x$,即为方程的解.

另一种解法

设 $\mathscr{L}\{F(x)\}=f(s)$,称 $f(s)$ 为 $F(x)$ 的拉普拉斯逆变换记为 $f(s)=\mathscr{L}^{-1}\{F(x)\}$.

由习题 78,$\mathscr{L}^{-1}\{f(s)+g(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\{f(x)\}+\mathscr{L}^{-1}\{g(s)\}$,则由(1)

$$Y(x)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2+1}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=x+\sin x.$$

由 p.258 的表格可得拉普拉斯逆变换.

补充习题

第一类广义积分

37. 判别收敛性:

(a)$\int_0^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$,(b)$\int_2^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^3-1}}$,(c)$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{3x+2}}$,(d)$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+4}$,(e)$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2+\sin x}{x^2+1}dx$,(f)$\int_2^{\infty}\frac{xdx}{(\ln x)^3}$,

(g)$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+x+1)^{5/2}}$,(h)$\int_1^{\infty}\frac{\ln xdx}{x+e^{-x}}$,(i)$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

38. 证明$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2ax+b^2}=\frac{\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}$,当 $b>|a|$ 时.

39. 判别收敛性:(a)$\int_1^{\infty}e^{-x}\ln xdx$, (b)$\int_0^{\infty}e^{-x}\ln(1+e^x)dx$, (c)$\int_0^{\infty}e^{-x}\cosh x^2dx$.

40. 判别收敛性,如果收敛,指明是绝对收敛还是条件收敛:

(a)$\int_0^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^3+1}dx$, (b)$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\cos bxdx$,其中 a,b 是正常数,

(c)$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}dx$, (d)$\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$, (e)$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{\cosh x}dx$.

41. 证明 p.234 商判别法(b) 和(c).

第二类广义积分

42. 判别收敛性:

(a)$\int_0^1\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$, (b)$\int_0^1\frac{\cos x}{x^2}dx$, (c)$\int_{-1}^1\frac{e^{\arccos x}}{x}dx$, (d)$\int_0^2\frac{\ln x}{\sqrt[3]{8-x^3}}dx$, (e)$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{\ln(1\ x)}}$,

(f)$\int_0^{\pi/2}\ln\sin xdx$,(g)$\int_0^3\frac{x^2}{(3-x)^2}dx$, (h)$\int_0^{\pi/2}\frac{e^{-x}\cos x}{x}dx$, (i)$\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}dx$, $|k|<1$,(j)$\int_0^1\frac{dx}{x^x}$.

43. (a) 证明$\int_0^5\frac{dx}{4-x}$ 在通常意义下发散,在柯西主值意义下收敛.

(b) 求(a) 中积分的柯西主值并给出几何解释.

44. 判别收敛性,如果收敛,指明是绝对收敛还是条件收敛: (a) $\int_0^1\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$,

(b)$\int_0^1\frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$, (c)$\int_0^1\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

45. 证明$\int_0^{4/\pi}\left(3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}\right)dx=\frac{32\sqrt{2}}{x^3}$.

第三类广义积分

46. 判别收敛性:

(a)$\int_0^{\infty}e^{-x}\ln xdx$, (b) $\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}dx}{\sqrt{x\ln(x+1)}}$, (c)$\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}dx}{\sqrt[3]{x}(3+2\sin x)}$.

47. 判别收敛性:

(a)$\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+x^2}}$, (b)$\int_0^{\infty}\frac{e^xdx}{\sqrt{\sinh(ax)}}$, $a>0$.

48. 证明$\int_0^{\infty}\frac{\sinh(ax)}{\sinh(\pi x)}dx$ 当 $0\leqslant|a|<\pi$ 时收敛,当 $|a|\geqslant\pi$ 时发散.

49. 判别收敛性,如果收敛,指出是绝对收敛还是条件收敛: (a)$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$, (b)$\int_0^{\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sinh\sqrt{x}}dx$.

广义积分一致收敛性

50. (a) 证明 $\phi(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$ 对一切 α 一致收敛.

(b) 证明对一切 α，$\phi(\alpha)$ 是连续的.

(c) 求 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\phi(\alpha)$.

51. 设 $\phi(\alpha)=\int_0^{\infty}F(x,\alpha)dx$，其中 $F(x,\alpha)=\alpha^2xe^{-\alpha x^2}$，

(a) 证明 $\phi(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 时不连续，即 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^{\infty}F(x,\alpha)dx\neq\int_0^{\infty}\lim\limits_{\alpha\to 0}F(x,\alpha)dx$.

(b) 解释(a)的结论.

52. 设 $F(x,\alpha)=\alpha^2xe^{-\alpha x}$，求习题 51.

53. 设 $F(x)$ 当 $-\infty<x<\infty$ 时，有界且连续，$V(x,y)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{yF(\lambda)}{y^2+(\lambda-x)^2}$，

证明 $\lim\limits_{y\to 0}V(x,y)=F(x)$.

54. 证明 p.238(a) 定理 7 及(b) 定理 8.

55. 证明判别积分一致性的魏尔斯特拉斯 M 判别法.

56. 证明如果 $\int_0^{\infty}F(x)dx$ 收敛，则当 $\alpha\geqslant 0$ 时，$\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}F(x)dx$ 一致收敛.

57. 证明(a) 当 $\alpha\geqslant 0$ 时，$\phi(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}dx$ 一致收敛.

(b) $\phi(\alpha)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan\alpha$.

(c) $\int_0^{\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx=\dfrac{\pi}{2}$（与习题 27～29 作比较）.

58. 描述第二类广义积分一致收敛性定义.

59. 设 a 是 α 的一可微函数，描述与 p.238 定理 8 对应的定理，并给出证明.

定积分的计算

验证下列结论，确保每一步都是正确的：

60. $\int_0^{\infty}\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\ln(b/a)$，$a,b>0$.

61. $\int_0^{\infty}\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x\csc rx}dx=\arctan(b/r)-\arctan(a/r)$，$a,b,r>0$.

62. $\int_0^{\infty}\dfrac{\sin rx}{x(1+x^2)}dx=\dfrac{\pi}{2}(1-e^{-r})$，$r\geqslant 0$.

63. $\int_0^{\infty}\dfrac{1-\cos rx}{x^2}dx=\dfrac{\pi}{2}|r|$.

64. $\int_0^{\infty}\dfrac{x\sin rx}{a^2+x^2}dx=\dfrac{\pi}{2}e^{-ar}$，$a,r\geqslant 0$.

65. (a) 证明 $\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\left(\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x}\right)dx=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\alpha^2+b^2}{\alpha^2+a^2}\right)$，$\alpha\geqslant 0$.

(b) 用(a)去证明 $\int_0^{\infty}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x}dx=\ln(\dfrac{b}{a})$.

[(b) 的结论和习题 60 是伏汝兰尼(Froullani)积分的特殊形式，$\int_0^{\infty}\dfrac{F(ax)-F(bx)}{x}dx=F(0)\ln(\dfrac{b}{a})$，其中 $t>0$ 时，$F(t)$ 连续、$F'(0)$ 存在，$\int_1^{\infty}\dfrac{F(t)}{t}dt$ 收敛].

66. 已知 $\int_0^{\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi/\alpha}$，$\alpha>0$，证明当 $p=1,2,3,\cdots$，时有：$\int_0^{\infty}x^{2p}e^{-\alpha x^2}dx=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\cdots\dfrac{(2p-1)}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{(2p+1)/2}}$.

67. 设 $a>0$，$b>0$，证明 $\int_0^{\infty}(e^{-a/x^2}-e^{-b/x^2})dx=\sqrt{\pi b}-\sqrt{\pi a}$.

68. 证明 $\int_0^{\infty}\dfrac{\arctan(x/a)-\arctan(x/b)}{x}dx=\dfrac{\pi}{2}\ln(\dfrac{b}{a})$，其中 $a>0,b>0$.

69. 证明 $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+x+1)^3}=\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$[提示：用习题 38].

杂题

70. 证明$\int_0^\infty \left\{\frac{\ln(1+x)}{x}\right\}^2 dx$ 收敛.

71. 证明$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3\sin^2 x}$ 收敛. [提示: 考虑$\sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+x^3\sin^2 x}$, 且用$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+x^3\sin^2 x} \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+(n\pi)^3\sin^2 x}$].

72. 证明$\int_0^\infty \frac{x dx}{1+x^3\sin^2 x}$ 发散.

73. (a) 证明$\int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{1+x^2}dx = \pi\ln(1+\alpha), \alpha \geqslant 0$,

(b) 用(a) 证明$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin\theta d\theta = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

74. 证明$\int_0^\infty \frac{\sin 4x}{x^4}dx = \frac{\pi}{3}$.

75. 计算(a)$\mathscr{L}\{1/\sqrt{x}\}$,(b)$\mathscr{L}\{\cosh ax\}$, (c)$\mathscr{L}\{(\sin x)/x\}$.

76. (a) 设$\mathscr{L}\{F(x)\} = f(s)$,证明 $\mathscr{L}\{e^{ax}F(x)\} = f(s-a)$.

(b) 计算 $\mathscr{L}\{e^{ax}\sin bx\}$.

77. (a) 设$\mathscr{L}\{F(x)\} = f(s)$,证明 $\mathscr{L}\{x^nF(x)\} = (-1)^n f^{(n)}(s)$,给 $F(x)$ 以恰当的约束条件.

(b) 计算 $\mathscr{L}\{x\cos x\}$.

78. 证明 $\mathscr{L}^{-1}\{f(s)+g(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\{f(s)\} + \mathscr{L}^{-1}\{g(s)\}$,列出约束条件.

79. 用拉普拉斯变换求解下列微分方程,使之满足所给的条件:

(a) $Y''(x)+3Y'(x)+2Y(x) = 0; Y(0) = 3, Y'(0) = 0$.

(b) $Y''(x)-Y'(x) = x; Y(0) = 2; Y'(0) = -3$.

(c) $Y''(x)+2Y'(x)+2Y(x) = 4; Y(0) = 0, Y'(0) = 0$.

80. 当 $b>0$ 时,设 $F(x)$ 在有限区间$[0,b]$上分段连续,并且当 $x\to\infty$ 时,$F(x)$ 是指数阶的,即对一切 $x > b$,存在一常数 α,使得 $|e^{-\alpha x}F(x)| < p$ 成立,证明 $\mathscr{L}\{F(x)\}$ 存在.

81. 设 $f(s) = \mathscr{L}\{F(x)\}$ 且 $g(s) = \mathscr{L}\{G(x)\}$,证明 $f(s)g(s) = \mathscr{L}\{H(x)\}$,其中 $H(x) = \int_0^x F(u)G(x-u)du$ 称为F 和 G 的卷积,记为 $F * G$.

[提示:$f(s)g(s) = \lim_{M\to\infty}\left\{\int_0^M e^{-su}F(u)du\right\}\left\{\int_0^M e^{-sv}G(v)dv\right\}$

$= \lim_{M\to\infty}\int_0^M\int_0^M e^{-s(u+v)}F(u)G(v)dudv$ 再令 $u+v=t$].

82. (a) 求 $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$, (b) 解 $Y''(x)+Y(x) = R(x)$, $Y(0) = Y'(0) = 0$,(c) 解积分方程 $Y(x) = x + \int_0^x Y(u)\sin(x-u)du$[提示用习题 81].

83. 设 $f(x)$, $g(x)$ 和 $g'(x)$ 在有限区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续且$g'(x)\leqslant 0$, $h(x) = \int_a^x f(x)dx$ 在$x\geqslant a$ 时有界且$\lim_{x\to 0}g(x) = 0$.

(a) 证明$\int_a^\infty f(x)g(x)dx = -\int_a^\infty g'(x)h(x)dx$.

(b) 证明右边的积分和左边的积分都收敛,即在所给的 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足的条件下,$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ 收敛,有时称为阿贝尔积分判别法.

[提示:对(a)在$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)g(x)dx$ 中用$h'(x)$ 代替 $f(x)$,再分部积分.对(b),先证明当 $|h(x)| < H$(一常数),则 $|\int_a^b g'(x)h(x)dx| \leqslant H\{g(a)-g(b)\}$,再令 $b\to\infty$].

84. 用习题 83 证明:(a)$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$,(b)$\int_0^{\infty}\sin x^p dx$,当 $p>1$ 时收敛.

85. (a) 设$\int_0^{\infty}\sin x^2 dx=\int_0^{\infty}\cos x^2 dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$[见第十三章习题 27 和 68(a)],计算$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\sin(x^2+y^2)dxdy$.

(b) 解释习题 31 中的方法为什么不能用来计算(a) 中的多重积分.

第十三章 Γ函数和B函数

Γ函数

Γ函数用$\Gamma(n)$来表示,定义为

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx. \tag{1}$$

上式积分当$n>0$时是收敛的(参阅第十二章习题18).

Γ函数中一个常用公式是

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n), \tag{2}$$

其中$\Gamma(1)=1$(见习题1). 由(2)式,若$1\leqslant n<2$(也可取其他单位长度间隔)时$\Gamma(n)$是已知的,则对满足$n>0$的所有n,$\Gamma(n)$都是已知的(见下面的表).特别当n为正整数,则

$$\Gamma(n+1)=n!,\quad n=1,2,3,\cdots, \tag{3}$$

这也是把$\Gamma(n)$称为阶乘函数的一个原因.

例: $\Gamma(2)=1!=1$, $\Gamma(6)=5!=120$, $\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)}=\frac{4!}{2!}=12$.

由习题4,$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. (4)

递归关系(2)是一个差分方程,它的解为(1)式.虽然(1)式中的$\Gamma(n)$要求$n>0$,但是我们利用(2)式

$$\Gamma(n)=\Gamma(n+1)/n \tag{5}$$

可以把Γ函数推广到$n<0$的情形(见习题7). 这个过程称为解析延拓.

Γ函数的图形和数值表

n	$\Gamma(n)$
1.00	1.0000
1.10	0.9514
1.20	0.9182
1.30	0.8975
1.40	0.8873
1.50	0.8862
1.60	0.8935
1.70	0.9086
1.80	0.9314
1.90	0.9618
2.00	1.0000

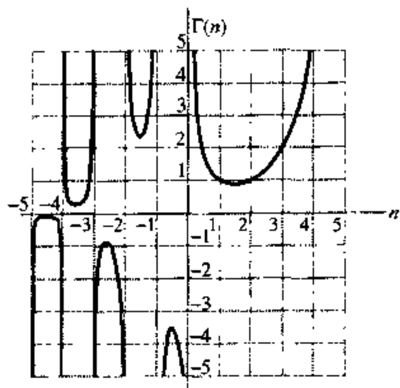


图 13-1

Γ(n)的渐近公式

如果n较大,在计算$\Gamma(a)$的积分表达式就会很困难,通常采用下面的关系式:

$$\Gamma(n+1)=\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}e^{\theta/12(n+1)},\ 0<\theta<1. \tag{6}$$

在实际运用中,对较大的 n,$e^{\theta/12(n+1)}\to 1$,因而可以不考虑.当 n 为整数,就有

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n},\tag{7}$$

符号"~"表示"对较大 n,上式近似相等",有时也把这个公式称为斯特林(Stirling)阶乘逼近公式或称为关于 n 的渐近公式.

关于Γ函数的几个结果

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\pi/\sin x\pi,\ 0<x<1.\tag{8}$$

特别当 $x=1/2$,有 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Gamma(2x),\tag{9}$$

该式称为Γ函数的倍量公式.

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{m-1}{m}\right)$$

$$=m^{\frac{1}{2}-mx}(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(mx).\tag{10}$$

当 $m=2$,上式就是(9)式.

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=xe^{rx}\prod_{m=1}^{10}\left\{\left(1+\frac{x}{m}\right)e^{-\frac{x}{m}}\right\},\tag{11}$$

这是Γ函数的无穷乘积表达式,r 是Eular常数.(见第十一章习题49).

$$\Gamma(x+1)=\lim_{k\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)}k^x=\lim_{k\to\infty}\pi(x,k),\tag{12}$$

其中 $\pi(x,k)$ 也称为高斯 π 函数.

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi x}x^x e^{-x}\left\{1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}+\cdots\right\}.\tag{13}$$

称为关于Γ函数的斯特林渐近级数,其中大括号里的级数是渐近级数(见习题20).

$$\Gamma'(1)=\int_0^\infty e^{-x}\ln x dx=-r,\tag{14}$$

其中 r 为Eular常数.

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-r+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n-1}\right)+\cdots.\tag{15}$$

B函数

用 $B(m,n)$ 来表示B函数,定义为

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx.\tag{16}$$

上式当 $m>0,n>0$ 是收敛的(见第十二章习题16).

B函数和Γ函数的关系为

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\tag{17}$$

(见习题 11).

许多积分都可通过 B 函数和 Γ 函数来计算.常用的二个是

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta d\theta = \frac{1}{2}\mathrm{B}(m,\ n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}, \tag{18}$$

$m>0$, $n>0$ (见习题 10、13).

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi},\ 0<p<1 \tag{19}$$

(见习题 17).

狄利克雷积分

设 V 表示由曲面 $\left(\frac{x}{a}\right)^p+\left(\frac{y}{b}\right)^q+\left(\frac{z}{c}\right)^r=1$ 和坐标平面所围成的在第一卦限的闭区域,若 $a,\ b,\ c,\ p,\ q,\ r,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ 均为正整数,则有

$$\iiint_V x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}dxdydz = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{r}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}\right)}. \tag{20}$$

此类积分称为狄利克雷积分,在重积分的计算上有广泛的应用(见习题 21).

习题与解答

Γ 函数

1. 证明:(a) $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$, $n>0$.

(b) $\Gamma(n+1)=n!$, $n=1,2,3\cdots$.

证明 ☞ (a) 若 $n>0$, $\Gamma(n+1)=\int_0^{\infty}x^ne^{-x}dx=\lim\limits_{M\to\infty}\int_0^M x^ne^{-x}dx$

$$=\lim_{M\to\infty}\left\{(x^n)(-e^{-x})\Big|_0^M-\int_0^M(-e^{-x})(nx^{n-1})dx\right\}$$

$$=\lim_{M\to\infty}\left\{-M^ne^{-M}+n\int_0^M x^{n-1}e^{-x}dx\right\}.$$

$$=n\Gamma(n).$$

(b) $\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-x}dx=\lim\limits_{M\to\infty}\int_0^M e^{-x}dx=\lim\limits_{M\to\infty}(1-e^{-M})=1$.

在 $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ 中,取 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$, 则

$$\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1,\ \Gamma(3)=2\Gamma(2)=2.1=2!,\ \Gamma(4)=3\Gamma(3)=3\cdot2!=3!,$$

一般地,若 n 为正整数,则 $\Gamma(n+1)=n!$.

2. 计算下列各式:

(a) $\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}$, (b) $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, (c) $\frac{\Gamma(3)\Gamma(2.5)}{\Gamma(5.5)}$, (d) $\frac{6\Gamma\left(\frac{8}{3}\right)}{5\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$.

解 ☞ (a) $\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}=\frac{5!}{2.2!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{2\cdot2}=30$.

(b) $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$.

3. 计算下列积分：

(a) $\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx$，　(b) $\int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx$.

解 ☞　(a) $\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3! = 6$.

(b) 设 $2x = y$，则

$$\int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx = \int_0^\infty \left(\frac{y}{2}\right)^6 e^{-y} \frac{dy}{2} = \frac{1}{2^7}\int_0^\infty y^6 e^{-y} dy$$

$$= \frac{6!}{2^7} = \frac{45}{8}.$$

4. 证明 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

证明 ☞　$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{1/2} e^{-x} dx$. 设 $x = u^2$，利用第十二章习题31，有

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-u^2} du = 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

5. 计算下列积分：

(a) $\int_0^\infty \sqrt{y} e^{-y^3} dy$，　(b) $\int_0^\infty 3^{-4y^2} dy$，(c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$.

解 ☞　(a) 设 $y^3 = x$，则

$$\int_0^\infty \sqrt{y} e^{-y^3} dy = \int_0^\infty \sqrt{x^{1/3}} e^{-x} \frac{1}{3} x^{-2/3} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}.$$

(b) $\int_0^\infty 3^{-4z^2} dz = \int_0^\infty (e^{\ln 3})^{(-4z^2)} dz = \int_0^\infty e^{-(4\ln 3)z^2} dz$，

设 $(4\ln z)z^2 = x$，则

$$\int_0^\infty 3^{-4z^2} dz = \int_0^\infty e^{-x} d\left(\frac{x^{1/2}}{\sqrt{4\ln 3}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{4\ln 3}}\int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} dx$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{4\ln 3}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\ln 3}}.$$

(c) 设 $-\ln x = u$，则 $x = e^{-u}$. 当 $x = 1$，$u = 0$，$x = 0$，$u = \infty$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-u} du = \int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u} du$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

6. 计算 $\int_0^\infty x^m e^{-ax^n} dx$，$m$，$n$ 是正常数.

解 ☞　设 $ax^n = y$. 则

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax^n} dx = \int_0^\infty \left\{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^m e^{-y} d\left\{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}$$

$$= \frac{1}{na^{(m+1)/n}}\int_0^\infty y^{\frac{m+1}{n}-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{na^{(m+1)/n}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right).$$

7. 计算：(a)$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$，(b) $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$.

解☞ 利用 $\Gamma(n)=\Gamma(n+1)/n$ 把 $\Gamma(n)$推广到负整数值.

(a) 取 $n=-\frac{1}{2}$，$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Big/\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}$.

(b) 取 $n=-3/2$，利用(a)的结果，

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Big/\left(-\frac{3}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}\Big/\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{3}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)\Big/\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}.$$

8. 证明 $\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$，$n$ 为正整数，$m>-1$.

解☞ 设 $x=e^{-y}$，则

$$\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx=(-1)^n\int_0^{\infty} y^n e^{-(m+1)y}dy.$$

再设$(m+1)y=u$，则

$$(t)^n\int_0^{\infty} y^n e^{\ (m+1)y}dy=(-1)^n\int_0^{\infty}\frac{u^n}{(m+1)^n}e^{-u}\frac{du}{m+1}=\frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}\int_0^{\infty}u^n e^{-u}du$$

$$=\frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}\Gamma(n+1)=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

请读者与第八章习题50相比较.

9. 一个质点受到一个力的作用，在某时刻 t 它的大小与该质点和一定点 O 的距离成反比，方向指向 O 点，如果质点从某个位置开始运动，求它到 O 点所用的时间.

解☞ 设 $t=0$ 时，该质点位于 x 轴上 $x=a$ 点处，O 点位于原点，则由牛顿运动定律，

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{x},\tag{1}$$

m 是质点的质量，$k>0$ 是比例系数.

用$\frac{dx}{dt}=v$ 表示质点的速度，由$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$，则(1)式为

$$mv\frac{dv}{dx}=-\frac{k}{x}.$$

通过积分，有

$$\frac{mv^2}{2}=-k\ln x+c.\tag{2}$$

由 $x=a$，$v=0$，得 $c=k\ln a$，于是

$$\frac{mv^2}{2}=k\ln\frac{a}{x},$$

即
$$v=\frac{dx}{dt}=-\sqrt{\frac{2k}{m}}\sqrt{\ln\frac{a}{x}},\tag{3}$$

其中取负号是由于当 t 增加时，x 减少的缘故.设质点从 $x=a$ 运动到 $x=0$ 所用时间为 T，则

$$T=\sqrt{\frac{m}{2k}}\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{\ln a/x}}\tag{4}$$

设 $\ln\frac{a}{x}=u$ 或 $x=ae^{-u}$，上式为

$$T=a\sqrt{\frac{m}{2k}}\int_0^{\infty}u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du=a\sqrt{\frac{m}{2k}}v\left(\frac{1}{2}\right)=a\sqrt{\frac{m\pi}{2k}}.$$

B函数

10. 证明：(a) $B(m, n) = B(n, m)$，(b) $B(m, n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta d\theta$.

证明☞　(a) 作变换 $x = 1 - y$，有

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = \int_0^1 (1-y)^{m-1}y^{n-1}dy$$

$$= \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{m-1}dy = B(n, m).$$

(b) 作变换 $x = \sin^2\theta$，有

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{m-1}(\cos^2\theta)^{n-1}2\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta d\theta.$$

11. 证明 $B(m, n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$，$m, n > 0$.

证明☞　设 $z = x^2$，我们有

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty z^{m-1}e^{-z}dz = 2\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}dx.$$

类似地

$$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty y^{2n-1}e^{-y^2}dy.$$

于是

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\left(\int_0^\infty x^{2m-1}e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty y^{2n-1}e^{-y^2}dy\right)$$

$$= 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2m-1}y^{2n-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

利用极坐标 $x = \rho\cos\varphi$，$y = \rho\sin\varphi$，则

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty \rho^{2(m+n)-1}e^{-\rho^2}\cos^{2m-1}\varphi\sin^{2n-1}\varphi d\varphi$$

$$= 4\left(\int_0^\infty \rho^{2(m+n)-1}e^{-\rho^2}d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1}\varphi\sin^{2n-1}\varphi d\varphi\right)$$

$$= 2\Gamma(m+n)\int_0^{\pi/2}\cos^{2m-1}\varphi\sin^{2n-1}\varphi d\varphi = \Gamma(m+n)B(n, m)$$

$$= \Gamma(m+n)B(m, n).$$

最后结果利用了习题10的结论，因而成立. 也可以按照第十二章习题31那样利用极限过程来严格证明.

12. 计算下列各式：

(a) $\int_0^1 x^4(1-x)^3dx$，(b) $\int_0^2 \dfrac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$，(c) $\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}dy$.

解☞　(a) $\int_0^1 x^4(1-x)^3dx = B(5, 4) = \dfrac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(5+4)} = \dfrac{4!3!}{8!} = \dfrac{1}{280}$.

(b) 设 $x = 2v$，则

$$\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx = 4\sqrt{2}\int_0^1 \frac{v^2}{\sqrt{1-v}}dv = 4\sqrt{2}\int_0^1 v^2(1-v)^{-1/2}dv$$

$$= 4\sqrt{2}B\left(3, \frac{1}{2}\right) = \frac{4\sqrt{2}\Gamma(3)\Gamma(1/2)}{\Gamma(7/2)} = \frac{64\sqrt{2}}{15}.$$

(c) 设 $y^2=a^2x$，即 $y=a\sqrt{x}$，则

$$\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}\,dy = a^6\int_0^1 x^{3/2}(1-x)^{1/2}dx = a^6B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{a^6\Gamma(5/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(4)}=\frac{\pi}{16}a^6.$$

13. 证明$\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta d\theta=\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$，$m$，$n>0$.

证明 ☞　由习题10,11即可得结论成立.

14. 计算：(a)$\int_0^{\pi/2}\sin^6\theta d\theta$，(b)$\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^5\theta d\theta$，(c)$\int_0^{\pi}\cos^4\theta d\theta$.

解 ☞　(a) 取 $2m-1=6,2n-1=0$. 即 $m=7/2$，$n=1/2$，由习题13,所求积分值为$\dfrac{\Gamma(7/2)\Gamma(1/2)}{2\Gamma(4)}$ $=\dfrac{5\pi}{32}$.

(b) 取 $2m-1=4,2n-1=5$,所求积分值为$\dfrac{\Gamma(5/2)\Gamma(3)}{2\Gamma(11/2)}=\dfrac{8}{315}$.

(c) $\int_0^{\pi}\cos^4\theta d\theta=2\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta d\theta$.

取 $2m-1=0$，$2n-1=4$，由习题13,积分值为$\dfrac{2\Gamma(1/2)\Gamma(5/2)}{2\Gamma(3)}=\dfrac{3}{8}\pi$.

15. 证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^p\theta d\theta$，且(a)若 p 是正偶数，则$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p\theta d\theta=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(p-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots p}\dfrac{\pi}{2}$；(b) 若 p 是正奇数，则$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p\theta d\theta=\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdots(p-1)}{1\cdot3\cdot5\cdots p}$.

证明 ☞　由习题13,取 $2m-1=p$，$2n-1=0$，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p\theta d\theta=\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(p+1)\right]\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left[\frac{1}{2}(p+2)\right]}.$$

(a) 若 $p=2r$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p\theta d\theta=\frac{\left(r-\frac{1}{2}\right)\left(r-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2r(r-1)\cdots1}$$

$$=\frac{(2r-1)(2r-3)\cdots1}{2r(2r-2)\cdots2}\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2r-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2r}\frac{\pi}{2}.$$

(b) 若 $p=2r+1$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p\theta d\theta=\frac{r(r-1)\cdots1\cdot\sqrt{\pi}}{2\left(r+\frac{1}{2}\right)\left(r-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2r}{1\cdot3\cdot5\cdots(2r+1)}.$$

至于$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^p\theta d\theta$，只要取 $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$ 就可得到.

16. 计算：(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta$，　(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^2\theta d\theta$，

(c) $\int_0^{2\pi}\sin^8\theta d\theta$.

解 ☞　(a) 由习题 15

$$\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta d\theta=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{32}\text{(与习题 14(a) 比较)}.$$

(b) $\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta(1-\sin^2\theta)d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta-\int_0^{\pi/2}\sin^5\theta d\theta$

$=\frac{2}{1\cdot 3}-\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}=\frac{2}{15}.$

也可用类似于习题 14(b) 的方法求解.

(c) $\int_0^{2\pi}\sin^8\theta d\theta=4\int_0^{\pi/2}\sin^8\theta d\theta=4\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{\pi}{2}\right)=\frac{35}{64}\pi.$

17. 已知$\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}$，证明 $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$. $0<p<1$.

证明 ☞　设$\frac{x}{1+x}=y$，或 $x=\frac{y}{1-y}$.

$$\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{-p}dy=B(p,1-p)=\Gamma(p)\Gamma(1-p).$$

结论成立.

18. 计算$\int_0^\infty\frac{dy}{1+y^4}$.

证明 ☞　设 $y^4=x$，则

$\int_0^\infty\frac{dy}{1+y^4}=\frac{1}{4}\int_0^\infty\frac{x^{-3/4}}{1+x}dx=\frac{\pi}{4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.后一个结果由习题 17 取 $p=\frac{1}{4}$ 得到.

19. 证明$\int_0^2 x\sqrt[3]{8-x^3}\,dx=\frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$.

证明 ☞　设 $x^3=8y$ 或 $x=2y^{1/3}$，则

$$\int_0^2 x\sqrt[3]{8-x^3}\,dx=\int_0^1 2y^{1/3}\sqrt[3]{8(1-y)}\,\frac{2}{3}y^{-\frac{2}{3}}dy$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^1 y^{-1/3}(1-y)^{1/3}dy=\frac{8}{3}B\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

$$=\frac{8}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{8}{9}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{9}\frac{\pi}{\sin\pi/3}$$

$$=\frac{16}{9\sqrt{3}}\pi.$$

斯特林公式

20. 证明：当 n 较大时，$n!\approx\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$.

证明 ☞　$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx=\int_0^\infty e^{n\ln x-x}dx. \tag{1}$$

由初等微积分理论，当 $x=n$ 时，函数 $x\ln x-x$ 有相对极大值. 于是，作代换 $x=n+y$，则(1)为

$$\Gamma(n+1)=e^{-n}\int_{-n}^\infty e^{n\ln(n+y)-y}dy=e^{-n}\int_{-n}^\infty e^{n\ln n+n\ln\left(1+\frac{y}{n}\right)-y}dy$$

$$=n^n e^{-n}\int_{-n}^\infty e^{n\ln\left(1+\frac{y}{n}\right)-y}dy \tag{2}$$

到目前为止所给的证明步骤都是严密的，下面的过程利用适当的极限理论可以很严密地给予证明．但证明过程较繁琐，因而这里只是形式上给予证明．

在(2)式中利用公式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots, \tag{3}$$

取 $x=\frac{y}{n}$，并设 $y=\sqrt{n}v$，得到

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1)&=n^n e^{-n}\int_{-n}^{\infty}e^{-y^2/2n+y^3/3n^2-\cdots}dy\\&=n^n e^{-n}\sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^{\infty}e^{-v^2/2+v^3/3\sqrt{n}-\cdots}dv.\end{aligned} \tag{4}$$

当 n 较大时

$$\Gamma(n+1)\approx n^n e^{-n}\sqrt{n}\int_{\infty}^{+\infty}e^{-v^2/2}dv=\sqrt{2n\pi}n^n e^{-n}. \tag{5}$$

狄利克雷积分

21． 计算 $I=\iiint\limits_V x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}dxdydz$，其中 V 是由曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和坐标平面所围成第一卦限的区域．

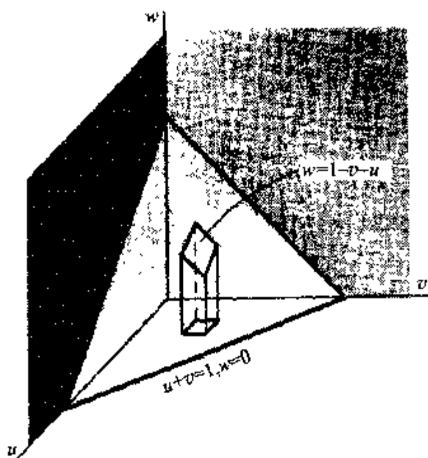


图 13-2

解 设 $x^2=u,\ y^2=v,\ z^2=w$，则

$$\begin{aligned}I&=\iiint\limits_{\mathscr{R}}u^{(\alpha-1)/2}v^{(\beta-1)/2}w^{(\gamma-1)/2}\frac{du}{2\sqrt{u}}\frac{dv}{2\sqrt{v}}\frac{dw}{2\sqrt{w}}\\&=\frac{1}{8}\iiint\limits_{\mathscr{R}}u^{\frac{\alpha}{2}-1}v^{\frac{\beta}{2}-1}w^{\frac{\gamma}{2}-1}dudvdw,\end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\mathscr{R}$ 是由平面 $u+v+w=1$ 和三个坐标平面所围成的区域(如图 13-2 所示)．于是

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{8}\int_0^1\int_0^{1-u}\int_0^{1-u-v}u^{\alpha/2-1}v^{\frac{\beta}{2}\cdot1}w^{\frac{\gamma}{2}-1}dudvdw\\&=\frac{1}{4\gamma}\int_0^1\int_0^{1-u}u^{\alpha/2-1}v^{\beta/2-1}(1-u-v)^{\gamma/2}dudv\\&=\frac{1}{4\gamma}\int_0^1u^{\alpha/2-1}\left\{\int_0^{1-u}v^{\beta/2-1}(1-u-v)^{\gamma/2}dv\right\}du.\end{aligned} \tag{2}$$

设 $v=(1-u)t$．则

$$\begin{aligned}\int_0^{1-u}v^{\frac{\beta}{2}-1}(1-u-v)^{\gamma/2}dv&=(1-u)^{(\beta+\gamma)/2}\int_0^1t^{\frac{\beta}{2}-1}(1-t)^{\gamma/2}dt\\&=(1-u)^{(\beta+\gamma)/2}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+1\right)}{\Gamma[(\beta+\gamma)/2+1]},\end{aligned}$$

因此，(2)式为

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{4\gamma}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+1\right)}{\Gamma[(\beta+\gamma)/2+1]}\int_0^1u^{\alpha/2-1}(1-u)^{(\beta+\gamma)/2}du\\&=\frac{1}{4\gamma}\frac{\Gamma(\beta/2)\Gamma(\gamma/2+1)}{\Gamma[(\beta+\gamma)/2+1]}\frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma[(\beta+\gamma)/2+1]}{\Gamma[(\alpha+\beta+\gamma)/2+1]}\\&=\frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma(\beta/2)\Gamma(\gamma/2)}{8\Gamma[(\alpha+\beta+\gamma)/2+1]}.\end{aligned} \tag{3}$$

此处用到了公式 $\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+1\right)$．

上述所计算的积分只是 p.256 页(20)中狄利克雷积分中的特例，狄利克雷的一般积分可以类似进

行计算.

22. 若密度为 $\sigma=x^2y^2z^2$,求由 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所围区域的质量.

解 ☞　所求质量

$$m=8\iiint_V x^2y^2z^2\,dxdydz,$$

其中 V 是曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和坐标平面所围区域在第一卦限部分.

在 p.256 页(20)式中的狄利克雷积分中,取 $b=c=a$, $p=q=r=2$, $\alpha+\beta+\gamma=3$, 则所求积分值为

$$m=8\frac{a^3\cdot a^3\cdot a^3}{2\cdot 2\cdot 2}\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(3/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(1+3/2+3/2+3/2)}=\frac{4\pi}{945}a^9.$$

杂题

23. 证明 $\int_0^1\sqrt{1-x^4}\,dx=\frac{\{\Gamma(1/4)\}^2}{6\sqrt{2\pi}}$.

证 ☞　设 $x^4=y$, 则

$$\int_0^1\sqrt{1-x^4}\,dx=\frac{1}{4}\int_0^1 y^{-3/4}(1-y)^{1/2}dy=\frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1/4)}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{6}\frac{\{\Gamma(1/4)\}^2}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

在习题 17 中取 $p=1/4$, $\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)=\pi\sqrt{2}$, 由此结论成立.

24. 证明倍量公式 $2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Gamma(2p)$.

证明 ☞　设 $I=\int_0^{\pi/2}\sin^{2p}x\,dx$, $J=\int_0^{\pi/2}\sin^{2p}2x\,dx$.

则

$$I=\frac{1}{2}B\left(p+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(p+1)}.$$

设 $2x=u$, 得 $J=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^{2p}u\,du=\int_0^{\pi/2}\sin^{2p}u\,du=I$.

但

$$J=\int_0^{\pi/2}(2\sin x\cos x)^{2p}dx=2^{2p}\int_0^{\pi/2}\sin^{2p}x\cos^{2p}x\,dx$$

$$=2^{2p-1}B\left(p+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}\right)=\frac{2^{2p-1}\left\{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma(2p+1)}.$$

由于 $I=J$,于是

$$\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2p\Gamma(p)}=\frac{2^{2p-1}\left\{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\right\}^2}{2p\Gamma(2p)}.$$

结论成立.

25. 证明 $\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}=\frac{\{\Gamma(1/4)\}^2}{4\sqrt{\pi}}$.

证明 ☞　与习题 23 类似,考察积分 $I=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$.

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}=\int_0^{\pi/2}\cos^{-\frac{1}{2}}\theta d\theta=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

$$=\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2\Big/2\sqrt{2\pi}.$$

但

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta/2-\sin^2\theta/2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta/2}}.$$

在最后一个积分中，设$\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}=\sin\varphi$，则

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta/2}}=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

于是结论成立.

26. 证明 $\int_0^\infty\frac{\cos x}{x^p}dx=\pi\Big/\left[2\Gamma(p)\cos\frac{p\pi}{2}\right]$，$0<p<1$.

证明 ☞　由于$\frac{1}{x^p}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty u^{p-1}e^{-xu}du$. 则

$$\int_0^\infty\frac{\cos x}{x^p}dx=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty\int_0^\infty u^{p-1}e^{-xu}\cos x\,du\,dx.$$

交换积分次序并利用第十二章习题22，得

$$\int_0^\infty\frac{\cos x}{x^p}dx=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty\frac{u^p}{1+u^2}du. \tag{1}$$

设 $u^2=v$，利用习题17结论，有

$$\int_0^\infty\frac{u^p}{1+u^2}du=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{v^{(p-1)/2}}{1+v}dv=\frac{\pi}{2\sin\frac{(p+1)\pi}{2}}=\frac{\pi}{2\cos p\pi/2}. \tag{2}$$

把(2)式代入(1)式，即得结论成立.

27. 计算 $\int_0^\infty\cos x^2dx$.

解 ☞　设 $x^2=y$，利用习题16，得

$$\int_0^\infty\cos x^2dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\cos y}{\sqrt{y}}dy=\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cos\pi/4}\right\}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}.$$

此积分和$\int_0^\infty\sin x^2dx$（见习题68(a)）称为菲涅尔积分.

补 充 习 题

Γ函数

28. 计算：(a) $\frac{\Gamma(7)}{2\Gamma(4)\Gamma(3)}$，(b) $\frac{\Gamma(3)\Gamma(3/2)}{\Gamma(9/2)}$，

(c) $\Gamma(1/2)\Gamma(3/2)\Gamma(5/2)$.

29. 计算：(a) $\int_0^\infty x^4e^{-x}dx$，(b) $\int_0^\infty x^6e^{-3x}dx$，

(c) $\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx$.

30. 求：(a) $\int_0^\infty e^{-x^3}dx$，(b) $\int_0^\infty\sqrt[4]{x}e^{-\sqrt{x}}dx$，

(c) $\int_0^\infty y^3e^{-2y^5}dy$.

31. 证明$\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-st}dt=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$，　$s>0$.

32. 证明 $\Gamma(n)=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{n-1}dx$，$n>0$.

33. 计算：(a) $\int_0^1(\ln x)^4dx$，(b) $\int_0^1(x\ln x)^3dx$，

(c) $\int_0^1\sqrt[3]{\ln(1/x)}dx$.

34. 计算：(a) $\Gamma(-7/2)$，(b) $\Gamma(-1/3)$.

35. 证明：$\lim\limits_{x\to-m}F(x)=\infty$，$m=0,1,2,\cdots$.

36. 证明：若 m 是正整数，则 $\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right)=\frac{(-1)^m2^m\sqrt{\pi}}{1\cdot3\cdot5\cdots(2m-1)}$.

37. 证明：$\Gamma'(1)=\int_0^{\infty}e^{-x}\ln xdx$ 是一个负数(记为 $-\gamma$，$\gamma=0.577215\cdots$，称为欧拉常数，见第十一章习题49).

B函数

38. 计算：(a) $B(3,5)$，(b) $B(3/2,2)$，(c) $B(1/3,2/3)$.

39. 求：(a) $\int_0^1x^2(1-x)^3dx$，(b) $\int_0^1\sqrt{(1-x)/x}dx$，

(c) $\int_0^2(4-x^2)^{3/2}dx$.

40. 计算：(a) $\int_0^4u^{3/2}(4-u)^{5/2}du$，(b) $\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}}$.

41. 证明 $\int_0^a\frac{dy}{\sqrt{a^4-y^4}}=\{\Gamma(1/4)\}^2/4a\sqrt{2\pi}$.

42. 计算：(a) $\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^4\theta d\theta$，(b) $\int_0^{2\pi}\cos^6\theta d\theta$.

43. 计算：(a) $\int_0^{\pi}\sin^5\theta d\theta$，(b) $\int_0^{\pi/2}\cos^5\theta\sin^2\theta d\theta$.

44. 证明 $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan\theta}d\theta=\pi/\sqrt{2}$.

45. 证明 (a) $\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^6}dx=\pi/3\sqrt{3}$，(b) $\int_0^{\infty}\frac{y^2}{1+y^4}dy=\pi/2\sqrt{2}$.

46. 证明 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2x}}{ae^{3x}+b}dx=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}a^{2/3}b^{1/3}}$，$a$，$b>0$.

47. 证明$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2x}}{(e^{3x}+1)^2}dx=2\pi/9\sqrt{3}$.（提示：在习题46中对 b 求导）.

48. 利用第十二章习题31的方法验证习题11中的步骤.

狄利克雷积分

49. 设密度为 $\sigma=\sqrt{xy}$，试求由 $x+y=1$，$x=0$，$y=0$ 所围部分在第一卦限区域的质量.

50. 在椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$内，任一点的密度等于该点到球心距离的平方，求椭球的质量.

51. 求由 $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=1$ 所围区域的体积.

52. 求由 $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=1$ 所围区域在第一卦限部分的形心.

53. 证明由 $x^m+y^m+z^m=a^m(m>0)$ 所围区域的体积为$\frac{8\{\Gamma(1/m)\}^3}{3m^2\Gamma(3/m)}a^3$.

54. 证明由 $x^m+y^m+z^m=a^m(m>0)$ 所围区域在第一卦限部分的形心为$\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=\frac{3\Gamma(2/m)\Gamma(3/m)}{4\Gamma(1/m)\Gamma(4/m)}a$.

杂题

55. 证明$\int_a^b(x-a)^p(b-x)^qdx=(b-a)^{p+q+1}B(p+1,q+1)$，$p>-1$，$q>-1$，$b>a$（提示：设 $x-a=(b-a)y$）.

56. 计算：(a) $\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$，(b) $\int_3^7\sqrt[4]{(7-x)(x-3)}dx$.

57. 证明：$\dfrac{|\Gamma(1/3)|^2}{\Gamma(1/6)} = \dfrac{\sqrt{\pi}\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$.

58. 证明 $B(m, n) = \dfrac{1}{2}\int_0^1 \dfrac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}dx$, $m, n > 0$. $\left(\text{提示:设 } y = \dfrac{x}{1+x}\right)$.

59. 若 $0 < p < 1$，证明$\int_0^{\pi/2} \tan^p\theta d\theta = \dfrac{\pi}{2}\sec\dfrac{p\pi}{2}$.

60. 证明$\int_0^1 \dfrac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(x+r)^{m+n}}dx = \dfrac{B(m, n)}{r^m(1+r)^{m+n}}$. 其中 m, n, r 是正数. $\left(\text{提示:设 } x = \dfrac{(r+1)y}{r+y}\right)$.

61. 证明$\int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta}{(a\sin^2\theta + b\cos^2\theta)^{m+n}}d\theta = \dfrac{B(m, n)}{2a^nb^m}$, $m, n > 0$.

62. 证明$\int_0^1 \dfrac{dx}{x^x} = \dfrac{1}{1^1} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots$.

63. 证明对 $m = 2, 3, 4, \cdots$，有 $\sin\dfrac{\pi}{m}\sin\dfrac{2\pi}{m}\cdots\sin\dfrac{(m-1)\pi}{m} = \dfrac{m}{2^{m-1}}$.（提示：利用因式分解 $x^m - 1 = (x-1)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{m-1})$，两边除以 $x-1$，再考虑当 $x \to 1$ 时的极限）.

64. 利用习题 63 证明$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x dx = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

65. 证明 $\Gamma\left(\dfrac{1}{m}\right)\Gamma\left(\dfrac{2}{m}\right)\Gamma\left(\dfrac{3}{m}\right)\cdots\Gamma\left(\dfrac{m-1}{m}\right) = \dfrac{(2\pi)^{(m-1)/2}}{\sqrt{m}}$.（提示：左端平方，然后利用习题 63 及 p.255 等式(8)）.

66. 证明$\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx = \dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.（提示：对习题 65 的结果取对数，然后 $m \to \infty$）.

67. (a) 证明$\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x^p}dx = \dfrac{\pi}{2\Gamma(p)\sin(p\pi/2)}$, $0 < p < 1$.

(b) 对 $p = 0$, $p = 1$ 讨论.

68. 计算：(a) $\int_0^\infty \sin x^2 dx$, (b) $\int_0^\infty x\cos x^3 dx$.

69. 证明 $\int_0^\infty \dfrac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx = -\pi^2\csc p\pi\cot p\pi$, $0 < p < 1$.

70. 证明$\int_0^\infty \dfrac{\ln x}{x^4+1}dx = \dfrac{-\pi^2\sqrt{2}}{16}$.

71. 设 $J_p(x) = \sum_{n=0}^\infty \dfrac{(-1)^n(x/2)^{p+2n}}{n!\Gamma(n+p+1)}$，$J_p(x)$ 称为贝塞尔函数(见 p.210(16)式)，其中 p 不一定是正整数，证明 $J_p(x)$ 满足方程 $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$.

72. 根据习题 71 证明：(a) $J_{1/2}(x) = \sqrt{2/\pi x}\sin x$, (b) $J_{-1/2}(x) = \sqrt{2/\pi x}\cos x$, (c) p.230 页中习题 107((b), (c) 中结论对任意 p 都成立.

73. 若 $a > 0$, $b > 0$, $4ac > b^2$，证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bxy+cy^2)}dxdy = \frac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

74. 由习题 20 的(4)式推出 p.255 的(13)式.

75. 求 p.255 的(15)式.

第十四章 傅里叶级数

周期函数

若对任意 x，有 $f(x+T)=f(x)$，其中 T 是一个正数，称 $f(x)$ 是具有周期 T 的周期函数，$T>0$ 中的最小值称为 $f(x)$ 的最小周期或单周期.

例： 因为 $\sin(x+2\pi)$，$\sin(x+4\pi)$，$\sin(x+6\pi)$，…都等于 $\sin x$，于是函数 $\sin x$ 有周期 2π，4π，6π，…，因此，2π 是 $\sin x$ 的最小周期；$\sin nx$ 或 $\cos nx$ 当 n 为正整数时周期为 $2\pi/n$；$\tan x$ 的周期为 π；一个常数以任何正数作为周期.

其他周期函数的例子如图 14-1(a)，(b)，(c)所示.

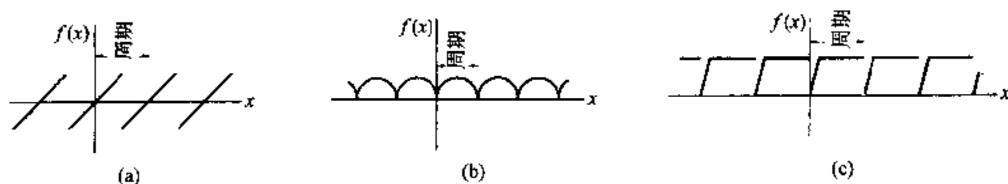


图 14-1

傅里叶级数

设 $f(x)$ 在区间 $(-L, L)$ 上有定义，在该区间外，有 $f(x+2L)=f(x)$，即 $f(x)$ 是以 $2L$ 为周期函数，则 $f(x)$ 的傅里叶级数或傅里叶表达式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{1}$$

其中傅里叶系数 a_n 和 b_n 为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx, \\ b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx, \end{cases} \quad n = a, 1, 2, \cdots, \tag{2}$$

系数 a_n，b_n 的另一种等价形式为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{c}^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx, \\ b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{c}^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx, \end{cases} \tag{3}$$

其中 c 是任意实数，取 $c=-L$，则(3)式就变为(2)式.

为了求出(1)式中的 a_0，在(2)式或(3)式中取 $n=0$. 例如，由(2)式，得 $a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx$. 注意到(1)式的常数项是 $\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx$，该式也称为 $f(x)$ 在一个周期的平均值.

若 $L=\pi$，则级数(1)和系数(2)或(3)式就很简单，此时，函数 $f(x)$ 的周期为 2π.

狄利克雷条件

假定

(1) $f(x)$ 在 $(-L, L)$ 上除有限个点外有定义且是单值的，

(2) $f(x)$在$(-L, L)$外是周期为$2L$的周期函数，

(3) $f(x)$和$f'(x)$在$(-L, L)$上分段连续，

则具有系数(2)或(3)式的级数(1)式(a)当x是连续点，收敛于$f(x)$；(b) 当x是间断点，收敛于$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$，其中$f(x+0)$和$f(x-0)$是$f(x)$在x点的右极限和左极限，分别用$\lim_{\varepsilon\to0^+}f(x+\varepsilon)$和$\lim_{\varepsilon\to0^+}f(x-\varepsilon)$表示，有关证明见习题18～23.

条件(1)，(2)，(3)是充分条件而不是必要条件，在实际应用中这三个条件一般都能满足，到目前为止，还不知道傅里叶级数收敛的充要条件.有趣的是仅有$f(x)$的连续性不能确保傅里叶级数的收敛.

奇函数和偶函数

若$f(-x)=-f(x)$，称$f(x)$为奇函数.x^3，x^5-3x^3+2x，$\sin x$，$\tan 3x$都是奇函数.

若$f(-x)=f(x)$，称$f(x)$为偶函数.x^4，$2x^6-4x^2+5$，$\cos x$，e^x+e^{-x}都是偶函数.

图14-1(a)和14-1(b)所描述的函数分别是奇函数和偶函数，但图14-1(c)所描绘的函数既不是奇函数也不是偶函数.

当奇函数展成傅里叶级数时，傅里叶级数只含正弦项，而偶函数展成傅里叶级数时，傅里叶级数只含余弦项(常数项看作是余弦项).

半幅傅里叶正弦或余弦级数

一个半幅傅里叶正弦或余弦级数是一个仅有正弦项或仅有余弦项的级数.若求一个已知函数的半幅级数，该函数通常要在$(0,L)$上有定义(即为$(-L, L)$的一半，这也是称为半幅的缘故)，但要把$f(x)$看作奇函数或偶函数，还必须把$f(x)$的定义域扩展到$(-L, 0)$上，于是

$$\begin{cases} a_n=0,\ b_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx,\ f(x)\text{ 展成半幅正弦级数}, \\ b_n=0,\ a_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx,\ f(x)\text{ 展成半幅余弦级数}. \end{cases} \tag{4}$$

帕塞瓦尔等式

若$f(x)$满足狄利克雷条件，a_n，b_n是关于$f(x)$的傅里叶系数，则有

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2). \tag{5}$$

傅里叶级数的微分和积分

傅里叶级数的微分和积分可利用p.224的定理来验证.这些定理通常对级数都是成立的，但要强调的是，这些定理提供的只是充分条件而不是必要条件.下面的定理在积分中是常常用到的.

定理 若$f(x)$在$[-L, L]$上分段连续，a，x均在$[-L, L]$内，则可以对$f(x)$的傅里叶级数从a到x进行积分，得到的级数一致收敛于$\int_a^x f(x)dx$.

傅里叶级数的复数表达式

利用欧拉公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,\ e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta, \tag{6}$$

其中 $i=\sqrt{-1}$(见 p.244 第十一章习题 48),$f(x)$的傅里叶级数又可以表示成

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n e^{in\pi x/L},\tag{7}$$

其中
$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-in\pi x/L}dx.\tag{8}$$

在(7)式中,假定 $f(x)$满足狄利克雷条件,且 x 是$f(x)$的连续点.如果 x 是$f(x)$的间断点,则(7)式左端应为$\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

边界值问题

边界值问题就是寻求满足边界条件的偏微分方程的确定解.而这类问题可以利用傅里叶级数来解决(见习题 24).

正交函数

若两个向量 $\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{B}=B_1\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+B_3\boldsymbol{k}$ 满足 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$ 或 $A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3=0$,称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是正交的(垂直).这个结论可以推广到分量超过三个的向量上去.虽然此时没有几何和物理意义.特别地,我们把函数 $A(x)$看作是一个有无穷多个分量的向量(即为无穷维向量),而每一个分量的值由某个区间$(a,\ b)$上的一个特殊值 x 代入$A(x)$来确定,很自然地定义:若

$$\int_a^b A(x)B(x)dx=0,\tag{9}$$

则称 $A(x)$, $B(x)$在$(a,\ b)$上正交.

若一个向量 $\boldsymbol{A}$ 的长度是一个单位,即 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=A^2=1$, 称该向量为单位向量或标准向量.把这个概念推广,我们得到:若函数 $A(x)$满足

$$\int_a^b\{A(x)\}^2dx=1,\tag{10}$$

称 $A(x)$在$(a,\ b)$上是标准化的.

基于上述,我们自然考虑函数集合$\{\phi_k(x)\}$, $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$, 且具有下面性质:

$$\int_a^b\phi_m(x)\phi_n(x)dx=0,\ m\neq n,\tag{11}$$

$$\int_a^b\{\phi_m(x)\}^2dx=1,\ m=1,2,\cdots,\tag{12}$$

可以看出,这个集合中每两个元素都是正交的,每个元素都是标准化的.我们称这样的函数集合为正交集.

把公式(11)和(12)并起来为下面的式子:

$$\int_a^b\phi_m(x)\phi_n(x)dx=\delta_{mn},\tag{13}$$

其中 δ_{mn}称为克罗内克符号,其定义为:若 $m\neq n$, $\delta_{mn}=0$,若 $m=n$, $\delta_{mn}=1$.

正如任一个三维向量 $\boldsymbol{r}$ 可以用一组相互正交的单位向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 来表示:$\boldsymbol{r}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$. 同样,我们也考虑把函数 $f(x)$用一系列正交函数来表示,于是

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n(x),\ a\leqslant x\leqslant b,\tag{14}$$

作为傅里叶级数的推广，该级数无论从理论上从应用的角度上都具有相当的重要性和实用性.

习题与解答

傅里叶级数

1. 画出下列函数的图形：

(a) $f(x)=\begin{cases}3, & 0<x<5,\\ -3, & -5<x<0,\end{cases}$ 周期 $T=10$.

解 因为周期为 10，在区间 $-5<x<5$ 内的图形(在图 14-2 中粗线画出部分)按周期性延拓到该区间外(用虚线表示). 要注意的是 $f(x)$ 在 $x=0, 5, -5, 10, -10, 15, -15$ 等处无定义，这些点均是 $f(x)$ 的间断点.

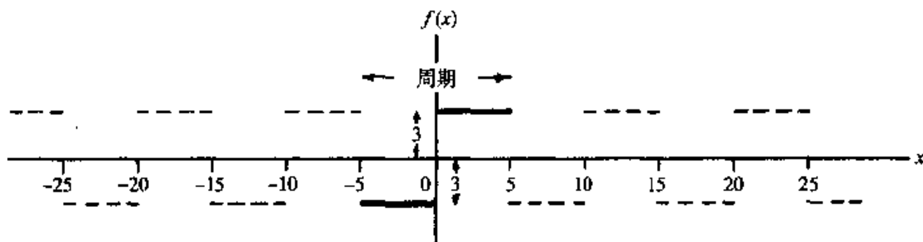


图 14-2

(b) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & \pi\leqslant x\leqslant 2\pi,\end{cases}$ 周期 $T=2\pi$.

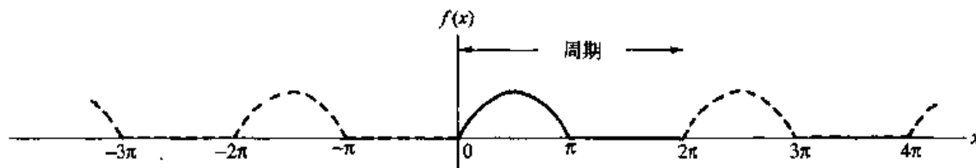


图 14-3

解 图形如图 14-3 所示，$f(x)$ 在整个实轴上有定义且是连续的.

(c) $\begin{cases}0, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & 2\leqslant x<4,\\ 0, & 4\leqslant x<6,\end{cases}$ 周期 $T=6$.

解 该函数的图形如图 14-4 所示，从图中可看出，$f(x)$ 对任意 x 都有定义，在 $x=\pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 10, \pm 14, \cdots$ 是不连续的.

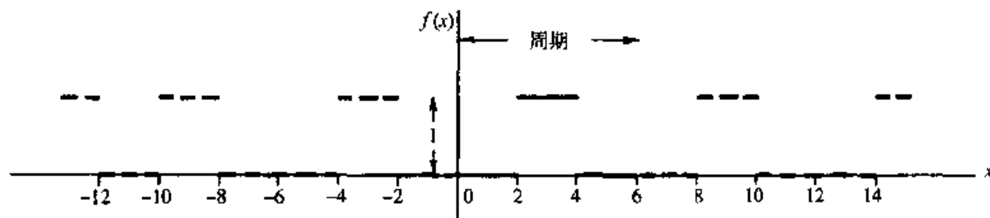


图 14-4

2. 证明 $\int_{-L}^{L}\sin\frac{k\pi}{L}x\,dx=\int_{-L}^{L}\cos\frac{k\pi}{L}x\,dx=0,\ k=1, 2, 3, \cdots$.

证明 ☞ $\int_{-L}^{L}\sin\frac{k\pi}{L}xdx=-\frac{L}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{L}\Big|_{-L}^{L}=-\frac{L}{k\pi}\cos k\pi+\frac{L}{k\pi}\cos(-k\pi)$

$=0.$

$\int_{-L}^{L}\cos\frac{k\pi}{L}xdx=\frac{L}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{L}\Big|_{-L}^{L}=\frac{L}{k\pi}\sin k\pi-\frac{L}{k\pi}\sin(-k\pi)$

$=0$

3. 证明:(a) $\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi}{L}xdx$

$$=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ L, & m=n.\end{cases}$$

(b) $\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx=0$, 其中 $m,\ n=1,2,3,\cdots$.

证明 ☞ (a) 由三角学知,$\cos A\cos B=\frac{1}{2}\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$, $\sin A\sin B=\frac{1}{2}\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$.

若 $m\neq n$, 由习题 2,

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left\{\cos\frac{(m-n)\pi}{L}x+\cos\frac{(m+n)\pi}{L}x\right\}dx=0.$$

类似地,若 $m\neq n$,

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi}{L}x\sin\frac{n\pi}{L}xdx=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left\{\cos\frac{(m-n)\pi}{L}x-\cos\frac{(m+n)\pi}{L}x\right\}dx=0.$$

若 $m=n$,则有

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(1+\cos\frac{2n\pi x}{L}\right)dx=L,$$

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{L}\right)dx=L.$$

注:若 $m=n=0$, 这二个积分值分别为 $2L$ 和 0.

(b) 由于 $\sin A\cos B=\frac{1}{2}\{\sin(A-B)+\sin(A+B)\}$, 由习题 2,若 $m\neq n$,则

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left\{\sin\frac{(m-n)\pi}{L}x+\sin\frac{(m+n)\pi}{L}x\right\}dx=0.$$

若 $m=n$,则

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\sin\frac{2n\pi x}{L}dx=0.$$

即使用 c, $c+2L$ 来代替(a), (b)中的积分限 $-L,L$,(a), (b)两式的结论仍然成立.

4. 如果级数 $A+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$在$(-L,L)$上一致收敛于 $f(x)$, 证明,对 $n=1,2,3,\cdots\cdots$,

(a) $a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$,

(b) $b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$,

(c) $A=\frac{a_0}{2}$.

证明 ☞ (a) 用 $\cos\frac{m\pi x}{L}$ 乘以

$$f(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right),\tag{1}$$

然后从 $-L$ 到 L 积分,并利用习题 3,有

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx$$

$$= A\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx + b_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right\}$$

$$= a_m L \qquad m = 1, 2, \cdots,$$

所以
$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx,\ m = 1, 2, 3, \cdots$$

(b) 用 $\sin\frac{m\pi x}{L}$ 乘以(1)式,然后从 $-L$ 到 L 积分,再利用习题 3,有

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx$$

$$= A\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx + b_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right\}$$

$$= b_m L,$$

于是
$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx, \quad m = 1, 2, 3, \cdots.$$

(c) 把(1)式从 $-L$ 到 L 积分,并利用习题 2,有

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2AL,\ 即\ A = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx.$$

在(a)的结论中取 $m = 0$,有 $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$,因而 $A = a_0/2$.

若把积分限 $-L$,L 换成 c,$c+2L$,上面的结论仍然成立.

注意在上述积分过程中,积分号和求和号是可以交换的,这是因为我们假定了级数在$(-L,L)$上一致收敛于 $f(x)$.即使这个假定得不到保证,由上述求得的 a_m,b_m 也称为$f(x)$的傅里叶系数,包含这些系数 a_n,b_n 的级数称为傅里叶级数.重要的是要了解级数在什么条件下收敛于 $f(x)$,由习题 18~23 可知,只要 $f(x)$满足狄利克雷条件就可以了.

5. (a) 求函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -5 < x < 0, \\ 3, & 0 < x < 5, \end{cases} \quad 周期\ T = 10$$

的傅里叶系数.

(b) 写出相应的傅里叶级数.

(c) 若要使 $f(x)$的傅里叶级数在 $-5 \leqslant x \leqslant 5$ 收敛于 $f(x)$.则 $f(x)$在 $x=-5, x=0, x=5$如何定义.

解 $f(x)$的图形如图 14-5 所示.

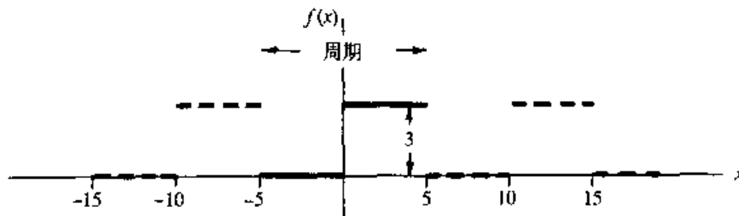


图 14-5

(a) 周期 $T=2L=10$, $L=5$. 考虑区间$(c, c+2L)=(-5, 5)$,即 $c=-5$, 则

当 $n \neq 0$, $a_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$

$$= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0}(0)\cos\frac{n\pi}{5}xdx + \int_{0}^{5}3\cos\frac{n\pi}{5}xdx\right\}$$
$$= \frac{3}{5}\int_{0}^{5}\cos\frac{n\pi}{5}xdx = \frac{3}{5}\left(\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\right)\Big|_{0}^{5}$$
$$= 0.$$

当 $n = 0$, $a_n = a_0 = \frac{3}{5}\int_{0}^{5}\cos\frac{0\pi x}{5}dx = \frac{3}{5}\int_{0}^{5}dx = 3$,

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$
$$= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0}0\sin\frac{n\pi x}{5}dx + \int_{0}^{5}3\sin\frac{n\pi}{5}xdx\right\}$$
$$= \frac{3}{5}\int_{0}^{5}\sin\frac{n\pi}{5}xdx = \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{5}x\right)\Big|_{0}^{5}$$
$$= \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}.$$

(b) 相应的傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{5}x$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{5} + \cdots\right).$$

(c) $f(x)$满足狄利克雷条件,因而在连续点,级数收敛于 $f(x)$,在间断点,级数收敛于 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. $x=-5, 0, 5$是$f(x)$的间断点.则级数收敛于$\frac{3+0}{2}=\frac{3}{2}$.(由图也可看出).如果把$f(x)$重新定义为

$$f(x)=\begin{cases}3/2, & x=-5,\\ 0, & -5<x<0,\\ 3/2, & x=0,\\ 3, & 0<x<5,\\ 3/2, & x=5,\end{cases}\qquad 周期\ T=10,$$

则上述得到的傅里叶级数在$-5\leqslant x\leqslant 5$上就收敛于$f(x)$.

6. 把 $f(x)=x^2$, $0<x<2\pi$ 展成傅里叶级数(a)周期为 2π;(b) 周期不确定.

解 (a) 具有周期为 2π 的函数 $f(x)$的图形如图 14-6 所示.

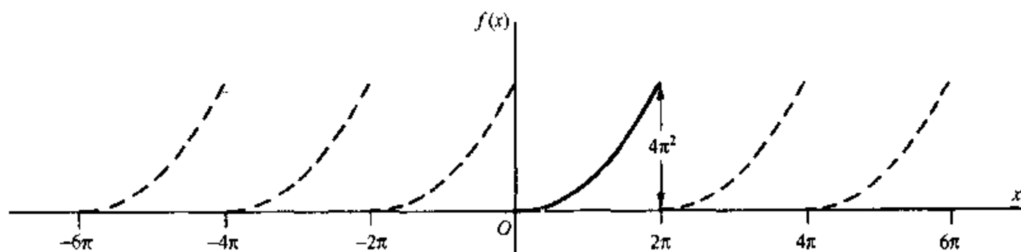


图 14-6

周期 $T=2L=2\pi$,即 $L=\pi$,取 $c=0$.则

若 $n\neq 0, a_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}x^2\cos nxdx$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{x^2\frac{\sin nx}{n} - 2x\frac{-\cos nx}{n^2} + 2\frac{-\sin nx}{n^3}\right\}\Big|_{0}^{2\pi} = \frac{4}{n^2}.$$

若 $n=0$, $c_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{8}{3}\pi^2$.

$$b_n=\frac{1}{L}\int_c^{c+2L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{x^2\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)-2x\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right)+2\frac{\cos nx}{n^3}\right\}\bigg|_0^{2\pi}=-\frac{4\pi}{n}.$$

因此, $f(x)=x^2=\frac{4}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$.

上式对 $\theta<x<2\pi$ 也成立. 在 $x=0, x=2\pi$ 处, 级数收敛于 $2\pi^2$.

(b) 若周期不确定, 一般说来, 傅里叶级数也不能惟一确定.

7. 利用习题6的结果, 证明 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$.

证明　在 $x=0$ 处, 习题6中的傅里叶级数为 $\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}$, 由狄利克雷条件, 级数在 $x=0$ 处收敛于 $\frac{1}{2}(0+4\pi^2)=2\pi^2$, 于是

$$\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}=2\pi^2,\ 即\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

奇函数和偶函数, 半幅傅里叶级数

8. 把下列函数按奇、偶函数或非奇非偶函数进行分类:

(a) $f(x)=\begin{cases}2, & 0<x<3,\\ -2, & -3<x<0,\end{cases}$ 周期 $T=6$.

(b) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0<x<\pi,\\ 0, & \pi<x<2\pi,\end{cases}$ 周期 $T=2\pi$.

(c) $f(x)=x(10-x)$, $0<x<\pi$, 周期 $T=10$.

解　(a) $f(x)$ 的图形如图 14-7 所示

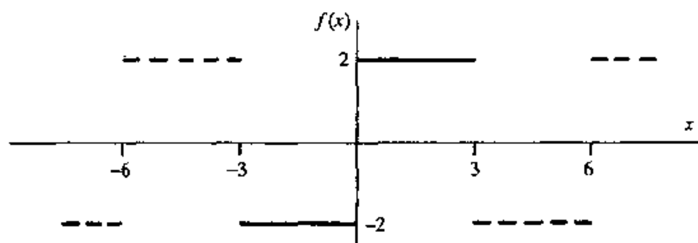


图 14-7

由图可看出, $f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$, 因此, 函数是奇函数.

(b) $f(x)$ 的图形如图 14-8.

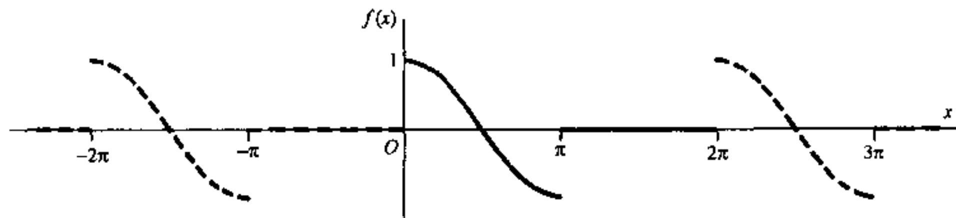


图 14-8

由图 14-8 可得出, 函数既不是奇函数也不是偶函数.

(c) $f(x)$ 的图形如图 14-9.

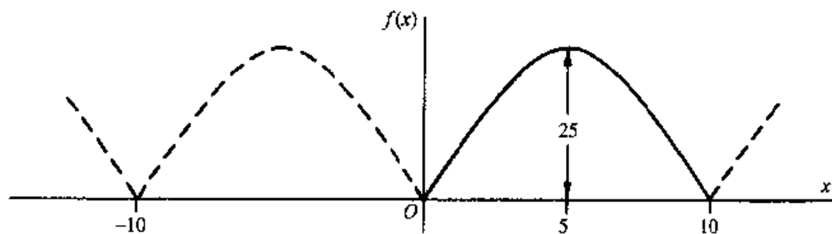


图 14-9

由图 14-9，$f(x)$是偶函数.

9. 说明一个偶函数的傅里叶展开式中不含正弦项.

解 **解法 1**　若 $b_n=0$，则级数就不含正弦项. 为此，我们来求出 b_n.

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$=\frac{1}{L}\int_{-L}^{0}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx+\frac{1}{L}\int_{0}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \tag{1}$$

在(1)式右端的第一个积分中，作代换 $x=-u$，则

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{0}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx=\frac{1}{L}\int_{0}^{L}f(-u)\sin\left(-\frac{n\pi u}{L}\right)du$$

$$=-\frac{1}{L}\int_{0}^{L}f(-u)\sin\frac{n\pi u}{L}du=-\frac{1}{L}\int_{0}^{L}f(u)\sin\frac{n\pi u}{L}du \tag{2}$$

$$=-\frac{1}{L}\int_{0}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,$$

其中，我们利用了偶函数定义 $f(-u)=f(u)$，并且积分变量 u 可以用其他任何变量来替换，因而最后一步中用 x 替换 u. 利用(2)式，(1)式为

$$b_n=-\frac{1}{L}\int_{0}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx+\frac{1}{L}\int_{0}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=0.$$

解法 2　设 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$，

则
$$f(-x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x-b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right).$$

若 $f(x)$ 是偶函数，有 $f(-x)=f(x)$. 因此

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}-b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right),$$

于是
$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}=0,$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L},$$

即 $f(x)$的傅里叶系数不含正弦项.

10. 如果 $f(x)$ 是偶函数，证明：(a) $a_n=\frac{1}{L}\int_{0}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$，(b) $b_n=0$.

证明　(a) $a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{L}\int_{-L}^{0}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$
$+\frac{1}{L}\int_{0}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx.$

令 $x=-u$，则

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{0}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{L}\int_{0}^{L}f(-u)\cos\left(\frac{-n\pi u}{L}\right)du$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^L f(u)\cos\frac{n\pi u}{L}du.$$

后一步用到了偶函数定义 $f(-u)=f(u)$. 于是

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(u)\cos\frac{n\pi u}{L}du + \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx.$$

(b) 利用习题 9 方法 1 即得.

11. 把 $f(x)=\sin x\,(0<x<\pi)$展开为傅里叶余弦级数.

解 若要使傅里叶级数不含正弦项,则函数 $f(x)$必须是偶函数. 因此,我们扩充 $f(x)$的定义域,使它成为一个偶函数(图 14-10 虚线部分),这样,$f(x)$在长度为 2π 的区间里就有定义了. 取周期为 2π,则 $2L=2\pi$,即 $L=\pi$.

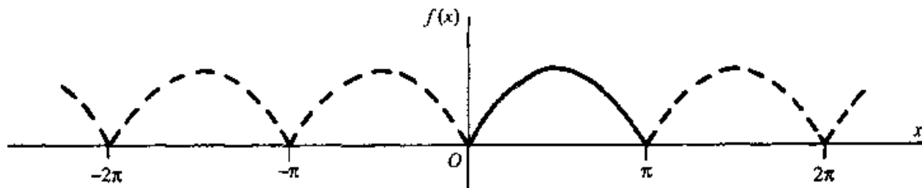


图 14-10

由习题 10, $b_n=0$.

若 $n\neq 1$. $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos nx dx$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \{\sin(x+n\pi)+\sin(x-n\pi)\}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1+\cos n\pi}{n+1} - \frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right\}$$

$$= \frac{-2(1+\cos n\pi)}{\pi(n^2-1)}.$$

若 $n=1$, $a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos x dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin^2 x}{2}\Big|_0^\pi = 0$,

若 $n=0$, $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^\pi = \frac{4}{\pi}$.

因此

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\cos nx$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \frac{\cos 6x}{6^2-1} + \cdots\right).$$

12. 把 $f(x)=x$ 在半幅 $0<x<2$ 内展成:(a) 正弦级数,(b) 余弦级数.

解 (a) 扩充 $f(x)$的定义域使得 $f(x)$为周期 $T=4$ 的奇函数(如图 14-11 所示),通常也把这样的扩充称为 $f(x)$ 的奇延拓. 此时 $2L=4$, $L=2$. 于是 $a_n=0$,

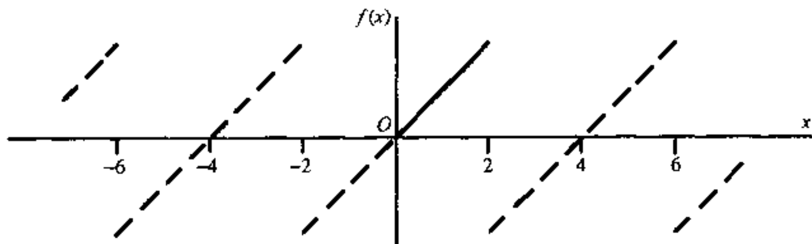


图 14-11

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx=\frac{2}{L}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi}{2}xdx$$

$$=\left\{x\frac{-2}{\pi n}\cos\frac{n\pi x}{2}-\frac{-4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right\}\Bigg|_0^2=\frac{-4}{n\pi}\cos n\pi,$$

因此，$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{n\pi}\cos n\pi\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}-\cdots\right)$$

(b) 延拓 $f(x)$ 的定义域，使得 $f(x)$ 是周期为4的偶函数（如图 14-12 所示），这种延拓称为 $f(x)$ 的偶延拓. $2L=4$, $L=2$, 则 $b_n=0$.

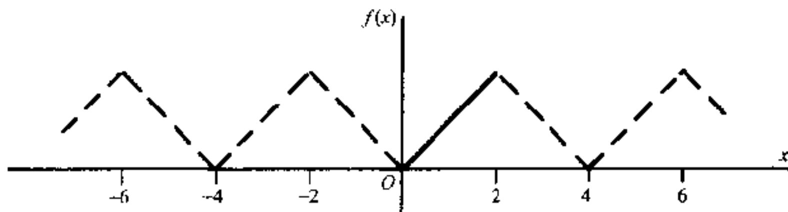


图 14-12

若 $n\neq 0$, $$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi}{2}xdx$$

$$=\left\{x\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}-\frac{-4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}x\right\}\Bigg|_0^2$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1).$$

若 $n=0$, $a_0=\int_0^2 xdx=2$.

于是，$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)\cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$=1-\frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2}+\cdots\right).$$

虽然函数 $f(x)=x$, $0<x<2$ 在(a), (b) 中有两种不同的级数表达式，但在 $0<x<2$ 内，两个级数是完全相等的.

帕塞瓦尔等式

13. 假定 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $(-L,L)$ 上一致收敛于 $f(x)$，证明帕塞瓦尔等式

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum(a_n^2+b_n^2),$$

式中的积分假定是存在的.

证明 ☞　若 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$，把 $f(x)$ 与自身相乘，然后从 $-L$ 到 L 逐项积分（因为级数是一致收敛的，逐项积分是可行的），得

$$\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2dx=\frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}f(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx+b_n\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right\}$$

$$=\frac{a_0^2}{2}L+L\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),\tag{1}$$

其中，我们用到了傅里叶系数的表达式：

$$\begin{cases}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=La_n,\ \int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=Lb_n,\\ \int_{-L}^{L}f(x)dx=La_0.\end{cases}\tag{2}$$

即使在较弱的条件下,(1)式两端所表示的帕塞瓦尔等式仍然是成立的.

14. (a) 写出习题 12(b)中的傅里叶级数对应的帕塞瓦尔等式;(b) 由(a)求级数$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}+\cdots$的和.

解 (a)由习题 12(b)知,$L=2,a_0=2,\ n\neq 0,a_n=\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)$; $b_n=0$, 则帕塞瓦尔等式为

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\{f(x)\}^2dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^2dx=\frac{2^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4\pi^4}(\cos n\pi-1)^2.$$

于是,
$$\frac{8}{3}=2+\frac{64}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right),$$

即
$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96}.$$

(b)
$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots\right)\\&=\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)+\frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right).\\&=\frac{\pi^4}{96}+\frac{S}{16}.\end{aligned}$$

于是
$$S=\pi^4/90.$$

15. 证明:对任意正整数 M,有

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{M}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2dx,$$

其中 a_n, b_n 是关于$f(x)$的傅里叶级数的系数,$f(x)$在$(-L,L)$上分段连续.

证明 取
$$S_M=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{M}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right).\tag{1}$$

对 $M=1,2,3,\cdots\cdots$, $\{S_M(x)\}$是 $f(x)$的傅里叶级数的部分和序列.由于$\{f(x)-S_M(x)\}^2$ 是非负函数,于是

$$\int_{-L}^{L}\{f(x)-S_M(x)\}^2dx\geqslant 0.\tag{2}$$

展开被积函数,有

$$2\int_{-L}^{L}f(x)S_M(x)dx-\int_{-L}^{L}S_M^2(x)dx\leqslant\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2dx,\tag{3}$$

用$2f(x)$乘以(1)式的两边,然后从 $-L$ 到 L 积分,再利用习题 13 公式(2),有

$$2\int_{-L}^{L}f(x)S_M(x)dx=2L\left\{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{M}(a_n^2+b_n^2)\right\}.\tag{4}$$

同样,对(1)式两边平方,然后从 $-L$ 到 L 积分,利用习题 3,有

$$\int_{-L}^{L}S_M^2(x)dx=L\left\{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{M}(a_n^2+b_n^2)\right\}.\tag{5}$$

把(4)、(5)两式代入(3)式,且两边除以 L,即得结论成立.

当 $M\to\infty$,就可得到贝塞尔不等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2dx.\tag{6}$$

若等式成立,就得到了帕塞瓦尔等式(习题 13).

我们把 $S_M(x)$看作为 $f(x)$的近似表达式,而(2)式的左端除以 $2L$,就表示了这个近似公式的平均平方误差.帕塞瓦尔等式表明当 $M\to\infty$,平均平方误差趋于零,而贝塞尔不等式表明了平均平方误差可能不趋于零.

上述结果与标准化正交集的完备性是有关的，例如，如果我们删去傅里叶的一项或更多项（例如 $\cos 4\pi x/L$），则无论我们取多少项，则平均平方误差都不可能趋于零. 三维向量也有一个类似的公式（见习题 60）.

傅里叶级数的微分和积分

16. (a)对习题 12(a)中的级数积分，求 $f(x)=x^2$, $0<x<2$ 的傅里叶级数；(b) 利用(a) 计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

解 ☞　(a) 由习题 12(a)，有

$$x=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}-\cdots\right),\tag{1}$$

两边从 0 到 x 积分（利用 p.268 中的定理），然后两边同乘以 2，有

$$x^2=C-\frac{16}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2}-\cdots\right),\tag{2}$$

其中 $C=\frac{16}{\pi^2}\left(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots\right)$.

(b) 为了确定 C 的值，注意到(2)式是 x^2, $0<x<2$ 的傅里叶展开式，$L=2$，于是

$$C=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx=4/3.$$

因此，由(a)中 C 的表达式，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{16}\times\frac{4}{3}=\frac{\pi^2}{12}.$$

17. 说明习题 12(a)中的级数不能逐项微分.

解 ☞　逐项微分所得到的级数为

$$2\left(\cos\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{2\pi x}{2}+\cos\frac{3\pi x}{2}-\cdots\right)$$

由于该级数的第 n 项不趋于零，因而级数对任意 x 均不收敛.

傅里叶级数的收敛性

18. 证明：(a) $\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos Mt=\frac{\sin\left(M+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}$,

(b) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(M+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}t}dt=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin\left(M+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}t}dt=\frac{1}{2}$.

证明 ☞　(a) $\cos nt\sin\frac{1}{2}t=\frac{1}{2}\left\{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t\right\}$,

然后从 n 取 1 加至 n 取 M，得

$$\sin\frac{1}{2}t\{\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos Mt\}$$

$$=\left(\sin\frac{3}{2}t-\sin\frac{t}{2}\right)+\left(\sin\frac{5}{2}t-\sin\frac{3}{2}t\right)+\cdots+\left(\sin\left(M+\frac{1}{2}\right)t-\sin\left(M-\frac{1}{2}\right)t\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sin\left(M+\frac{1}{2}\right)t-\sin\frac{1}{2}t\right\}.$$

等式两边同除以 $\sin\frac{t}{2}$，再各加上 $\frac{1}{2}$，即得结论成立.

(b)把(a)中的等式从 $-\pi$ 到 0 及从 0 到 π 积分，注意到所有余弦项的积分为零，于是，结论成立.

19. 证明:若 $f(x)$ 是分段连续,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0$.

证明 ☞ 由习题 15, $\frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ 是收敛的,于是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, 命题成立.

该命题有时也称为黎曼定理.

20. 若 $f(x)$ 是分段连续,证明 $\lim\limits_{M\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\left(M + \frac{1}{2}\right)x dx = 0$.

证明 ☞ $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\left(M + \frac{1}{2}\right)x dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x)\sin\frac{1}{2}x\right\}\cos Mx dx$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x)\cos\frac{1}{2}x\right\}\sin Mx dx.$$

把习题 19 中的 $f(x)$ 用 $f(x)\sin\frac{1}{2}x$ 或 $f(x)\cos\frac{1}{2}x$ 替换,显然若 $f(x)$ 是分段连续,则 $f(x)\sin\frac{x}{2}$ 和 $f(x)\cos\frac{x}{2}$ 也是分段连续的,由习题 19 的结果即可得命题成立.

把积分限 $-\pi$ 和 π 换成 a 和 b,命题仍然成立.

21. 设 $L = \pi$,即 $f(x)$ 的傅里叶级数的周期为 $2L = 2\pi$,证明

$$S_M(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t + x)\frac{\sin\left(M + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt.$$

证明 ☞ 利用 $L=\pi$ 的傅里叶系数公式,有

$$a_n\cos nx + b_n\sin nx = \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos nu du\right)\cos nx$$

$$+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin nu du\right)\sin nx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)(\cos nu\cos nx + \sin nu\sin nx)du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos n(u - x)du,$$

而 $a_0/2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du$,

则

$$S_M(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{M}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos n(u - x)du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{M}\cos n(u - x)\right\}du.$$

由习题 18,有

$$S_M(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{\sin\left(M + \frac{1}{2}\right)(u - x)}{2\sin\frac{1}{2}(u - x)}du,$$

设 $u - x = t$, 有

$$S_M(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t + x)\frac{\sin\left(M + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt.$$

由于被积函数是以周期为 2π 的周期函数,我们可以把区间 $(-\pi-x,\ \pi-x)$ 用任意长度为 2π 的区间来代替,特别取区间 $(-\pi,\pi)$,因而结论成立.

22. 证明: $S_M(x)-\left(\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{f(t+x)-f(x-0)}{2\sin\frac{1}{2}t}\right)\sin\left(M+\frac{1}{2}\right)tdt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{f(t+x)-f(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}\right)\sin\left(M+\frac{1}{2}\right)tdt.$$

证明 ☞　由习题 21

$$S_M(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(t+x)\frac{\sin\left(M+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(t+x)\frac{\sin\left(M+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}t}dt. \quad (1)$$

把习题 18(b)中的两积分式各自乘以 $f(x-0)$ 和 $f(x+0)$,再相加,得

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x-0)\frac{\sin\left(M+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+0)\frac{\sin\left(M+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt. \quad (2)$$

(1)式减(2)式,即得结论成立.

23. 若 $f(x)$,$f'(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上分段连续,证明

$$\lim_{M\to\infty}S_M(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

证明 ☞　由于 $f(x)$ 是分段连续,因而函数 $\dfrac{f(t+x)-f(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}$ 在 $0<t\leqslant\pi$ 上也分段连续. 又假定 $f'(x)$ 是分段连续的,因此,$f(x)$ 在每一点 x 的右导数存在,于是

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(t+x)-f(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t+x)-f(x+0)}{t}\,\frac{t}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t+x)-f(x+0)}{t}$$

是存在的. 由此可得 $\dfrac{f(t+x)-f(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}$ 在 $0\leqslant t\leqslant\pi$ 上是分段连续的;同理可得,$\dfrac{f(t+x)-f(x-0)}{2\sin\frac{1}{2}t}$ 在 $-\pi\leqslant t\leqslant0$ 上也是分段连续的,再由习题 20 和习题 22,有

$$\lim_{M\to\infty}S_M(x)-\left\{\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right\}=0,$$

即
$$\lim_{M\to\infty}S_M(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

边界值问题

24. 求边界值问题

$$\frac{\partial U}{\partial t}=3\frac{\partial^2U}{\partial x^2},\ t>0,\ 0<x<2,$$

$$U(0,\ t)=0,\ U(2,\ t)=0,\ t>0,$$

$$U(x,\ 0)=x,\ 0<x<2$$

的一个解 $U(x,\ t)$.

解 实际应用中一个通常的方法是假定偏微分方程有形如 $U(x, t)=X(x)T(t)$ 的解，其中 $X(x)$ 和 $T(t)$ 分别是 x, t 的函数. 然后确定 $X(x)$ 和 $T(t)$. 这种方法称为分离变量法.

把 $U(x, t)=X(x)T(t)$ 代入微分方程，得

$$\frac{\partial}{\partial t}(XT) = 3\frac{\partial^2}{\partial x^2}(XT), \tag{1}$$

或

$$X\frac{dT}{dt} = 3T\frac{d^2X}{dx^2}. \tag{2}$$

在此，我们把 $X(x)$ 和 $T(t)$ 简写为 X, T.

方程(2)又可写成

$$\frac{1}{3T}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}. \tag{3}$$

由于方程的左端仅依赖于变量 t，右端仅依赖于变量 x，且 x, t 是相互独立的变量. 显然方程两端都必须是常数 c.

由习题 47 可知，若 $c>0$，满足已知边界条件的解不存在. 于是，设 C 是一个负常数，记为 $c=-\lambda^2$. 由(3)式，我们得到两个常微分方程

$$\frac{dT}{dt} + 3\lambda^2 T = 0,\ \frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \tag{4}$$

的解分别为

$$T = C_1 e^{-3\lambda^2 t},\ X = A_1\cos\lambda x + B_1\sin\lambda x, \tag{5}$$

于是

$$U(x, t)=X(x)T(t)=e^{-3\lambda^2 t}(A\cos\lambda x + B\sin\lambda x), \tag{6}$$

其中 A, B 为常数.

下面确定常数 A, B，使得(6)式满足已知的边界条件，为了满足条件 $U(0, t)=0$，必须有

$$e^{-3\lambda^2 t}A = 0,\ 即\ A = 0. \tag{7}$$

因此(6)式为

$$U(x, t)=Be^{-3\lambda^2 t}\sin\lambda x. \tag{8}$$

欲满足条件 $U(2, t)=0$，则必须有

$$Be^{-3\lambda^2 t}\sin 2\lambda = 0. \tag{9}$$

若 $B=0$，则解(8)式必恒为零，为了避免这种情况发生，取

$$\sin 2\lambda = 0,\ 即\ 2\lambda = m\pi\ 或\ \lambda = \frac{m\pi}{2}, \tag{10}$$

其中 $m=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots$.

因此，满足前两个边界条件的解为

$$U(x, t) = B_m e^{-3m^2\pi^2 t/4}\sin\frac{m\pi}{2}x, \tag{11}$$

其中 B_m 代替 B 表明对不同的 m 值，可以取不同的常数.

现在考虑最后一个边界条件 $U(x, 0)=x$, $0<x<2$. 我们发现这个边界条件不可能满足(11)式. 我们姑且先承认这样一个事实：具有形如(1)式的解的和还是解(称为叠加原理). 因此，有

$$U(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{-3m^2\pi^2 t/4}\sin\frac{m\pi}{2}x. \tag{12}$$

由条件 $U(x, 0)=x$, $0<x<2$, 在(12)式取 $t=0$，(12)式就为

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\frac{m\pi x}{2},\ 0 < x < 2. \tag{13}$$

于是，上式等价于函数 $f(x)=x$ 在 $0<x<2$ 内展成正弦级数，而习题 12(a)给出了该函数在 $0<x<2$ 内的正弦级数，因此，$B_m = \frac{-4}{m\pi}\cos m\pi$，(12)式就为

$$U(x,\ t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{m\pi}\cos m\pi\right)e^{-3m^2\pi^2t/4}\sin\frac{m\pi}{2}x. \tag{14}$$

但在此得到的只是形式解，为了检验(14)确为方程的解，我们必须证明(14)式满足偏微分方程和边界条件. 这个证明包括两部分，验证对无穷级数可以逐项微分以及对无穷级数取极限. 利用第十一章的方法就能完成这项工作.

这里所考虑的边界值问题很好地说明了热传导理论，方程$\frac{\partial U}{\partial t}=k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$是位于 x 轴上 $x=0$ 和 $x=L$ 之间的金属细棒或金属线的热传导方程，其中金属棒(或线)的表面是绝缘的，热量既不能被吸收也不会发散. $U(x,\ t)$是 t 时刻金属棒(或线)某处 x 的温度，常数 $k=k/s\rho$(其中 K 是热导系数，s 是比热，ρ 是传导物质的密度)称为扩散系数. 边界条件 $U(0,\ t)=0$ 和 $U(L,\ t)=0$ 表明金属棒(或线)末端的温度在任何时刻均保持在零度，而 $U(x,\ 0)$表示了金属棒(或线)在某点 x 处的初始温度. 在上述问题中，金属棒(或线)的长度 $L=2$ 单位，而扩散系数 $k=3$ 单位.

正交函数

25. (a) 证明下列函数集合

$1,\ \sin\frac{\pi x}{L},\ \cos\frac{\pi x}{L},\ \sin\frac{2\pi x}{L},\ \cos\frac{2\pi x}{L},\ \sin\frac{3\pi x}{L},\ \cos\frac{3\pi x}{L},\ \cdots$在$(-L,L)$上为一正交集合.

(b) 确定(a)中集合的标准化常数使该集合在$(-L,L)$上是规范正交的.

证明 ☞　(a)由习题 2 和习题 3 即得结论成立.

(b) 由习题 3

$$\int_{-L}^{L}\sin^2\frac{m\pi x}{L}dx=L,\ \int_{-L}^{L}\cos^2\frac{m\pi x}{L}dx=L,$$

则
$$\int_{-L}^{L}\left(\sqrt{\frac{1}{L}}\sin\frac{m\pi x}{L}\right)^2dx=1,\ \int_{-L}^{L}\left(\sqrt{\frac{1}{L}}\cos\frac{m\pi x}{L}\right)^2dx=1,$$

而
$$\int_{-L}^{L}1^2dx=2L,\ 于是\int_{-L}^{L}\left(\frac{1}{\sqrt{2L}}\right)^2dx=1.$$

所求正交集为

$$\frac{1}{\sqrt{2L}},\ \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\frac{\pi x}{L},\ \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\frac{\pi x}{L},\ \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\frac{2\pi x}{L},\ \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\frac{2\pi x}{L},\ \cdots$$

杂题

26. 求 $f(x)=\cos\alpha x$，$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 的傅里叶级数，其中 $\alpha\neq0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots$.

解 ☞　我们取周期 $2L=2\pi$，即 $L=\pi$. 由于 $f(x)$为偶函数，所以 $b_n=0$.

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos\alpha x\cos nx dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\{\cos(\alpha-n)x+\cos(\alpha+n)x\}dx\\&=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}+\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n}\right\}=\frac{2\alpha\sin\pi\cos n\pi}{\pi(\alpha^2\quad n^2)},\\a_0&=\frac{2\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}.\end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned}\cos\alpha x&=\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{\alpha^2-n^2}\cos nx\\&=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2}\cos x+\frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2}\cos 2x-\frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2}\cos 3xt\cdots\right).\end{aligned}$$

27. 证明 $\sin x=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\cdots$.

证明 ☞　在习题 26 的傅里叶级数中取 $x=\pi$，则

$$\cos\alpha\pi = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-1} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2} + \cdots\right),$$

即
$$\pi\cot\alpha\pi - \frac{1}{\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2} + \cdots, \tag{1}$$

这是余切函数展成部分分式的一个表达式.由魏尔斯特拉斯 M 检验法,(1)式右端的级数当 $0\leqslant|\alpha|\leqslant|x|<1$ 时一致收敛,而(1)式左端利用洛必达法则,当 $\alpha\to 0$ 时极限为零.因此,两边同时从 0 到 x 积分,得

$$\int_0^x\left(\pi\cot\alpha\pi - \frac{1}{\alpha}\right)d\alpha = \int_0^x \frac{2\alpha}{\alpha^2-1}d\alpha + \int_0^x \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2}d\alpha + \cdots,$$

$$\ln\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}\bigg|_0^x = \ln\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right) + \ln\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right) + \cdots,$$

即
$$\ln\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right) + \ln\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ln\left\{\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right\}$$

$$= \ln\left\{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right\}$$

因此,
$$\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

$$= \left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots, \tag{2}$$

把 x 换成 x/π,得

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\cdots. \tag{3}$$

上式称为 $\sin x$ 的无穷乘积,对任意 x 都成立.类似与一个多项式进行因式分解,上式也称为把 $\sin x$ 进行因式分解.

28. 证明 $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdots}$.

证明 在习题 27(2)式中取 $x=1/2$,则

$$\frac{2}{\pi} = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)\cdots = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\right)\cdots$$

两边取倒数即得结论.该式通常称为 Wallis 乘积.

补充习题

傅里叶级数

29. 画出下列函数的图形,并利用函数的奇偶性(如果有)求函数的傅里叶级数:

(a) $f(x)=\begin{cases}8, & 0<x<2,\\ -8, & 2<x<4,\end{cases}$ 周期为 4,

(b) $f(x)=\begin{cases}-x, & -4\leqslant x\leqslant 0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$ 周期为 8,

(c) $f(x)=4x,\ 0<x<10$, 周期为 10,

(d) $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x<3,\\ 0, & -3<x<0,\end{cases}$ 周期为 6.

30. 求出上题中 $f(x)$ 的不连续点,并说明在这些点处,傅里叶级数收敛于何值.

31. 把周期为 8 的周期函数 $f(x)=\begin{cases}2-x, & 0<x<4,\\ x-6, & 4<x<8\end{cases}$ 展成傅里叶级数.

32. (a) 把函数 $f(x)=\cos x$, $0<x<\pi$ 展成傅里叶余弦级数,

(b) $f(x)$ 在 $x=0$, $x=\pi$ 为何值, 它的傅里叶级数在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上收敛于 $f(x)$.

33. (a) 设 $f(x)=\cos x$, $0<x<\pi$, 如果周期为 π, 求 $f(x)$ 的傅里叶级数;(b) 与习题 32 的结果比较说明二者的相似性和差别在何处.

34. 把 $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<4,\\ 8-x, & 4<x<8\end{cases}$ 展成(a)正弦级数;(b)余弦级数.

35. 证明:对 $0\leqslant x\leqslant\pi$,

(a) $x(\pi-x)=\dfrac{\pi^2}{6}-\left(\dfrac{\cos 2x}{1^2}+\dfrac{\cos 4x}{2^2}+\dfrac{\cos 6x}{3^2}+\cdots\right)$,

(b) $x(\pi-x)=\dfrac{8}{\pi}\left(\dfrac{\sin x}{1^3}+\dfrac{\sin 3x}{3^3}+\dfrac{\sin 5x}{5^3}+\cdots\right)$

36. 利用上题证明:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$,　(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$,　(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^2}{32}$.

37. 证明 $\dfrac{1}{1^3}+\dfrac{1}{3^3}-\dfrac{1}{5^3}-\dfrac{1}{7^3}+\dfrac{1}{9^3}+\dfrac{1}{11^3}-\cdots=\dfrac{3\pi^2\sqrt{2}}{16}$.

傅里叶级数的微分和积分

38. (a) 证明当 $-\pi<x<\pi$, 有

$$x=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\right)$$

(b) 对(a)中式子积分, 证明当 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, 有

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\cdots\right)$$

(c) 对(b)中式子积分, 证明当 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 时, 有

$$x(\pi-x)(\pi+x)=12\left(\frac{\sin x}{1^3}-\frac{\sin 2x}{2^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}-\cdots\right)$$

39. (a) 若 $-\pi<x<\pi$, 证明:

$$x\cos x=-\frac{1}{2}\sin x+2\left(\frac{2}{1.3}\sin 2x-\frac{3}{2.4}\sin 3x+\frac{4}{3.5}\sin 4x-\cdots\right).$$

(b) 利用(a)证明:当 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 时, 有

$$x\sin x=1-\frac{1}{2}\cos x-2\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}-\frac{\cos 3x}{2\cdot 4}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}-\cdots\right).$$

40. 通过对习题 35(b)中式子微分, 证明当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时, 有

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right).$$

帕塞瓦尔等式

41. 利用习题 35 和帕塞瓦尔等式, 证明:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$.

42. 证明 $\dfrac{1}{1^2\cdot 3^2}+\dfrac{1}{3^2\cdot 5^2}+\dfrac{1}{5^2\cdot 7^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2-8}{16}$

(提示:利用习题 11).

43. 证明:(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$.

44. 证明 $\dfrac{1}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}+\dfrac{1}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}+\dfrac{1}{3^2\cdot 4^2\cdot 5^2}+\cdots=\dfrac{4\pi^2-39}{16}$.

边界值问题

45. (a) 解方程$\frac{\partial U}{\partial t}=2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$，初始条件 $U(0,t)=0$，$U(4,t)=0$，$U(x,0)=3\sin\pi x-2\sin5\pi x$，其中 $0<x<4$，$t>0$.

(b) 给出习题和解的物理意义

46. 解方程$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$，满足条件 $U(0,t)=0$，$U(6,t)=0$，

$U(x,0)=\begin{cases}1, & 0<x<3,\\ 0, & 3<x<6,\end{cases}$并说明物理意义.

47. 证明若 p.282 公式(3) 的两端都是常数 c，且 $c\geqslant0$，则没有满足边界值问题的解.

48. 一条长度为 π，柔韧的金属线拉直固定在 x 轴上，它的两端在 $x=0$，$x=\pi$ 点处，在微小振动下，某时刻 t 在某点 x 处的偏离 x 轴的距离为 $Y(x,t)$，并满足方程$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$，其中 $a^2=T/\rho$，T 为张力，ρ 为单位长度的质量.

(a) 求该方程(有时称为波方程)(其中 $a^2=4$) 满足 $Y(0,t)=0$，$Y(\pi,t)=0$，$Y(x,0)=0.1\sin x+0.01\sin4x$，$Y_t(x,0)=0$，$0<x<\pi$，$t>0$ 的解.

(b) 说明(a) 中边界条件和解的物理意义.

49. (a) 求满足条件 $Y(0,t)=0$，$Y(2,t)=0$，$Y(x,0)=0.05x(2-x)$，$Y_t(x,0)=0$ $(0<x<2$，$t>0)$ 的方程$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ 的解.

(b) 说明物理意义.

50. 解边界值问题$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$，$U(0,t)=1$，$U(\pi,t)=3$，$U(x,0)=2$(提示:取 $U(x,t)=V(x,t)+F(x)$，选择 $F(x)$ 使 $V(x,t)$ 的微分方程和边界条件简化).

51. 给出习题 50 的物理意义.

52. 求习题 49 中满足边界条件 $Y(x,0)=0$，$Y_t(x,0)=0.05x(2-x)$ 的微分方程的解，并给出物理意义.

53. 验证习题 24 的边界值问题的解为 p.308 公式(14).

杂题

54. 若 $-\pi<x<\pi$，$\alpha\neq0,\pm1,\pm2,\cdots$，证明：

$$\frac{\pi\sin\alpha x}{\alpha\sin\alpha\pi}=\frac{\sin x}{1^2-\alpha^2}-\frac{2\sin2x}{2^2-\alpha^2}+\frac{3\sin3x}{3^2-\alpha^2}-\cdots.$$

55. 若 $-\pi<x<\pi$，证明：

(a) $\frac{\pi\sinh\alpha x}{2\sinh\alpha\pi}=\frac{\sin x}{\alpha^2+1^2}-\frac{2\sin2x}{\alpha^2+2^2}+\frac{3\sin3x}{\alpha^2+3^2}-\cdots$,

(b) $\frac{\pi}{2}\frac{\cosh\alpha x}{\cosh\alpha\pi}=\frac{1}{2\alpha}-\frac{\alpha\cos x}{\alpha^2+1^2}+\frac{\alpha\cos2x}{\alpha^2+2^2}-\cdots$.

56. 证明 $\sinh x=x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\cdots$.

57. 证明 $\cos x=\left(1-\frac{4x^2}{\pi}\right)\left(1-\frac{4x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{(3\pi)^2}\right)\cdots$

(提示：$\cos x=\sin2x/2\sin x$.)

58. 证明：(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15\cdots}{2\cdot2\cdot6\cdot6\cdot10\cdot10\cdot14\cdot14\cdots}$,

(b) $\pi\sqrt{2}=4\left(\frac{4\cdot4\cdot8\cdot8\cdot12\cdot12\cdot16\cdot16\cdots}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17\cdots}\right)$.

59. (a) 若 $\alpha\neq0,\pm1,\pm2,\cdots$，证明

$$\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}=\frac{1}{\alpha}-\frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2}+\frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2}-\frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2}+\cdots.$$

(b) 若 $0<\alpha<1$，证明

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}-x^{-\alpha}}{1+x}dx = \frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2} + \cdots.$$

(c) 由(a),(b) 及第十三章习题 17,证明

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi},\ 0 < \alpha < 1.$$

(提示:对(a) 利用习题 26;对(b) 把已知积分看着两个积分的和,第一个积分从 0 积到 1,第二个积分从 1 积到 ∞,并在后一个积分中设 $x = \frac{1}{y}$,即可得$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}-x^{-\alpha}}{1+x}dx$. 利用求和公式$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots$ 可求得最后一个式子).

60. 设 $\boldsymbol{r}$ 是任一三维向量,证明:

(a) $(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{i})^2 + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{j})^2 \leqslant (\boldsymbol{r})^2$,

(b) $(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{i})^2 + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{j})^2 + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k})^2 = \boldsymbol{r}^2$,

并结合贝塞尔不等式和帕塞瓦尔等式对上述两式加以讨论.

61. 若 $\{\phi_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ 在 (a, b) 上是正交的,证明$\int_a^b \left\{f(x) - \sum_{n=1}^\infty C_n\phi_n(x)\right\}^2 dx$ 当 $C_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x)dx$ 时取最小值,并讨论该结论与傅里叶级数的关系.

第十五章　傅里叶积分

傅里叶积分

设 $f(x)$ 满足下列条件:

1. $f(x)$ 在任一有限区间 $(-L, L)$ 上满足狄利克雷条件(p.267);

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛,即 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积,

则傅里叶积分定理为:若 x 是 $f(x)$ 的连续点,则

$$f(x) = \int_0^{\infty} (A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x) d\alpha, \tag{1}$$

其中

$$\begin{cases} A(\alpha) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x dx, \\ B(\alpha) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x dx. \end{cases} \tag{2}$$

若 x 是 $f(x)$ 的间断点,与傅里叶级数类似,用 $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ 代替 $f(x)$. 要注意上述条件是充分的但不是必要的.

很明显,(1)和(2)式与傅里叶级数相应结论是很相似的,(1)式右端有时也称为 $f(x)$ 的傅里叶积分展开式.

傅里叶积分定理的等价形式

傅里叶积分定理也可写成下面形式:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos\alpha(x-u) du d\alpha, \tag{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i\alpha u} du \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i\alpha(u-x)} du d\alpha.$$

若 $f(x)$ 在 x 不连续,则左端以 $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ 来代替.

若 $f(x)$ 是偶函数或奇函数,则还可以简化上面式子.

若 $f(x)$ 为偶函数,则

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\alpha x d\alpha \int_0^{\infty} f(u)\cos\alpha u du. \tag{5}$$

若 $f(x)$ 为奇函数,则

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \sin\alpha x d\alpha \int_0^{\infty} f(u)\sin\alpha u du. \tag{6}$$

傅里叶变换

由(4)式,若取

$$F(\alpha)\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i\alpha u} du, \tag{7}$$

则

$$f(x)\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \tag{8}$$

函数 $F(\alpha)$称为 $f(x)$的傅里叶变换,记为 $F(\alpha)=\mathscr{F}\{f(x)\}$;函数 $f(x)$称为 $F(\alpha)$的傅里叶逆变换,记为 $f(x)=\mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)\}$.

注:在(7)、(8)两式积分号前面的常数取为 $1/\sqrt{2\pi}$,但是,也可取为任意常数,只要它们的乘积为 $1/2\pi$.(7)、(8)两式也称为对称形式.

若 $f(x)$是偶函数,则(5)式为

$$\begin{cases} F_c(\alpha) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty} f(u)\cos\alpha u du, \\ f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty} F_c(\alpha)\cos\alpha x d\alpha. \end{cases} \tag{9}$$

我们称 $F_c(\alpha)$和 $f(x)$为傅里叶余弦变换对.

若 $f(x)$是奇函数,则(6)式为

$$\begin{cases} F_s(\alpha) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty} f(u)\sin\alpha u du, \\ f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty} F_s(\alpha)\sin\alpha x d\alpha, \end{cases} \tag{10}$$

称 $F_s(\alpha)$和 $f(x)$为傅里叶正弦变换对.

傅里叶积分中的帕塞瓦尔等式

若 $F_s(\alpha)$和 $G_s(\alpha)$分别是 $f(x)$和 $g(x)$的傅里叶正弦变换,则

$$\int_0^{\infty} F_s(\alpha) G_s(\alpha) d\alpha = \int_0^{\infty} f(x) g(x) dx. \tag{11}$$

同理,若 $F_c(\alpha)$和 $G_c(\alpha)$分别是 $f(x)$,$g(x)$的傅里叶余弦变换,则

$$\int_0^{\infty} F_c(\alpha) G_c(\alpha) d\alpha = \int_0^{\infty} f(x) g(x) dx. \tag{12}$$

特别地,若 $f(x)=g(x)$, 则(11),(12)两式分别为

$$\int_0^{\infty} \{F_s(\alpha)\}^2 d\alpha = \int_0^{\infty} \{f(x)\}^2 dx, \tag{13}$$

$$\int_0^{\infty} \{F_c(\alpha)\}^2 d\alpha = \int_0^{\infty} \{f(x)\}^2 dx. \tag{14}$$

上述两式称为关于积分的帕塞瓦尔等式.对一般的傅里叶变换,也有类似的结论.若 $F(\alpha)$和 $G(\alpha)$分别为 $f(x)$和 $g(x)$的傅里叶变换,我们可以证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\overline{G(\alpha)} d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)} dx, \tag{15}$$

其中横线表示把 i 换成 $-i$ 而得到的共轭复数(见习题 30).

卷积定理

若 $F(\alpha)$和 $G(\alpha)$分别为 $f(x)$, $g(x)$的傅里叶变换,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)G(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)g(x-u)du. \tag{16}$$

我们把 $f,\ g$ 的卷积记为 $f*g$，定义为

$$f*g=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)g(x-u)du, \tag{17}$$

则(16)式也可以写成

$$\mathscr{F}\{f*g\}=\mathscr{F}[f]\mathscr{F}[g]. \tag{18}$$

换言之，两个函数卷积的傅里叶变换等于它们各自傅里叶变换的乘积.这也称为傅里叶变换的卷积定理.

习题与解答

傅里叶积分和傅里叶变换

1. (a) 求 $f(x)=\begin{cases}1,\ |x|<a,\\ 0,\ |x|>a\end{cases}$ 的傅里叶变换；

(b) 画出当 $a=3$ 时 $f(x)$和它的傅里叶变换图形.

解 ☞　(a) $f(x)$的傅里变换为

$$\begin{aligned}F(\alpha)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{i\alpha u}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}e^{i\alpha u}du\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\alpha u}\frac{1}{i\alpha}\Big|_{-a}^{a}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{i\alpha a}-e^{-i\alpha a}}{i\alpha}\right)\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha a}{\alpha},\ \alpha\neq 0.\end{aligned}$$

当 $\alpha=0$，得 $F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}a$.

(b) $a=3$ 时，$f(x)$和 $F(\alpha)$的图形如图 15-1 和 15-2 所示.

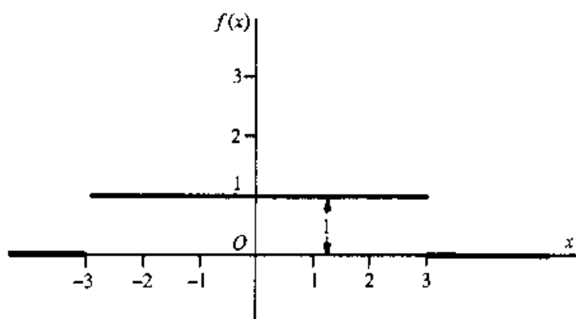


图 15-1

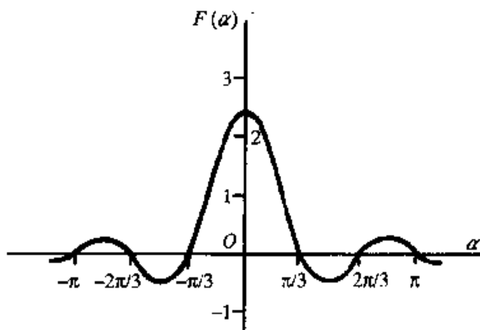


图 15-2

2. (a) 利用习题 1 的结果计算$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha a\cos\alpha x}{\alpha}d\alpha$.

(b) 推出$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du$ 的值.

解 ☞　(a) 由傅里叶积分定理，若 $F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{i\alpha u}du$，则 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha$. 因此，由例 1，得

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha a}{\alpha}e^{i\alpha x}d\alpha=\begin{cases}1, & |x|<a,\\ 1/2, & |x|=a,\\ 0, & |x|>a.\end{cases} \tag{1}$$

(1)式的左端又为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha a\cos\alpha x}{\alpha}d\alpha-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha a\sin\alpha x}{\alpha}d\alpha. \tag{2}$$

在(2)式的第二积分中，被积函数为奇函数，因而积分为零. 由(1)式和(2)式，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha a\cos\alpha x}{\alpha}d\alpha=\begin{cases}\pi, & |x|<a,\\ \pi/2, & |x|=a,\\ 0, & |x|>a.\end{cases} \tag{3}$$

(b) 取 $x=0$, $a=1$, 由(a)的结果，有$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha=\pi$, 由于被积函数为偶函数，因而得

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha=\frac{\pi}{2}.$$

3. 若 $f(x)$ 是偶函数，证明：(a) $F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(u)\cos\alpha u du$,

(b) $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F(\alpha)\cos\alpha x d\alpha$.

证明 ☞　我们知道

$$\begin{aligned}F(\alpha)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{i\alpha u}du\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha u du+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin\alpha u du.\end{aligned} \tag{1}$$

(a) 若 $f(u)$是偶函数，则 $f(u)\cos\lambda u$ 是偶函数，$f(u)\sin\lambda u$ 是奇函数. 因而(1)式右端第二个积分为零，于是(1)式为

$$F(\alpha)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}f(u)\cos\alpha u du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(u)\cos\alpha u du.$$

(b) 由(a)，$F(-\alpha)=F(\alpha)$，因此 $F(\alpha)$是偶函数，与(a)中类似方法即可得结论成立.

奇函数也有类似的结果，只要把余弦换成正弦即可.

4. 解积分方程

$$\int_0^{\infty}f(x)\cos\alpha x dx=\begin{cases}1-\alpha, & 0\leqslant\alpha\leqslant1,\\ 0, & \alpha>1.\end{cases}$$

解 ☞　设 $F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\cos\alpha x dx$, 取 $F(\alpha)=\begin{cases}\sqrt{2/\pi}(1-\alpha), & 0\leqslant\alpha\leqslant1,\\ 0, & \alpha>1,\end{cases}$ 由习题3，得

$$\begin{aligned}f(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F(\alpha)\cos\alpha x d\alpha=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-\alpha)\cos\alpha x d\alpha\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-\alpha)\cos\alpha x d\alpha=\frac{2(1-\cos x)}{\pi x^2}.\end{aligned}$$

5. 利用习题4证明$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}du=\frac{\pi}{2}$.

证明 ☞　由习题4

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\cos\alpha x dx=\begin{cases}1-\alpha, & 0\leqslant\alpha\leqslant1,\\ 0, & \alpha>1,\end{cases}$$

当 $\alpha\to 0^+$，两边取极限，有

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

而$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \int_0^\infty \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}dx$，设 $x=2u$，则

$\int_0^\infty \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}dx = \int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^2}du$，于是命题成立.

6. 证明$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{1+\alpha^2}d\alpha = \frac{\pi}{2}e^{-x}$，$x\geqslant 0$.

证明 ☞　取 $f(x)=e^{-x}$，由傅里叶积分定理，

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha x d\alpha\int_0^\infty f(u)\cos\alpha u du,$$

得
$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha x d\alpha\int_0^\infty e^{-u}\cos\alpha u du = e^{-x}.$$

由第十二章习题 22，
$$\int_0^\infty e^{-u}\cos\alpha u du = \frac{1}{1+\alpha^2},$$

因而
$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{1+\alpha^2}d\alpha = e^{-x},$$

即
$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{1+\alpha^2}d\alpha = \frac{\pi}{2}e^{-x}.$$

帕塞瓦尔等式

7. 利用习题 1 的傅里叶变换验证傅里叶积分中的帕塞瓦尔等式的正确性.

解 ☞　欲说明帕塞瓦尔等式的正确性，则须验证$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{+\infty}|F(\alpha)|^2dx$ 成立，

其中　$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<a,\\ 0, & |x|>a,\end{cases}$　$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha a}{\alpha}$，

而上式又等价于

$$\int_{-a}^{a}1^2dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin^2\alpha a}{\alpha^2}d\alpha,$$

也就是$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha a}{\alpha^2}d\alpha = 2\int_0^\infty \frac{\sin^2\alpha a}{\alpha^2}d\alpha = \pi a$，

即要验证　$\int_0^\infty \frac{\sin^2\alpha a}{\alpha^2}d\alpha = \frac{\pi}{2}a$.

设 $a\alpha = u$，利用习题 5，可知帕塞瓦尔等式是正确的. 该方法也可以直接用于计算$\int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^2}du$.

傅里叶积分定理的证明

8. 利用傅里叶级数的极限形式给出傅里叶积分定理的直观证明.

证明 ☞　设
$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{1}$$

其中 $a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(u)\cos\frac{n\pi u}{L}du$，$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(u)\sin\frac{n\pi u}{L}du$，把 a_n，b_n 代入(1)式(见第十四章习题 21)，

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(u)du+\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L}f(u)\cos\frac{n\pi}{L}(u-x)du. \tag{2}$$

若$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(u)|du$ 收敛，则(2)式右端的第一次当 $L\to\infty$ 时趋于零，而剩余部分取极限应为

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\frac{n\pi}{L}(u-x)du. \tag{3}$$

下面步骤是不严密的，只是直观上的证明.

设 $\Delta\alpha=\pi/L$，则(3)式为

$$f(x)=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\alpha F(n\Delta\alpha), \tag{4}$$

其中 $$F(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos(u-x)du. \tag{5}$$

但极限(4)等于

$$f(x)=\int_0^{\infty}F(\alpha)d\alpha=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\alpha(u-x)du.$$

上式右端正是傅里叶积分公式.

这仅仅是形式上的证明，若要严格证明，必须检验积分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha(u-x)dx$$

的收敛性. 这方面内容见习题 9~12.

9. 证明：(a) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\int_0^L\frac{\sin\alpha v}{v}dv=\frac{\pi}{2}$，

(b) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\int_{-L}^0\frac{\sin\alpha v}{v}dv=\frac{\pi}{2}$.

证明 ☞ (a) 设 $\alpha v=y$，则

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^L\frac{\sin\alpha v}{v}dv=\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\alpha L}\frac{\sin y}{y}dy=\int_0^{\infty}\frac{\sin y}{y}dy.$$

由第十二章习题 29，得

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin y}{y}dy=\frac{\pi}{2},$$

(b) 设 $\alpha v=-y$，则

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-L}^0\frac{\sin\alpha v}{v}dv=\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\alpha L}\frac{\sin y}{y}dy=\frac{\pi}{2}.$$

10. 黎曼定理：若 $F(x)$在(a,b)上是分段连续，则

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_a^bF(x)\sin\alpha xdx=0.$$

对余弦也有类似的结果(见习题 31). 利用该定理证明

(a) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\int_0^Lf(x+v)\frac{\sin\alpha v}{v}d\theta=\frac{\pi}{2}f(x+0)$，

(b) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\int_{-L}^0f(x+v)\frac{\sin\alpha v}{v}dv=\frac{\pi}{2}f(x-0)$，

其中 $f(x)$和 $f'(x)$分别在$(0,L)$和$(-L,0)$上分段连续.

证明 ☞ (a) 由习题 9(a)，欲证明上述结论，只要证明

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^L\{f(x+v)-f(x+0)\}\frac{\sin\alpha v}{v}dv=0$$

即可.

设 $F(v)=\frac{f(x+v)-f(x+0)}{v}$，由于 $\lim\limits_{v\to 0^+}F(v)$存在且 $f(x)$是分段连续，因此，$F(v)$在$(0,L)$上分段连续，由黎曼定理，即得证明结果.

(b) 利用习题 9(b)与(a)的证明类似可证明(b).

11. 若 $f(x)$ 再满足条件$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，证明：

(a) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\int_0^\infty f(x+v)\,\dfrac{\sin\alpha v}{v}dv=\dfrac{\pi}{2}f(x+0)$,

(b) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^0 f(x+v)\,\dfrac{\sin\alpha v}{v}dv=\dfrac{\pi}{2}f(x-0)$.

证明 ☞ (a)

$$\int_0^\infty f(x+v)\,\frac{\sin\alpha v}{v}dv$$
$$=\int_0^L f(x+v)\,\frac{\sin\alpha v}{v}dv+\int_L^\infty f(x+v)\,\frac{\sin\alpha v}{v}dv, \tag{1}$$
$$\int_0^\infty f(x+0)\,\frac{\sin\alpha v}{v}dv$$
$$=\int_0^L f(x+0)\,\frac{\sin\alpha v}{v}dv+\int_0^\infty f(x+0)\,\frac{\sin\alpha v}{v}dv, \tag{2}$$
$$\int_0^\infty |f(x+v)-f(x+0)|\,\frac{\sin\alpha v}{v}dv$$
$$=\int_0^L |f(x+v)-f(x+0)|\,\frac{\sin\alpha v}{v}dv$$
$$+\int_L^\infty |f(x+v)|\,\frac{\sin\alpha v}{v}dv-\int_0^\infty f(x+0)\,\frac{\sin\alpha v}{v}dv. \tag{3}$$

(3)式中的四个积分分别用 I,I_1,I_2,I_3 表示,因此有 $I=I_1+I_2+I_3$,

$$|I|\leqslant|I_1|+|I_2|+|I_3|. \tag{4}$$

而
$$|I_2|\leqslant\int_L^\infty\left|f(x+v)\frac{\sin v}{v}\right|d\theta\leqslant\frac{1}{L}\int_0^\infty|f(x+v)|\,dv,$$
$$|I_3|\leqslant|f(x+0)|\left|\int_L^\infty\frac{\sin\alpha v}{v}dv\right|.$$

由于$\int_0^\infty|f(x)|\,dx$ 和$\int_0^\infty\dfrac{\sin\alpha v}{v}dv$ 都是收敛的,我们可取充分大的 L,使得 $|I_2|\leqslant\varepsilon/3$,$|I_3|\leqslant\varepsilon/3$,我们也可以取充分大的 α,使得 $|I_1|<\varepsilon/3$.由(4)式,对充分大的 α 和 L,有 $|I|<\varepsilon$,于是结论成立.

(b) 与(a)中证明类似.

12. 证明傅里叶积分公式,其中 $f(x)$ 满足 p.288 条件.

证明 ☞ 我们欲证明 $\lim\limits_{L\to\infty}\dfrac{1}{\pi}\int_0^L\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos\alpha(x-u)\,du\,d\alpha$

$$=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

由于$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha(x-u)du\right|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|f(u)|\,du$,而$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(u)|\,du$ 收敛,由魏尔斯特拉斯法则,

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha(x-u)du$ 对任意 α 绝对收敛且一致收敛,因此,可以交换积分次序:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^L d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha(x-u)du=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)du\int_0^L\cos\alpha(x-u)du$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\,\frac{\sin L(u-x)}{u-x}du,$$

设 $u=x+v$,则

$$\frac{1}{\pi}\int_0^L d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha(x-u)du$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{\infty}^\infty f(x+v)\,\frac{\sin Lv}{v}dv$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x+v)\frac{\sin Lv}{v}dv+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x+v)\frac{\sin Lv}{v}dv,$$

当 $L\to\infty$,由习题 11,可得所求积分收敛于$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, 命题得证.

杂题

13. 求满足条件 $U(0,\ t)=0$, $U(x,\ 0)=\begin{cases}1,\ 0<x<1\\0,\ x\geqslant 1\end{cases}$,的微分方程$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$的解 $U(x,\ t)$,其中 $x>0$, $t>0$.

解 ☞　按第十四章习题 24 的方法可得满足第一个边界条件的偏微分方程的解为 $Be^{-\lambda^2 t}\sin\lambda x$,与第十四章习题 24 不同的是,边界条件没有对 λ 有任何限定,因而 λ 取任何值都是可能的,类似于证明习题 24 的方法,对所有可能的 λ 值求和,即对 λ 积分.因此,方程的解为

$$U(x,\ t)=\int_0^{\infty}B(\lambda)e^{-\lambda^2 t}\sin\lambda x d\lambda, \tag{1}$$

其中 $B(\lambda)$是 λ 的未知函数.由第二条件,有

$$\int_0^{\infty}B(\lambda)\sin\lambda x d\lambda=\begin{cases}1,\ 0<x<1,\\0,\ x\geqslant 1\end{cases}=f(x) \tag{2}$$

由傅里叶积分公式,有

$$B(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\sin\lambda x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{1}\sin\lambda x dx=\frac{2(1-\cos\lambda)}{\pi\lambda}, \tag{3}$$

因此,所求方程的解为

$$U(x,\ t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\right)e^{-\lambda^2 t}\sin\lambda x dx.$$

(见习题 26).

14. 证明 $e^{-x^2/2}$的傅里叶变换就是它自身.

证明 ☞　由于 $e^{-x^2/2}$ 是偶函数,它的傅里叶变换为$\sqrt{2/\pi}\int_0^{\infty}e^{-x^2/2}\cos x\alpha dx$. 设 $x=\sqrt{2}u$, 利用第十二章习题 32,

$$\sqrt{2/\pi}\int_0^{\infty}e^{-x^2/2}\cos x\alpha dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-u^2}\cos(\alpha\sqrt{2}u)du$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2/2}=e^{-\alpha^2/2}.\qquad 证毕.$$

15. 解积分方程

$$y(x)=g(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}y(u)r(x-u)du,$$

其中 $g(x)$和 $r(x)$是已知函数.

解 ☞　设 $y(x)$,$g(x)$和 $r(x)$的傅里叶变换存在,分别用 $Y(\alpha)$,$G(\alpha)$和 $R(\alpha)$表示,对上述积分方程两边作傅里叶变换,利用卷积定理,有

$$Y(\alpha)=G(\alpha)=\sqrt{2\pi}Y(\alpha)R(\alpha),$$

即

$$Y(\alpha)=\frac{G(\alpha)}{1-\sqrt{2\pi}R(\alpha)}.$$

于是

$$y(x)=\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{G(\alpha)}{1-\sqrt{2\pi}R(\alpha)}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(\alpha)}{1-\sqrt{2\pi}R(\alpha)}e^{-i\alpha x}d\alpha,$$

其中最后一个积分是假定存在的.

补充习题

傅里叶积分和傅里叶变换

16. (a) 求函数 $f(x)=\begin{cases}1/2\varepsilon, & |x|\leqslant\varepsilon,\\ 0, & |x|>\varepsilon\end{cases}$ 的傅里叶变换.

(b) 确定当 $\varepsilon\to0^+$ 傅里叶变换的极限,并对结果加以讨论.

17. (a) 求出函数 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 的傅里叶变换.

(b) 计算 $\int_0^\infty \frac{(x\cos x-\sin x)}{x^3}\cos\frac{x}{2}dx$.

18. 若 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x\geqslant1,\end{cases}$ 求(a)$f(x)$的傅里叶正弦变换;(b)$f(x)$的傅里叶余弦变换,并画出 $f(x)$及它的傅里叶变换的图形.

19. (a) 求 $e^{-x}(x\geqslant0)$的傅里叶正弦变换.

(b) 利用(a) 的结果证明 $\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-m}$, $m>0$.

(c) 利用傅里叶积分定理说明(b)的结果在 $m=0$ 处不成立.

20. 解 $Y(x)$的积分方程

$$\int_0^\infty Y(x)\sin xt\,dx=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1,\\ 2, & 1\leqslant t<2,\\ 0, & t\geqslant2,\end{cases}$$

并把求得的解代入方程验证解的正确性.

帕塞瓦尔等式

21. 利用帕塞瓦尔等式计算:

(a) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$, (b) $\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$.

(提示:分别用 e^{-x}, $x>0$ 的傅里叶正弦变换和傅里叶余弦变换.

22. 利用习题 18,证明:

(a) $\int_0^\infty\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)^2dx=\frac{\pi}{2}$, (b) $\int_0^\infty\frac{\sin4x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$.

23. 证明 $\int_0^\infty\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\right)^2dx=\frac{\pi}{15}$.

杂题

24. (a) 解满足条件 $U(0,t)=0$, $U(x,0)=e^{-x}$, $x>0$ 的偏微分方程 $\frac{\partial U}{\partial t}=2\frac{\partial^2U}{\partial x^2}$ 的解 $U(x,t)(x>0,t>0)$.

(b) 说明其物理意义.

25. 求满足条件 $U_x(0,t)=0$, $U(x,0)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ 0, & x>1\end{cases}$ 的偏微分方程 $\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}$ 的解 $U(x,t)(x>0,t>0)$.

26. (a) 证明习题 13 的解为

$$U(x,t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{t}}e^{-v^2}dv-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{(1-x)/2\sqrt{t}}^{(1+x)/2\sqrt{t}}e^{-v^2}dv.$$

(b) 把(a)中的函数代入方程 $\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}$ 证明该函数为方程的解且满足习题 13 的条件.

27. 设 $f(x)=g|x|=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$验证卷积定理的正确性.

28. 由 p.288 的公式(3)推出 p.288 的公式(4).

29. 证明 p.290 的结论(18).

$\left(\text{提示:若 } F(\alpha)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{i\alpha u}du,\ G(\alpha)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}g(v)e^{i\alpha v}dv.\right.$

$\left.\text{则}\quad F(\alpha)G(\alpha)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha(u+v)}f(u)g(v)dudv,\text{再令 } u+v=x\right).$

30. (a) 设 $F(\alpha)$ 和 $G(\alpha)$ 分别是 $f(x)$, $g(x)$ 的傅里叶变换,证明:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)\overline{G(\alpha)}d\alpha=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{g(x)}dx,$$

其中$\overline{G(\alpha)}$, $\overline{g(x)}$表示 $G(\alpha)$, $g(x)$的共轭复数.

(b)由(a)推出 p.289 的结论(11)~(14).

31. 证明黎曼定理(见习题 10).

第十六章　椭圆积分

第一类不完全椭圆积分

第一类不完全椭圆积分定义为

$$u = F(k,\phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \quad 0<k<1, \tag{1}$$

其中 ϕ 是 $F(k,\phi)$（即 u）的辐角，记为 $\phi = \mathrm{am}u$，k 为 u 的模，记为 $k = \mathrm{mod}u$. 此积分也称为第一类椭圆积分的勒让德形式.

若 $\phi = \frac{\pi}{2}$，积分称为第一类的完全积分，记为 $K(k)$ 或简记为 K. 在下面的讨论中，均假定 k 是一个已知常数.

第二类不完全椭圆积分

第二类不完全椭圆积分定义为

$$E(k,\phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta,\ 0<k<1. \tag{2}$$

上式也称为关于第二类椭圆积分的勒让德形式.

若 $\phi = \frac{\pi}{2}$，积分称为第二类完全积分，记为 $E(k)$ 或简记为 E. 这个积分值确定了一个椭圆的弧长，这也是把积分称为椭圆积分的原因.

第三类不完全椭圆积分

第三类不完全椭圆积分定义为

$$\Pi(k,n,\phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \quad 0<k<1, \tag{3}$$

同时，也称为关于第三类椭圆积分的勒让德形式，其中 n 是不为零的常数. 若 $n=0$，则(3)式就是(1)式.

若 $\phi = \pi/2$，积分称为第三类完全椭圆积分.

关于椭圆积分的雅可比形式

若对上述三种椭圆积分的勒让德形式作变换 $v = \sin\theta$，则(1),(2),(3)式为

$$F_1(k,x) = \int_0^{x} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}, \tag{4}$$

$$E_1(k,x) = \int_0^{x} \sqrt{\frac{1-k^2v^2}{1-v^2}}\,dv, \tag{5}$$

$$\Pi_1(k,n,x) = \int_0^{x} \frac{dv}{(1+nv^2)\sqrt{1-v^2)(1-k^2v^2)}}, \tag{6}$$

其中 $x = \sin\phi$，(4),(5),(6)式分别称为第一，第二，第三类椭圆积分的雅可比形式. 若 $x=1$，

上述积分就是完全椭圆积分.

可化为椭圆型的积分

若 $R(x,y)$ 是 x,y 的有理分式,即为 x,y 的两个多项式的商,则

$$\int R(x,y)dx \tag{7}$$

当 $y=\sqrt{ax+b}$ 及 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$(其中 a,b,c 为已知常数)可以利用初等函数(代数函数、三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数)来计算.

若 $y=\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}$ 或 $y=\sqrt{ax^2+bx^3+cx^2+dx+e}$(其中 a,b,c,d,e 为已知常数),(7)式可利用第一、第二、第三类的椭圆积分来计算,在特别情况下也可用初等函数来计算.

若 $y=\sqrt{p(x)}$,其中 $p(x)$ 是次数大于 4 的多项式,则(7)式可借助于超椭圆函数进行积分.

雅可比椭圆函数

关于第一类椭圆积分的雅可比形式的积分上限是通过 $x=\sin\phi$ 对应于勒让德形式的上限 ϕ.由于 $\phi=\mathrm{am}u$,因而 $x=\sin(\mathrm{am}u)$.于是,我们给出椭圆函数定义

$$x=\sin(\mathrm{am}u)\equiv \mathrm{sn}u, \tag{8}$$

$$\sqrt{1-x^2}=\cos(\mathrm{am}u)\equiv \mathrm{cn}u, \tag{9}$$

$$\sqrt{1-k^2x^2}=\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2u}\equiv \mathrm{dn}u, \tag{10}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\mathrm{sn}u}{\mathrm{cn}u}\equiv \mathrm{tn}u. \tag{11}$$

这些函数与三角函数有许多类似的重要性质.

还可以定义反椭圆函数.例如,若 $x=\mathrm{sn}u$,则 $u=\mathrm{sn}^{-1}x$.注意到 u 依赖于 k,为了强调这点,我们有时记为 $u=\mathrm{sn}^{-1}(x,k)$ 或 $u=\mathrm{sn}^{-1}x\,\mathrm{mod}k$.

Landen 变换

利用 Landen 变换

$$\tan\phi=\sin2\phi_1/(k+\cos2\phi_1),$$

或 $$k\sin\phi=\sin(2\phi_1-\phi), \tag{12}$$

我们可以证明

$$\int_0^\phi\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}=\frac{2}{k+1}\int_0^{\phi_1}\frac{d\phi_1}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\phi_1}}, \tag{13}$$

其中 $k_1=2\sqrt{k}/(1+k)$(见习题 61).于是

$$F(k,\phi)=\frac{2}{k+1}F(k_1,\phi_1). \tag{14}$$

显然 $k<k_1<1$,连续地使用 Landen 变换,我们就得到一模序列 k_n,$n=1,2,3,\cdots$,且满足 $k<k_1<\cdots<1$,我们可以证明 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$.因此

$$F(k,\phi)=\sqrt{\frac{k_1k_2k_3\cdots}{k}}\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\sqrt{\frac{k_1k_2k_3\cdots}{k}}\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Phi}{2}\right),\tag{15}$$

其中

$$k_1=\frac{2\sqrt{k}}{1+k},k_2=\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1},k_3=\frac{2\sqrt{k_2}}{1+k_2},\cdots,\text{且 }\Phi=\lim_{n\to\infty}\phi_n\tag{16}$$

利用(15),(16)两式,就可以算出 $F(k,\phi)$. 在实际应用中,只需经过有限次的变换,就可得到准确的结果.

习题与解答

椭圆积分

1. 证明:若 $0<k<1$,则

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2k^6+\cdots\right\}.$$

证明 ☞ 由二项式定理,

$$(1-x)^{1/2}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-x)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-x)^3+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots.$$

取 $x=k^2\sin^2\theta$,由级数的一致收敛性,我们对级数从 0 到 $\pi/2$ 逐次积分,得

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\int_0^{\pi/2}\left\{1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^4\sin^4\theta+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}k^6\sin^6\theta+\cdots\right\}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2k^6+\cdots\right\}.$$

积分中用到了第十三章习题 15.

2. 计算 $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$,把积分化为椭圆积分,计算到小数点后三位.

解 ☞ 设 $x=\pi/2-y$,则

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}=\int_0^{\pi/2}\frac{dy}{\sqrt{\cos y}}.$$

设 $\cos y=\cos^2u$,则 $-\sin ydy=-2\cos u\sin udu$,

$$dy=\frac{2\cos u\sin udu}{\sqrt{1-\cos^4u}}=\frac{2\cos u\sin udu}{\sqrt{1-\cos^2u}\sqrt{1+\cos^2u}}=\frac{2\cos u}{\sqrt{1-\cos^2u}}du,$$

因此
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dy}{\sqrt{\cos y}}=2\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1+\cos^2u}}=2\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{2-\cos^2u}}$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2u}}=\sqrt{2}F\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}K\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right),$$

把 $k=\sqrt{\frac{1}{2}}$ 代入习题 1 的结果中,得积分值为 2.622.

另一解法

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}=\int_0^{\pi/2}\frac{dy}{\sqrt{\cos y}}=\int_0^{\pi/2}\frac{dy}{\sqrt{\cos^2y/2-\sin^2y/2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{dy}{\sqrt{1-2\sin^2\frac{y}{2}}}.$$

设$\sqrt{2}\sin y/2=\sin\phi$，则$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{y}{2}dy=\cos\phi d\phi$，

$$dy=\frac{\sqrt{2}\cos\phi d\phi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\phi}},$$

于是
$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\phi}}=\sqrt{2}K\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

3. 利用椭圆积分计算$\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos x}dx$.

解 与习题2类似，设$\cos x=\cos^2 u$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos x}dx&=\int_0^{\pi/2}\cos u\left(\frac{2\cos u}{\sqrt{1+\cos^2 u}}\right)du\\&=2\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 u}{\sqrt{1+\cos^2 u}}du\\&=2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos^2 u}du-2\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1+\cos^2 u}}\\&=2\int_0^{\pi/2}\sqrt{2-\sin^2 u}du-2\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{2-\sin^2 u}}\\&=2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 u}du-\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 u}}.\\&=2\sqrt{2}E\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)-\sqrt{2}K\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right).\end{aligned}$$

4. 计算$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+4\sin^2 x}dx$.

解 $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+4\sin^2 x}dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+4(1-\cos^2 x)}dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{5-4\cos^2 x}dx$ 设$x=\frac{\pi}{2}-y$，则

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{5-4\cos^2 x}dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{4}{5}\sin^2 y}dy=\sqrt{5}E(\sqrt{4/5}).$$

5. 用不完全椭圆积分表示$\int_0^x\sqrt{1-4\sin^2 u}du$.

解 设$\sqrt{4\sin^2 u}=2\sin u=\sin\phi$，则$2\cos u du=\cos\phi d\phi$，$du=\frac{\cos\phi d\phi}{\cos u}\frac{\cos\phi d\phi}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\phi}}$，于是，

$$\begin{aligned}\int_0^x\sqrt{1-4\sin^2 u}du&=\int_0^\phi\cos\phi\frac{\cos\phi}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\phi}}d\phi=\frac{1}{2}\int_0^\phi\frac{\cos^2\phi}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\phi}}d\phi\\&=\frac{1}{2}\int_0^\phi\frac{-3+4\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\phi\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\phi}}d\phi\\&=-\frac{3}{2}\int_0^\phi\frac{d\phi}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\phi}}+2\int_0^\phi\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\phi}d\phi\\&=-\frac{3}{2}F\left(\frac{1}{2},\phi\right)+2E\left(\frac{1}{2},\phi\right),\end{aligned}$$

其中$\phi=\arcsin(2\sin x)$.

6. 化简 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-\cos x}}$ 为椭圆积分.

解 ☞ $2-\cos x=2-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=3-2\cos^2\frac{x}{2}$,则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-\cos x}}=\int \frac{dx}{\sqrt{3-2\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\cos^2\frac{x}{2}}}.$$

在后一个积分中,设 $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}-u$,则

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\cos^2\frac{x}{2}}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2 u}}$$

于是,原积分化为椭圆积分.

7. 证明 $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{2-\cos x}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{F\left(\sqrt{2/3},\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\sqrt{2/3},\frac{\pi}{4}\right)\right\}$.

证明 ☞ 由习题 6,取 $x/2=\frac{\pi}{2}-u$,当 $x=0,\frac{\pi}{2}$,$u=\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}$,

$$I=\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{2-\cos x}}=-\frac{2}{3}\int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{du}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2 u}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2 u}}-\int_0^{\pi/4} \frac{du}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2 u}}\right\}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{F\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

8. 求曲线 $y=\sin x\,(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 的弧长.

解 ☞ $S=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$

$$=2\int_0^{\pi/2}\sqrt{2-\sin^2 x}\,dx=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx=2\sqrt{2}E\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

9. 求椭圆 $x=a\sin\phi,y=b\cos\phi\,(a>b>0)$ 的弧长.

解 ☞ $S=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}\,d\phi$

$$=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\phi}\,d\phi=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}\,d\phi,$$

其中 $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}$ 是椭圆离心率的平方.

因此,弧长 $S=4aE\left(e,\frac{\pi}{2}\right)$ 或 $S=4aE(e)$.

10. 把积分 $\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1+k^2\sin^2\phi}}$ 表示成椭圆积分.

解 ☞ 设 $k\sin\phi=\tan u$,则 $k\cos\phi d\phi=\sec^2 u du$,

于是

$$\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1+k^2\sin^2\phi}}=\int_0^{u}\frac{\sec u}{k\cos\phi}du=\int_0^{u}\frac{\sec u}{\sqrt{k^2-\tan^2 u}}du$$

$$=\int_0^{u}\frac{du}{\sqrt{k^2\cos^2 u-\sin^2 u}}=\int_0^{u}\frac{du}{\sqrt{k^2-(k^2+1)\sin^2 u}}.$$

以下与习题 5 的解题过程类似.

设 $\sqrt{k^2+1}\sin u=k\sin x$,则 $\sqrt{k^2+1}\cos u du=k\cos x dx$,

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{k^2-(k^2+1)\sin^2 u}} = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-k^2/(k^2+1)\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}F\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+1}},x\right).$$

从上述步骤可以看到最后一个积分的上限 x 与原来积分的上限 ϕ 之间的关系为

$$x = \arcsin\left(\frac{\sqrt{k^2+1}\sin\phi}{\sqrt{1+k^2\sin^2\phi}}\right).$$

11. 利用椭圆积分计算下列积分：

(a) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)(9-x^2)}}$,

(b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+2x^2)}}$,

(c) $\int_4^6 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}}$.

解 (a) 设 $x=2\sin\theta$,则

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)(9-x^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{9-4\sin^2\theta}} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{3}F\left(\frac{2}{3},\frac{\pi}{2}\right).$$

(b) 设 $x=\tan\theta$,则

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+2x^2)}} = \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}\sqrt{1+2\tan^2\theta}}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+2\sin^2\theta}} = \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{2-\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2\theta}}.$$

再设 $\theta=\frac{\pi}{2}-\phi$,则

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\phi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{F\left(\sqrt{1/2},\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\sqrt{1/2},\frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

(c) 设 $\sqrt{x-3}=u$,即 $x=3+u^2$,则

$$\int_4^6 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}} = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{\sqrt{(u^2+2)(u^2+1)}}.$$

再设 $u=\tan\theta$,则

$$2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{\sqrt{(u^2+2)(u^2+1)}} = 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{d\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}} = \sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}}.$$

$$= \sqrt{2}\left\{F(\sqrt{1/2},\pi/3)-F(\sqrt{1/2},\pi/4)\right\}.$$

一般地,若 $P_3(x)$ 是一个具有实零点的三次多项式,则积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{P_3(x)}}$ 能按上述方法化成椭圆积分.

12. 计算 $\int_1^\infty \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}$.

解☞　设 $u=\sec\theta$，则

$$\int_1^{\infty}\frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sec\theta\tan\theta d\theta}{\sqrt{(\sec^2\theta-1)(\sec^2\theta+3)}}=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{4-3\sin^2\theta}}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}}$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma(\sqrt{3}/2,\pi/2).$$

13. 说明如何利用椭圆积分计算 $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}}$.

解☞　作公式线性变换 $x=\frac{at+b}{ct+d}$，选择 a,b,c,d 使的 $x=1,2,3$ 分别对应 $t=0,1,\infty$，由 $1=\frac{b}{d}$，$2=\frac{a-b}{c+d}$，$3=\frac{a}{c}$，得 $a=3d,b=d,c=d$，因此，$x=\frac{3t+1}{t+1}$利用此变换，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t+3)}},$$

再设 $t=u^2$，则

$$\int\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t+3)}}=\int\frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}.$$

利用习题 12 的方法即可求得.

一般地，若 $P_4(x)$是一个有实零点的四次多项式，利用上述方法，能把积分 $\int\frac{dx}{\sqrt{P_4(x)}}$ 化成椭圆积分. 若部分或全部零点是复数，也可用类似的方法(见习题 14，在习题 14 中使用的方法也可用在习题 13 中).

14. 利用椭圆积分计算 $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+10)(x^2+x+7)}}$.

解☞　这里根号中的多项式无实零点，因此不能运用例 13 的方法，我们可采用下述方法. 设 $x=y+\alpha$，其中 α 为常数，则

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+10)(x^2+x+7)}}$$

$$=\int\frac{dy}{\sqrt{\{y^2+(2\alpha-2)y+\alpha^2-2\alpha+10\}\{y^2+(2\alpha+1)y+\alpha^2+\alpha+7\}}},$$

选择 α，使得二个二次式中的常数项相等，即

$$\alpha^2-2\alpha+10=\alpha^2+\alpha+7,$$

解出 $\alpha=1$，于是

$$I=\int\frac{dy}{\sqrt{(y^2+9)(y^2+3y+9)}}.$$

设 $y=\beta u$，其中 β 是正数，则

$$I=\beta\int\frac{du}{\sqrt{(\beta u^2+9)(\beta^2u^2+3\beta u+9)}},$$

选择 β 使得二个二次式中的 u^2 的系数等于常数项，即 $\beta^2=9$，于是 $\beta=3$. 因而

$$I=\int\frac{du}{\sqrt{(u^2+1)(u^2+u+1)}}.$$

再设 $u=\frac{1+t}{1-t}$，$du=\frac{2dt}{(1-t)^2}$，于是

$$I=\sqrt{2}\int\frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+3)}}.$$

利用与习题 11(b)的方法，作代换 $t=\tan\theta$ 即可化成椭圆积分.

15. 化积分 $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+10)(x^2-2x+7)}}$ 为椭圆积分.

解☞　若与习题 14 的解题方法类似，设 $x=y+\alpha$，由此便得出矛盾的等式 $\alpha^2-2\alpha+10=\alpha^2-2\alpha+7$. 如果先将两个二次项配成完全平方，并作变换 $x-1=y$，就有

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+10)(x^2-2x+7)}}=\int\frac{dy}{\sqrt{(y^2+9)(y^2+6)}}.$$

再取 $y=\sqrt{6}\tan\theta$ 就可化为椭圆方程.

16. 计算 $\int_1^{\infty}\frac{du}{(3u^2+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}$.

解☞　设 $u=\sec\theta$，则

$$\begin{aligned}\int^{\infty}\frac{du}{(3u^2+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}&=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\theta}{(3+\cos^2\theta)\sqrt{1+3\cos^2\theta}}d\theta\\&=\int_0^{\pi/2}\frac{3+\cos^2\theta-3}{(3+\cos^2\theta)\sqrt{1+3\cos^2\theta}}d\theta\\&=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}-3\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{(3+\cos^2\theta)\sqrt{1+3\cos^2\theta}}\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}}-\frac{3}{8}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\left(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}}\\&=\frac{1}{2}F(\sqrt{3}/2,\pi/2)-\frac{3}{8}\prod(\sqrt{3}/2,-1/4,\pi/2).\end{aligned}$$

其中第二个积分是第三类完全积分.

17. 说明如何利用椭圆积分计算 $\int\frac{dx}{x\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}}$.

解☞　与习题 13 作相同的变换，则

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}}=\int\frac{(t+1)dt}{(3t+1)\sqrt{t(t-1)(t+3)}}.$$

再设 $t=u^2$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{(t+1)dt}{(3t+1)(\sqrt{t(t-1)(t+3)}}&=2\int\frac{u^2+1}{(3u^2+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}du\\&=2\int\frac{\frac{1}{3}(3u^2+1)+\frac{2}{3}}{(3u^2+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}du\\&=\frac{2}{3}\int\frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}+\frac{4}{3}\int\frac{du}{(3u^2+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}.\end{aligned}$$

下面的解题过程与习题 12、16 类似，不再一一赘述.

椭圆函数

18. 证明：(a) $\frac{d}{du}(\mathrm{sn}u)=\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u$；

(b) $\frac{d}{du}(\mathrm{cn}u)=-\mathrm{sn}u\,\mathrm{dn}u$.

证明 ☞　由定义,若 $u=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$,则

$$\mathrm{sn}u=\sin\phi=\sin(\mathrm{am}u),\mathrm{cn}u=\cos\phi=\cos(\mathrm{am}u).$$

于是

由 $\frac{du}{d\phi}=\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$,即 $\frac{d\phi}{du}=\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}=\mathrm{dn}u$,得

(a) $\frac{d}{du}(\mathrm{sn}u)=\frac{d}{du}(\sin\phi)=\cos\phi\frac{d\phi}{du}=\mathrm{cn}u\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}=\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u$,

(b) $\frac{d}{du}(\mathrm{cn}u)=\frac{d}{du}(\cos\phi)=-\sin\phi\frac{d\phi}{du}=-\mathrm{sn}u\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}=-\mathrm{sn}u\,\mathrm{dn}u$.

19. 证明 $\frac{d}{du}(\mathrm{dn}u)=-k^2\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u$.

证明 ☞　$\frac{d}{du}(\mathrm{dn}u)=\frac{d}{du}(\sqrt{1-k^2\sin^2\phi})=\frac{d}{du}(\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2u})$.

$$=\frac{1}{2}(1-k^2\mathrm{sn}^2u)^{-1/2}\frac{d}{du}(-k^2\mathrm{sn}^2u)$$
$$=\frac{-k^2}{2\mathrm{dn}u}\cdot2(\mathrm{sn}u)\frac{d}{du}(\mathrm{sn}u)=\frac{-k^2}{2\mathrm{dn}u}\cdot2\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u$$
$$=-k^2\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u.$$

20. 证明:(a) $\mathrm{sn}(-u)=-\mathrm{sn}u$;(b) $\mathrm{cn}(-u)=\mathrm{cn}u$;(c) $\mathrm{dn}(-u)=\mathrm{dn}u$;(d) $\mathrm{tn}(-u)=-\mathrm{tn}u$.

证明 ☞　(a) 设 $u=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$, $v=\int_0^{-\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$,

则　$\mathrm{sn}u=\sin\phi,\mathrm{sn}v=\sin(-\phi)=-\sin\phi=-\mathrm{sn}u$.

在后一个积分中,设 $\theta=-\psi$,则

$$v=\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=-\int_0^{\phi}\frac{d4}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=-u.$$

于是,$\mathrm{sn}(-u)=-\mathrm{sn}u$.

(b) 由于 $\mathrm{cn}u=\sqrt{1-\mathrm{sn}^2u}$,于是

$$\mathrm{cn}(-u)=\sqrt{1-\mathrm{sn}^2(-u)}=\sqrt{1-\mathrm{sn}^2u}=\mathrm{cn}u.$$

(c) 因为 $\mathrm{dn}u=\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2u}$,所以

$$dn(-u)=\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2(-u)}=\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2u}=\mathrm{dn}u.$$

(d) $\mathrm{tn}(-u)=\frac{\mathrm{sn}(-u)}{\mathrm{cn}(-u)}=-\frac{\mathrm{sn}u}{\mathrm{cn}u}=-\mathrm{tn}u$.

21. 若 $K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$,证明

(a) $\mathrm{sn}(u+2K)=-\mathrm{sn}u$,　　(b) $\mathrm{cn}(u+2K)=-\mathrm{cn}u$,

(c) $\mathrm{dn}(u+2K)=\mathrm{dn}u$,　　(d) $\mathrm{tn}(u+2K)=\mathrm{tn}u$.

证明 ☞　(a) 考虑积分

$$\int_0^{\phi+\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}+\int_{\pi}^{\phi+\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$

而　$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=2\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=2K$.

设 $\theta=\pi+\psi$,则 $\int_{\pi}^{\phi+\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\int_0^{\phi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=u$.

于是　$\int_0^{\phi+\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=u+2K$,即 $\mathrm{am}(u+2K)=\phi+\pi$.

因此　$\mathrm{sn}(u+2K)=\sin(\phi+\pi)=-\sin\phi=-\mathrm{sn}u$.

(b) $\mathrm{cn}(u+2K)=\cos(\phi+\pi)=-\cos\phi=-\mathrm{cn}u$.

(c) $\mathrm{dn}(u+2K)=\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2(u+2K)}=\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2u}=\mathrm{dn}u$.

(d) $\mathrm{tn}(u+2K)=\dfrac{\mathrm{sn}(u+2K)}{\mathrm{cn}(u+2K)}=\dfrac{\mathrm{sn}u}{\mathrm{cn}u}=\mathrm{tn}u$.

22. 证明 $\mathrm{sn}u$ 和 $\mathrm{cn}u$ 是以周期为 $4K$ 的周期函数，而 $\mathrm{dn}u$ 和 $\mathrm{tn}u$ 是周期为 $2K$ 的周期函数.

证明 ☞　在习题 21 中，把 u 换成 $u+2K$，得

$$\mathrm{sn}(u+4K)=-\mathrm{sn}(u+2K)=-(-\mathrm{sn}u)=\mathrm{sn}u.$$

$$\mathrm{cn}(u+4K)=-\mathrm{cn}(u+2K)=-(-\mathrm{cn}u)=\mathrm{cn}u.$$

由习题 21(c)可得 $\mathrm{dn}u$ 和 $\mathrm{tn}u$ 是周期为 $2K$ 的周期函数.

要说明的是椭圆函数的周期还可以是复数，例如，$\mathrm{sn}u$ 有周期为 $4K$ 和 $2iK'$，$\mathrm{cn}u$ 有周期为 $4K$ 和 $2K+2iK'$，$\mathrm{dn}u$ 的周期为 $2K$ 和 $4iK'$. 其中

$$K'=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}},\ k'=\sqrt{1-k^2},$$

正因为如此，椭圆函数有时也称为双周期函数.

23. 证明：(a) $\dfrac{d}{dx}\mathrm{sn}^{-1}(x,k)=\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$,

(b) $\displaystyle\int_0^x\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2x^2)}}=\mathrm{sn}^{-1}(x,k)=F(k,\arcsin x)$.

证明 ☞　(a) 虽然 $\mathrm{sn}^{-1}(x,k)$ 不仅依赖于 x，还依赖于模 k，但为了书写方便，用 $\mathrm{sn}^{-1}x$ 替换 $\mathrm{sn}^{-1}(x,k)$，相信读者已对 $\mathrm{sn}^{-1}(x,k)$ 有了充分了解.

由习题 18，若 $x=\mathrm{sn}u$，则

$$\frac{dx}{du}=\frac{d}{du}(\mathrm{sn}u)=\mathrm{cn}u\mathrm{dn}u=\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

因此，$\dfrac{du}{dx}=\dfrac{d}{dx}(\mathrm{sn}^{-1}x)=\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$.

(b) 对(a)中最后一个式子从 0 到 x 积分，由于 $x=\sin\phi$，其中 $\phi=\mathrm{am}u$，有

$$\int_0^x\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}=\mathrm{sn}^{-1}x=F(k,\phi)=F(k,\arcsin x).$$

注意到上面的结果与三角函数有类似结果(即取 $k=0$)：$\displaystyle\int_0^x\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}=\arcsin x$. 因此，椭圆函数是三角函数的推广

杂题

24. 证明 $\Gamma(\sqrt{1/2},\pi/2)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}$.

证明 ☞　由 Γ－函数的性质，有

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}}=\int_0^{\pi/2}\sin^{-\frac{1}{2}}\theta d\theta=\frac{\Gamma(1/4)\Gamma(1/2)}{2\Gamma(3/4)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}.$$

但由习题 2，该积分又等于 $\sqrt{2}\Gamma(\sqrt{1/2},\pi/2)$，因此，结论成立. 得证.

25. 求一个长度为 l 的单摆的周期 T.

解 ☞　单摆是由一个质量为 m 的小球和连结小球长度为 l 的硬杆(其质量忽略不计)OP 所组成(见图 16-1)，假定硬杆悬挂在固定点 O，则质量为 m 的小球运动的微分方程为

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta,$$

即　$\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=-\dfrac{g}{l}\sin\theta$.

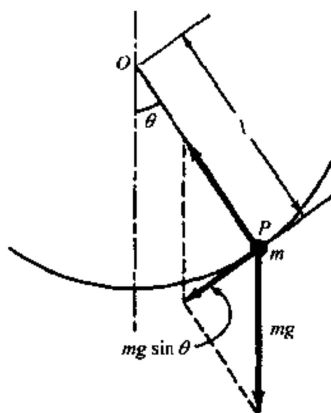


图 16-1

设$\frac{d\theta}{dt}=\rho,\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{d\rho}{dt}=\frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\rho\frac{d\rho}{d\theta}$,则方程为

$$\rho\frac{d\rho}{d\theta}=-\frac{g}{l}\sin\theta,$$

两边积分得 $\frac{\rho^2}{2}=\frac{g}{l}\cos\theta+C.$

若在 $t=0$ 时,单摆与垂线之间的夹角为 $\theta_0>0$,然后放开单摆,于是当 $\theta=\theta_0$ 时,有$\rho=\frac{d\theta}{dt}=0$. 因此 $C=-\left(\frac{g}{l}\right)\cos\theta_0$. 于是

$$\frac{d\theta}{dt}=\pm\sqrt{2g/l}\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}.$$

当单摆从 $\theta=\theta_0$ 运动到 $\theta=0$(对应于四分之一周期)时,$\frac{d\theta}{dt}<0$,因而取"－"号,于是

$$\frac{T}{4}=-\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\theta_0}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}=\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}},$$

因此,

$$T=4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}=4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta/2-(1-2\sin^2\theta_0/2)}}$$

$$=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta_0/2-\sin^2\theta/2}}.$$

设 $\sin\frac{\theta}{2}=\sin\theta_0/2\cdot\sin u$,则积分为

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2u}},k=\sin\theta_0/2.$$

若 $k=0$,得 $T=2\pi\sqrt{l/g}$,这是微小振荡的近似周期.

26. 证明 $\mathrm{sn}(u+v)=\frac{\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}v\,\mathrm{dn}v+\mathrm{cn}u\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{dn}u}{1-k^2\sin^2u\,\mathrm{sn}^2v}$.

证明 ☞ 设 $u+v=\alpha$,其中 α 为一常数,则$\frac{dv}{du}=-1$. 取 $U=\mathrm{sn}u,V=\mathrm{sn}u$,于是

$$\frac{dU}{du}=\dot U=\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u,\frac{dV}{du}=\dot V=\frac{dV}{dv}\frac{dv}{du}=-\mathrm{cn}v\,\mathrm{dn}v.$$

其中圆点"·"表示对 u 求导. 因此

$$\dot U^2=(1-U^2)(1-k^2U^2),\dot V^2=(1-V^2)(1-k^2V^2).$$

求导并化简,得

$$\ddot U=2K^2U^3-(1+k^2)U, \tag{1}$$

$$\ddot V=2k^2V^3-(1+k^2)V. \tag{2}$$

(1)式乘 V,(2)式乘 U,再相减,得

$$\ddot UV-U\ddot V=2k^2UV(U^2-V^2). \tag{3}$$

可以证明(见习题 58)

$$\dot U^2V^2-U^2\dot V^2=(1-k^2U^2V^2)(V^2-U^2), \tag{4}$$

即 $$\dot UV-U\dot V=(1-k^2U^2V^2)(V^2-U^2)/(\dot UV+U\dot V). \tag{5}$$

(3)式除以(5)式,得

$$\frac{\ddot UV-U\ddot V}{\dot UV-U\dot V}=-\frac{2k^2UV(\dot UV+U\dot V)}{1-k^2U^2V^2}, \tag{6}$$

但是

$$\ddot{U}V - U\ddot{V} = \frac{d}{du}(\dot{U}V - U\dot{V}),$$

$$-2k^2UV(\dot{U}V + U\dot{V}) = \frac{d}{du}(1 - k^2U^2V^2),$$

因此,(6)式成为

$$\frac{d(\dot{U}V - U\dot{V})}{\dot{U}V - U\dot{V}} = \frac{d(1 - k^2U^2V^2)}{1 - k^2U^2V^2},$$

两边积分得

$$\frac{\dot{U}V - U\dot{V}}{1 - k^2U^2V^2} = c\ (c\text{ 为任意常数}),$$

即 $$\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v + \operatorname{cn}u\operatorname{sn}v\operatorname{dn}u}{1 - k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v} = c.$$

上式是微分方程的解.显然 $u + v = \alpha$ 也是解,两个解应当满足下列关系

$$\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v + \operatorname{cn}u\operatorname{sn}v\operatorname{dn}u}{1 - k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v} = f(u + v),$$

取 $v = 0$,则有 $f(u) = \operatorname{sn}u$,因此 $f(u + v) = \operatorname{sn}(u + v)$,结论成立.

补 充 习 题

椭圆积分

27. (a) 利用二项式定理,证明:若 $|x| < 1$,则有

$$\sqrt{1 - x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{4} - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{x^3}{6} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{x^4}{8} + \cdots,$$

(b) 若 $|k| < 1$,证明

$$E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{k^6}{5} - \cdots\right\}$$

28. 计算:(a) $E(\sqrt{2}/2, \pi/2)$, (b) $F(\sqrt{2}/2, \pi/2)$, (c) $E(0.5)$, (d) $K(\sqrt{3}/2)$.

29. 证明:(a) $E(1, \phi) = \sin\phi$,

(b) $F(1, \phi) = \ln(\sec\phi + \tan\phi) = \ln\tan\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

30. 求椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的周长(提示:设 $x = 3\sin\phi$, $y = 2\cos\phi$ 为参数方程).

31. 利用椭圆函数计算 $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 x + 2\cos^2 x}}$.

32. 用椭圆积分表示 $\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1 - 3\sin^2 x}}$.

33. 证明 $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + 2\sin\theta}} = F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

34. 计算 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1+x)}}$.

35. 计算 $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 3}}$.

36. 证明 $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

37. 把下列积分化为椭圆积分:

(a) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)(25-x^2)}}$, (b) $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{(x^2-9)(25-x^2)}}$, (c) $\int_0^1 \sqrt{\frac{3-x^2}{1-x^2}}dx$,

(d) $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^4+16)(x^4+25)}}$.

38. 计算：(a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(3-x)(1-x)}}$, (b) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{(x-2)(x-4)(x-6)}}$.

39. 证明 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)}} = \frac{1}{2}\left\{F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \arccos\frac{1}{\sqrt{15}}\right) - F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right.$.

40. 证明 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = \frac{4}{3}F\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

(提示：$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$).

41. 计算：(a) $\int_a^{10} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+4)(x^2-4x+8)}}$,

(b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-4x+5)(x^2-4x+10)}}$.

椭圆函数

42. 证明：(a) $\mathrm{sn}0=1$, (b) $\mathrm{cn}0=1$, (c) $\mathrm{dn}0=1$,

(d) $\mathrm{tn}0=0$, (e) $\mathrm{am}0=0$.

43. 证明：(a) $\mathrm{sn}^2u+\mathrm{cn}^2u=1$, (b) $\mathrm{dn}^2u+k^2\mathrm{sn}^2u=1$.

44. 证明　$\mathrm{dn}^2u-k^2\mathrm{cn}^2u=k'^2$，其中 $k'=\sqrt{1-k^2}$.

45. 证明：(a) $\mathrm{sn}^2u=\frac{1-\mathrm{cn}2u}{1+\mathrm{dn}2u}$, (b) $\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}2u}{1+\mathrm{cn}2u}}=\frac{\mathrm{sn}u\,\mathrm{dn}u}{\mathrm{cn}u}$.

46. 求：(a) $\frac{d}{du}(\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u)$, (b) $\frac{d}{du}(\mathrm{dn}u)^3$.

47. 求：(a) $\frac{d}{du}(\mathrm{tn}u)$, (b) $\frac{d}{du}\mathrm{arsech}(k\,\mathrm{sn}u)$.

48. 验证：(a) $\int \mathrm{cn}u\,du = \frac{1}{k}\arccos(\mathrm{dn}u)+c$,

(b) $\int \frac{du}{\mathrm{sn}u} = \ln\left(\frac{\mathrm{sn}u}{\mathrm{cn}u+\mathrm{dn}u}\right)+c$.

49. 证明 $\int_0^u \mathrm{sn}^2x\,dx = \frac{1}{k^2}\{u-E(k,\mathrm{am}u)\}$.

50. 证明：(a) $\mathrm{sn}(u+k)=\frac{\mathrm{cn}u}{\mathrm{dn}u}$, (b) $\mathrm{cn}(u+k)=-\frac{k'\mathrm{sn}u}{\mathrm{dn}u}$, (c) $\mathrm{dn}(u+k)=\frac{k'}{\mathrm{dn}u}$，其中 $k'=\sqrt{1-k^2}$ 是补模.

51. 证明 $\int_0^x \frac{dv}{\sqrt{(1+v^2)(1+k'^2v^2)}} = \mathrm{tn}^{-1}(x,k) = F(k,\arctan x)$,

其中 $k'=\sqrt{1-k^2}$，在不引起混淆下，我们常常把 $\mathrm{tn}^{-1}(x,k)$ 简记为 $\mathrm{tn}^{-1}x$.

52. 证明 $\int_x^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{v^4+v^2+1}} = \frac{1}{2}\mathrm{cn}^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

杂题

53. 证明 $\int_0^1 \arcsin x^2\,dx = \frac{\pi}{2}-2\sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{2}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{2}\right)$.

54. 一个单摆长度为 2，从与垂线夹角为 60°的位置放开，确定它的振动周期. 假定重力加速度为 $g=32$.

55. 证明，对任何时间 t，习题 25 中的单摆的夹角 θ 满足下面式子：

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sin\theta_0/2\,\mathrm{sn}(\sqrt{g/l}t),$$

其中 t 从单摆硬杆垂直于地面开始计算.

56. 证明 $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta+\cos\theta}} = 2\sqrt[4]{2}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

$\left(\text{提示：}\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

57. 给出 $\mathrm{sn}u$ 的展开式

$$\mathrm{sn}u = u - (1+k^2)\frac{u^3}{3!} + (1+14k^2+k^4)\frac{u^5}{5!} - (1+135k^2+35k^4+k^6)\frac{u^7}{7!} + \cdots.$$

58. 验证习题 26 的方程(4).

59. 证明:(a)$\mathrm{cn}(u+v) = \dfrac{\mathrm{cn}u\,\mathrm{cn}v - \mathrm{sn}v\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{dn}u\,\mathrm{dn}v}{1-k^2\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2v}$,

(b)$\mathrm{dn}(u+v) = \dfrac{\mathrm{dn}u\,\mathrm{dn}v - k^2\mathrm{sn}u\,\mathrm{sn}v\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{cn}v}{1-k^2\mathrm{sn}^2v\,\mathrm{sn}^2u}$.

60. 利用 Landen 变换计算:(a)$F(\sqrt{2}/2, \pi/3)$, (b) $F(0.5, \pi/4)$.

61. 利用 Landen 变换验证 p.299 的结论(13)的正确性.

62. 证明:若 $k_n = \dfrac{2\sqrt{k_{n-1}}}{1+k_{n-1}}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n = 1$.从而验证 p.300(15)式的正确性.

第十七章 复变函数

函数

若对一个复数集合中的每一个变量子,假定有一个或多个变量 w 的值与之对应,称 w 为复变量子的函数,记为 $w=f(z)$. 关于复数的一些基本运算在第一章就已讨论了.

若对 z 的每一个值,仅有一个 w 的值与之对应,则函数称为单值函数,否则,称为多值函数. 我们一般记 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$,其中 u, v 是 x, y 的实函数.

例: $w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy=u+iv$, 因此,$u=x^2-y^2$, $v=2xy$. 它们分别称为 $w=z^2$ 的实部和虚部.

除非特别说明,一般我们把 $f(z)$ 看作单值函数,而多值函数看成单值函数族.

极限和连续性

复变函数的极限和连续性的定义类似于实函数. 若对任意给定的 $\epsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得当 $|z-z_0|<\delta$,就有 $|f(z)-f(z_0)|<\epsilon$ 成立,称 $f(z)$ 在 z_0 是连续的. 换言之,若 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$,则称 $f(z)$ 在 z_0 是连续的.

导数

若 $f(z)$ 在 z 平面上的某个域中为单值函数,$f(z)$ 的导数定义为

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}, \tag{1}$$

记为 $f'(z)$,(1)式表明 Δz 以任意方式趋于零时,极限都应存在且相等. 若存在某个数 $\delta>0$,使得在 $|z-z_0|<\delta$ 内(1)式极限存在,称 $f(z)$ 在 z_0 解析. 如果对区域 $\mathscr{R}$ 中的任意点 z, (1)式都存在,称 $f(z)$ 在 $\mathscr{R}$ 内解析. 要使函数 $f(z)$ 解析,则 $f(z)$ 必是单值且为连续,但反过来不一定成立.

我们通过实变量的初等函数来定义对应的复变量的初等函数. 若实函数 $f(x)$ 的级数展开式是存在的,把 x 换成 z,就可以定义复变数的级数展开式. 这类复级数的收敛性在第十一章就已讨论过了.

例 1: 我们定义 $e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$, $\sin z=z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots$, $\cos z=1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots$.

由这些定义我们可以证明 $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$, 也可以用来证明其他关系式.

例 2: 我们定义 $a^b=e^{b\ln a}$,其中 a,b 均为复数. 由于 $e^{2k\pi i}=1$,因而 $e^{i\phi}=e^{i(\phi+2k\pi)}$. 由此,定义 $\ln z=\ln(\rho e^{i\phi})=\ln\rho+i(\phi+2k\pi)$. $\ln z$ 是多值函数,组成这个多值函数的各单值函数称为 $\ln z$ 的分支.

复变函数的微分法则与实函数的微分法则是相同的. 因此,$\frac{d}{dz}(z^n)=nz^{n-1}$, $\frac{d}{dz}(\sin z)=\cos z$,等等.

柯西-黎曼方程

$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在一个区域 $\mathscr{R}$ 内解析的必要条件是 u, v 满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

(见习题 7).如果(2)式中的偏导数在 $\mathscr{R}$ 内是连续的,则(2)式也是 $f(z)$ 在 $\mathscr{R}$ 内解析的充分条件.

若 u, v 关于 x, y 的二阶偏导数存在且连续,由(2)式,可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \tag{3}$$

因此,实部和虚部在二维空间里满足拉普拉斯方程.满足拉普拉斯方程的函数称为调和函数.

积分

若 $f(z)$ 在区域 $\mathscr{R}$ 内有定义,且单值和连续,我们定义沿 $\mathscr{R}$ 内路径 C 从 $z_1=x_1+iy_1$ 到 $z_2=x_2+iy_2$ 的积分为

$$\int_C f(z)dz=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}(u+iv)(dx+idy)$$

$$=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}udx-vdy+i\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}vdx+udy.$$

这表明复变函数积分可化为二个实函数的线积分,而这些内容在第十章就已讨论过了.与实函数所作的类似,我们也可以详细地给出以和式极限为基础的定义,并可以证明与上面给出的定义是完全相同的.

复函数的积分法则类似于实函数的积分法则.一个主要的性质为:

$$\left|\int_C f(z)dz\right|\leqslant\int_C|f(z)||dz|\leqslant M\int_C ds=Ml, \tag{4}$$

其中 M 是 $|f(z)|$ 在 C 上的上界,即 $|f(z)|\leqslant M$, l 是路径 C 的长度.

柯西定理

设 C 是一个简单闭曲线,若 $f(z)$ 在以 C 为边界的区域内及 C 上处处解析,则有柯西定理:

$$\int_C f(z)dz=\oint_C f(z)dz=0, \tag{5}$$

第二个积分强调了 C 是一个简单闭曲线.

(5)式的另一种等价的表示为:$\int_{z_1}^{z_2}f(z)dz$ 的值不依赖于连接 z_1, z_2 的路径.因而该积分的计算为

$$\int_{z_1}^{z_2}f(z)dz=F(z_2)-F(z_1),$$

其中 $F'(z)=f(z)$.这个结论与第十章讨论的线积分中的相应结论是一致的.

例: 由于 $f(z)=2z$ 是处处解析的,则对任意简单闭曲线 C,有

$$\oint_C 2zdz=0,$$

$$\int_{2i}^{1+i}2zdz=z^2\Big|_{2i}^{1+i}=(1+i)^2-(2i)^2=2i+4.$$

柯西积分公式

若 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 内和 C 上是处处解析,a 是 C 内任一点,则

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz, \tag{6}$$

其中 C 是取正方向(逆时针方向).

$f(z)$在 $z=a$ 的 n 阶导数公式为

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n-1}}dz. \tag{7}$$

上面两式称为柯西积分公式这是两个著名的公式.公式(6)说明了若 $f(z)$在闭曲线 C 的值是确定的,则 $f(z)$在 C 内的值也就确定了.利用公式(7)可以求 C 内各点处的导数,公式(7)还指出,若复变函数 $f(z)$有一阶导数,则它也有任意阶导数.而实函数就不具备这样的性质.

泰勒级数

设 $f(z)$在以 $z-a$ 为中心的圆内及圆上解析,则对圆内的任一点 z, $f(z)$的泰勒级数展开式为

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3+\cdots \tag{8}$$

(见习题 21).

奇点

若 $f(z)$在 z 处不解析,称 z 为$f(z)$的奇点.若 $f(z)$在某个区域内除点 $z=a$ 外处处解析,称 $z=a$ 为$f(z)$的孤立奇点.

例: 若 $f(z)=\frac{1}{(z-3)^2}$, $z=3$ 是 $f(z)$的孤立奇点.

极点

若 $f(z)=\frac{\phi(z)}{(z-a)^n}$, 其中 $\phi(a)\neq 0$,且 $\phi(z)$在包含 $z=a$ 的区域内处处解析,n 为一个正整数,则孤立奇点 $z=a$ 称为阶数为n 的极点.若 $n=1$,极点又称为单极点,$n=2$,极点称为二阶极点,以此类推.

例 1: $f(z)=\frac{z}{(z-3)^2(z+1)}$有两个奇点,$z=3$ 为二阶极点,$z=-1$ 为一阶极点(单极点).

例 2: $f(z)=\frac{3z-1}{z^2+4}=\frac{3z-1}{(z+2i)(z-2i)}$有两个单极点 $z=\pm 2i$.

除了极点外,函数可能还有其他类型的奇点.例如,$f(z)=\sqrt{z}$在 $z=0$ 处有分支点(见习题 37).函数 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$有奇点,但由于$\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}$存在,我们称这类奇点为可去奇点.

洛朗级数

若 $f(z)$在以 $z=a$ 为中心圆C 内除$z=a$ 为 n 阶极点外处处解析,则$(z-a)^n f(z)$在 C 内处处解析,因而在 $z=a$ 处有泰勒级数,从而

$$f(z)=\frac{a-n}{(z-a)^n}+\frac{a-n+1}{(z-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{a-1}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+\cdots. \tag{9}$$

上式称为 $f(z)$的洛朗级数,$a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots$称为 $f(z)$的解析部分,而由 $z-a$ 的负幂项组成的剩余部分称为主要部分.一般说来,我们称级数 $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}a_k(z-a)^k$ 为洛朗级数,其中 $k<0$ 的项构成了级数的主要部分.若 $f(z)$在以 $z=a$ 为中心的两个同心圆之间的区域

里处处解析,则 $f(z)$ 在该区域内就可以展开成洛朗级数.

利用函数 $f(z)$ 的洛朗级数可以定义各类奇点.例如,当洛朗级数的主要部分只有有限项,即 $a_{-n}\neq 0$,而 a_{-n-1}, a_{-n-2},…均为零,则 $z=a$ 是 n 阶极点;若主要部分有无穷多项,$z=a$ 称为本性奇点,有时也称为无穷阶极点.

例: $e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\cdots$,则 $z=0$ 为本性奇点.

留数

(9)式中的系数习惯上可以通过求 $(z-z)^n f(z)$ 的泰勒级数的相应系数来求得.为了今后进一步的研究,我们称系数 a_{-1} 为 $f(z)$ 在 $z=a$ 处的留数.这个概念十分重要.留数可以通过下面公式来求得:

$$a_{-1}=\lim_{z\to a}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\},\tag{10}$$

其中 n 是极点的阶.对单极点,留数的计算公式很简单:

$$a_{-1}=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).\tag{11}$$

留数定理

若 $f(z)$ 在区域 $\mathscr{R}$ 内除 $z=a$ 外处处解析,$z=a$ 为 n 阶极点,C 是含 $z=a$ 的任意简单闭曲线,则 $f(z)$ 满足(9)式,对(9)式两边积分,并利用公式

$$\oint_C\frac{dz}{(z-a)^n}=\begin{cases}0, & 若\ n\neq 1,\\ 2\pi i, & 若\ n=1,\end{cases}\tag{12}$$

(见习题 13),就有

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i a_{-1}.\tag{13}$$

即 $f(z)$ 沿着一条包含一个 $f(z)$ 的极点的闭路径的积分就等于在该极点的留数的 $2\pi i$ 倍.

一般地,我们有下面的重要定理:

定理 设 $f(z)$ 在以 C 为边界的区域内除有限个极点 a, b, c, …外处处解析,且 $f(z)$ 在各极点处的留数分别为 a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, …,则

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i(a_{-1}+b_{-1}+c_{-1}+\cdots),\tag{14}$$

即 $f(z)$ 的积分是包含在 C 内极点的留数的 $2\pi i$ 倍.柯西定理和柯西积分公式都可以由该定理(称为留数定理)推出.

定积分的计算

有很多定积分可以利用留数定理来计算.在计算时,要选取适当的函数 $f(z)$ 和路径或闭曲线 C,这需要一定的技巧.下面,给出在应用中常见的几种类型:

1. $\int_0^\infty F(x)dx$, $F(x)$ 是偶函数.

考虑 $\oint_C F(z)dz$,其中 C 是由 x 轴上从 $-R$ 到 R 的直线段及以该线段为直径的上半圆周组成的闭曲线,然后取 $R\to\infty$(见习题 29,30).

2. $\int_0^{2\pi} G(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$, G 是 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 的有理函数.

设 $z=e^{i\theta}$,则 $\sin\theta=\dfrac{z-z^{-1}}{2i}$, $\cos\theta=\dfrac{z+z^{-1}}{2}$, $dz=ie^{i\theta}d\theta$, $d\theta=\dfrac{dz}{iz}$, 所求积分化为 $\oint_C F(z)dz$, 其中 C 是取正向的单位圆周(见习题 31,32).

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\begin{Bmatrix}\cos mx\\ \sin mx\end{Bmatrix}dx$, $F(x)$ 是有理函数.

考虑积分 $\oint_C F(z)e^{imz}dz$, 其中 C 是与类型 1 相同的闭曲线(见习题 34).

4. 其他具有各种周线的定积分(见习题 35,38).

习题与解答

函数,极限,连续性

1. 确定下列各题中点子的轨迹:

(a) $|z-2|=3$, (b) $|z-2|=|z+4|$, (c) $|z-3|+|z+3|=10$.

解 (a)**解法 1**

$|z-2|=|x+iy-2|=|x-2+iy|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}=3$,即$(x-2)^2+y^2=9$,轨迹为一个中心在(2,0),半径为 3 的圆.

解法 2

$|z-2|$是复数 $z=x+iy$ 和 $2+0i$ 的距离,若它们之间的距离总是 3,则轨迹就是中心在 $2+0i$;半径为 3 的圆.

(b) **解法 1**

$|x+iy-2|=|x+iy+4|$, 即$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(x+4)^2+y^2}$,两边平方,得 $x=-1$,轨迹为一条直线.

解法 2

在轨迹上任一点到(2,0)和(−4,0)的距离相等,因此,轨迹是(2,0)和(−4,0)连线的中垂线,即 $x=-1$.

(c) **解法 1**

由$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}=10$,即$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=10-\sqrt{(x+3)^2+y^2}$,两边平方并化简,得 $25+3x=5\sqrt{(x+3)^2+y^2}$,两边再平方并化简,得$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

解法 2

在轨迹上的任一点到(3,0)和(−3,0)的距离之和为 10,因此,轨迹是焦点在(−3,0),(3,0)且长轴的长度为 10 的椭圆.

2. 确定下列不等式所表示的 z 平面上的区域:

(a) $|z|<1$, (b) $1<|z+2i|<2$, (c) $\pi/3\leqslant\arg z\leqslant\pi/2$.

解 (a) 半径为 1 的一个圆的内部,如图 17-1(a)所示.

(b) $|z+2i|$是点 z 到点 $-2i$ 的距离,因而 $|z+2i|=1$ 是一个半径为 1,圆心在 $-2i$ 即(0,−2)的圆,而$|z+2i|=2$是一个半径为 2,圆心在 $-2i$ 的圆.于是 $1<|z+2i|\leqslant2$ 表示在$|z+2i|=1$的外部但在$|z+2i|=2$的内部区域.如图 17-1(b)所示.

(c) 注意到 $\arg z=\phi$,其中 $z=\rho e^{i\phi}$,所求的区域是由两条直线 $\phi=\pi/3$ 和 $\phi=\pi/2$ 所围成的区域且包括这条直线,如图 17-1(c)所示.

3. 把下列函数表示成 $u(x,y)+iv(x,y)$形式,其中 u, v 是实函数:

(a) z^3, (b) $1/(1-z)$, (c) e^{3z}, (d) $\ln z$.

解 (a) $w=z^3=(x+iy)^3=x^3+3x^2(iy)+3x(iy)^2+(iy)^3$

$$=x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3$$

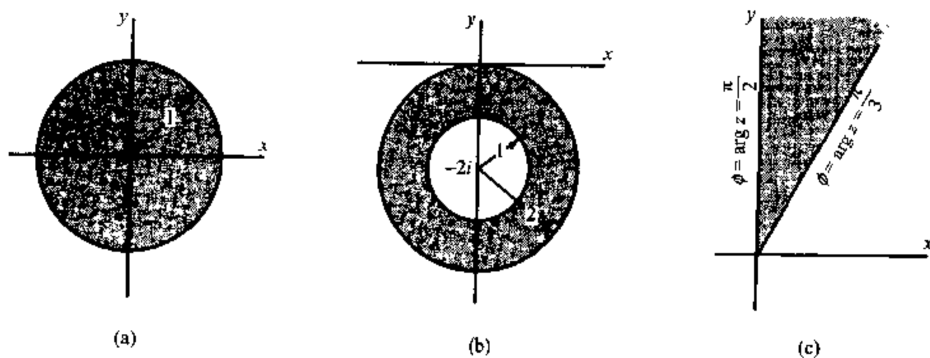


图 17-1

$$=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3).$$

因此，$u(x,y)=x^3-3xy^2$，$v(x,y)=3x^2y-y^3$.

(b) $w=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-(x+iy)}=\frac{1}{1-x-iy}\frac{1-x+iy}{1-x+iy}=\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}$.

因此，$u(x,y)=\frac{1-x}{(1-x)^2+y^2}$，　$v(x,y)=\frac{y}{(1-x)^2+y^2}$.

(c) $e^{3z}=e^{3(x+iy)}=e^{3x}(\cos 3y+i\sin 3y)$

$$u(x,y)=e^{3x}\cos 3y,\quad v(x,y)=e^{3x}\sin 3y.$$

(d) $\ln z=\ln\rho e^{i\phi}=\ln\rho+i\phi=\ln\sqrt{x^2+y^2}+i\arctan^{-1}\frac{y}{x}$.

于是
$$u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\quad v=\arctan^{-1}\frac{y}{x}.$$

要注意 $\ln z$ 是多值函数(具有无穷多个值)，其原因在于 ϕ 可以以 2π 的倍数增加. 对数函数的主值是 ϕ 满足 $0\leqslant\phi<2\pi$ 的那一支，称为 $\ln z$ 的主支.

4. 证明：(a) $\sin(x-iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$，

(b) $\cos(x+iy)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$.

证明 ☞　利用 $e^{iz}=\cos z+i\sin z$，$e^{-iz}=\cos z-i\sin z$，

可得
$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$

则
$$\sin z=\sin(x+iy)=\frac{1}{2i}[e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}]=\frac{1}{2i}[e^{ix-y}-e^{-ix+y}]$$
$$=\frac{1}{2i}\{e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}(\cos x-i\sin x)\}$$
$$=\sin x\frac{e^y+e^{-y}}{2}+i\cos x\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$
$$=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y.$$

类似地
$$\cos z=\cos(x+iy)=\frac{1}{2}\{e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}\}$$
$$=\frac{1}{2}\{e^{ix-y}+e^{-ix+y}\}$$
$$=\frac{1}{2}\{e^{-y}(\cos x+i\sin x)+e^{y}(\cos x-i\sin x)\}$$
$$=\cos x\frac{e^y+e^{-y}}{2}-i\sin x\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$
$$=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y.$$

导数,柯西-黎曼方程

5. 证明$\frac{d}{dz}\bar{z}$处处不存在,其中$\bar{z}$是z的共轭复数.

证明 ☞　由导数定义,若$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$以任意方式趋于零,极限$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$都存在,就有

$$\frac{d}{dz}f(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.$$

于是,$\frac{d\bar{z}}{dz}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\overline{x+iy+\Delta x+i\Delta y}-\overline{x+iy}}{\Delta x+i\Delta y}$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{x-iy+\Delta x-i\Delta y-(x-iy)}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}.$$

若$\Delta y=0$,有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$;

若$\Delta x=0$,有$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{-i\Delta y}{i\Delta y}=-1$.

由此看出,当Δz以两种方式趋于零时,极限不相同,因此,导数不存在,即$\bar{z}$是处处不可导.

6. (a) 若$w=f(z)=\frac{1+z}{1-z}$,求$\frac{dw}{dz}$;

(b) 确定w在何处不解析.

解 ☞　(a) **解法1**

$$\frac{dw}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left[\frac{1+(z+\Delta z)}{1-(z+\Delta z)}-\frac{1+z}{1-z}\right]}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2}{(1-z-\Delta z)(1-z)}$$

$$=\frac{2}{(1-z)^2}.$$

当$z\neq 1$,且Δz以任何方式趋于零时,极限均为$\frac{2}{(1-z)^2}$,因此,$w=\frac{1+z}{1-z}$的导数为$\frac{2}{(1-z)^2}$.

解法2

当$z\neq 1$时,利用导数运算法则,因此,由商的求导法则,得

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\frac{(1-z)\frac{d}{dz}(1+z)-(1+z)\frac{d}{dz}(1-z)}{(1-z)^2}=\frac{(1-z)-(1+zx-1)}{(1-z)^2}$$

$$=\frac{2}{(1-z)^2}.$$

(b) 除$z=1$外,该函数处处解析.而在$z=1$处,导数不存在.

7. 证明$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在某个区域里解析的必要条件是在该区域内,u,v满足柯西-黎曼方程.

证明 ☞　由于$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$,有

$$f(z+\Delta z)=f[x+\Delta x+i(y+\Delta y)]=u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y),$$

于是

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-\ (z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{u(x+\Delta y,y+\Delta y)-u(x,y)+i\{v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)\}}{\Delta x+i\Delta y},$$

若$\Delta y=0$,所求极限为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\left\{\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right\}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

若$\Delta x-0$,所求极限为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,\ y+\Delta y)-u(x,\ y)}{i\Delta y}+\left\{\frac{v(x,\ y+\Delta y)-v(x,\ y)}{\Delta y}\right\}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

若导数存在,这两个极限必相等,即

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y},$$

因而有
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

另一方面,我们可以证明,若 u, v 在某个区域上关于 x, y 的一阶偏导数是连续的,则柯西-黎曼方程也是 $f(z)$ 在该区域解析的充分条件.

8. (a) 若 $f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$ 在某个区域 $\mathscr{R}$ 内处处解析,证明曲线族 $u(x,\ y)=C_1$ 和 $v(x,\ y)=C_2$ 是相互正交的;(b) 以 $f(z)=z^2$ 加以说明.

证明 ☞ (a) 考虑这两族曲线中的两条曲线 $u(x,\ y)=u_0$, $v(x,\ y)=v_0$,交点为 $(x_0,\ y_0)$.

由于 $du=u_xdx+u_ydy=0$, 于是 $\frac{dy}{dx}=-\frac{u_x}{u_y}$, 同理, $dv=v_xdx+v_ydy=0$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{v_x}{v_y}$, 把 $(x_0,\ y_0)$ 代入 $\frac{dy}{dx}=-\frac{u_x}{u_y}$ 和 $\frac{dy}{dx}=-\frac{v_x}{v_y}$, 得到的值分别表示两条曲线在交点处的斜率.

利用柯西-黎曼方程: $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$, 把过 $(x_0,\ y_0)$ 的两条曲线在该点处的斜率相乘,得

$$\left(-\frac{u_x}{u_y}\right)\left(-\frac{v_x}{v_y}\right)=-1,$$

这表明两曲线族中的任两条曲线是正交的,由此得两曲线族是相互正交的.

(b) 若 $f(z)=z^2$, 则 $u=x^2-y^2$, $v=2xy$, 曲线族 $x^2-y^2=C_1$, $2xy=C_2$ 的图形如图17-2所示.

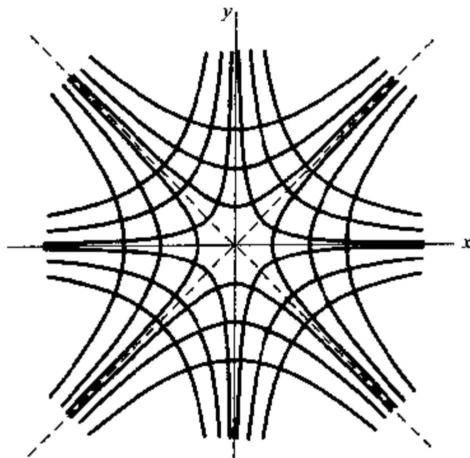


图 17-2

9. 在空气动力学和流体力学中,构成解析函数 $f(z)=\phi+i\psi$ 中的 ϕ 和 ψ 分别称为速势函数和流函数,若已知 $\phi=x^2+4x-y^2+2y$, (a) 求 ψ, (b) 求 $f(z)$.

解 ☞ (a) 由柯西-黎曼方程, $\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\phi}{\partial y}$,

则
$$(1)\ \frac{\partial\psi}{\partial y}=2x+4,\quad (2)\ \frac{\partial\psi}{\partial x}=2y-2.$$

解法 1

对(1)式积分,得 $\psi=2xy+4y+F(x)$

对(2)式积分,得 $\psi=2xy-2x+G(y)$,

只要取 $F(x)=-2x+c$, $G(y)=4y+c$, 其中 c 为任意实常数,则上述两式相等. 因此, $\psi=2xy+4y-2x+c$.

解法 2

对(1)式积分,得 $\psi=2xy+4y+F(x)$, 然后代入(2)式, $2y+F'(x)=2y-2$, 即 $F'(x)=2$, 于是 $F(x)=-2x+c$, 因此 $\psi=2xy+4y-2x+c$.

(b) 由(a)

$$\begin{aligned}f(z)&=\phi+i\psi=x^2+4x-y^2+2y+i(2xy+4y-2x+c)\\&=(x^2-y^2+2ixy)+4(x+iy)-2i(x+iy)+ic\\&=z^2+4z-2iz+c_1,\end{aligned}$$

其中 c_1 是纯虚数.

也可以利用 $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$ 解出 $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$ 代入 $f(z)$ 中,求得 $f(z)$ 的表达式,包含 $\bar{z}$

的项已相互抵消，因而表达式中不含 $\bar{z}$.

积分，柯西定理，柯西积分公式

10. 计算 $\int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz$：

(a) 沿抛物线 $x=t, y=t^2 (l\leqslant t\leqslant 2)$，

(b) 沿连结 $1+i$ 和 $2+4i$ 的直线段，

(c) 沿从 $1+i$ 到 $2+i$ 再由 $2+i$ 至 $2+4i$ 的折线段.

解

$$\int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz = \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x+iy)^2(dx+idy)$$

$$= \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x^2-y^2)dx - 2xydy + i\int_{(1,1)}^{(2,4)} 2xydx + (x^2-y^2)dy.$$

解法 1

(a) 点(1,1)和(2,4)分别对应参数 $t=1$ 和 $t=2$，则上述线积分为

$$\int_1^2 \{(t^2-t^4)dt - 2t\cdot t^2\cdot 2tdt\} + i\int_1^2\{2t\cdot t^2 dt + (t^2-t^4)\cdot 2tdt\} = -\frac{86}{3} - 6i.$$

(b) 连接(1,1)和(2,4)的直线方程为 $y-1=\frac{4-1}{2-1}(x-1)$，即 $y=3x-2$，因此，

$$\int_1^2 \{[x^2-(3x-2)^2]dx - 2(3x-2)\cdot 3dx\} + i\int_1^2\{2x(3x-2)dx$$

$$+ [x^2-(3x-2)^2]\}3dx = -\frac{86}{3} - 6i.$$

(c) 从 $1+i$ 到 $2+i$ 的直线段上，$y=1$，所以 $dy=0$，因此，

$$\int_1^2 (x^2-1)dx + i\int_1^2 2xdx = \frac{4}{3} + 3i.$$

从 $2+i$ 到 $2+i$ 的直线段上，$x=2$，所以 $dx=0$，因此

$$\int_1^4 -4ydy + i\int_1^4 (4-y^2)dy = -30-9i.$$

两式相加，得

$$\left(\frac{4}{3}+3i\right) + (-30-9i) = -\frac{86}{3} - 6i.$$

解法 2

由第十章可知，线积分与路径无关，因而计算(a)，(b)，(c)得到的积分值相同，因此，在积分时，可与实变量一样，直接通过求原函数来求得积分值.

$$\int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_{1+i}^{2+4i} = \frac{(2+4i)^3}{3} - \frac{(1+i)^3}{3} = -\frac{86}{3} - 6i.$$

11. (a) 证明柯西定理：若 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上内部处处解析，则 $\oint_C f(z)dz = 0$.

(b) 在上述条件下，证明 $\int_{P_1}^{P_2} f(z)dz$ 与连接 P_1 和 P_2 的路径无关.

证明 (a)

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (u+iv)(dx+idy)$$

$$= \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + udy.$$

由第十章的格林定理

$$\oint_C udx - vdy = \iint_{\mathscr{R}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy,$$

$$\oint_C vdx + udy = \iint_{\mathscr{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy,$$

其中 $\mathscr{R}$ 是由 C 所围成的单连通区域.

由于 $f(z)$ 在 C 内处处解析，于是 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，(习题 7)又假定 $f'(z)$(因而偏导数)是连续的，因此，上述两积分为零，由此可得

$$\oint_C f(z)dz=0.$$

(b) 考虑任意两条连接 P_1,P_2 的路径(图 17-3 所示)，由柯西定理，

$$\oint_{P_1AP_2BP_1} f(z)dz=0.$$

即
$$\int_{P_1AP_2} f(z)dz+\int_{P_2BP_1} f(z)dz=0$$

或
$$\int_{P_1AP_2} f(z)dz=-\int_{P_2BP_1} f(z)dz=\int_{P_1BP_2} f(z)dz.$$

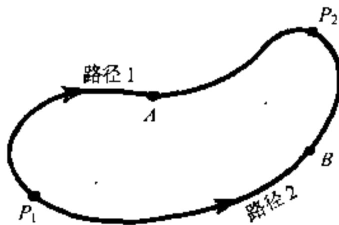


图 17-3

这说明沿路径 P_1AP_2(路径 1)的积分等于沿路径 P_1BP_2(路径 2)的积分. 因此，积分是与连结 P_1,P_2 的路径无关.

在习题 10 中，由于 $f(z)=z^2$ 是处处解析的，因而沿不同路径得到的积分值是相同的.

图 17-4

12. 若 $f(z)$ 在由两条闭曲线 C_1,C_2 所围成的区域(包括边界)内处处解析(见图 17-4)，证明：

$$\oint_{C_1} f(z)dz=\oint_{C_2} f(z)dz.$$

证明 ☞　在图 17-4 中，作一条直线 AB(称为横截线)连结 C_1 和 C_2 上的任意两点，由柯西定理(习题 11)

$$\oint_{AQPABRSTBA} f(z)dz=0.$$

由于 $f(z)$ 在区域(阴影部分)的边界上处处解析，因此，

$$\int_{AQPA} f(z)dz+\int_{AB} f(z)dz+\int_{BRSTB} f(z)dz+\int_{BA} f(z)dz=0, \tag{1}$$

但是
$$\int_{AB} f(z)dz=-\int_{BA} f(z)dz,$$

因而(1)式为

$$\int_{AQPA} f(z)dz=-\int_{BRSTB} f(z)dz=\int_{BTSRB} f(z)dz$$

即
$$\oint_{C_1} f(z)dz=\oint_{C_2} f(z)dz.$$

注： 并不要求 $f(z)$ 在 C_2 内处处解析.

13. (a) 证明 $\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi i, & n=1,\\ 0, & n=2,3,4,\cdots,\end{cases}$ 其中 C 是一条包含 $z=a$ 的取正向的简单闭曲线.

(b) 若 $n=0,-1,-2,-3,\cdots$，积分值为何?

证明 ☞　(a) 设 C_1 是以 $z=a$ 为圆心，半径为 ϵ 的圆(图 17-5)，由于 $(z-a)^{-n}$ 在由 C,C_1 所围成区域(包括边界)内处处解析，由习题 12，得

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}=\oint_{C_1}\frac{dz}{(z-a)^n}.$$

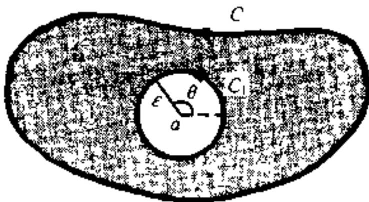


图 17-5

为计算后一个积分，注意到 C_1 是以 $z=a$ 为中心的圆，因而设 $z-a=\varepsilon e^{i\theta}$，$dz=i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$，因此

若 $n\neq1$，$\oint_{C_1}\frac{dz}{(z-a)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{i\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon^n e^{in\theta}}d\theta=\frac{i}{\varepsilon^{n-1}}\int_0^{2\pi}e^{(1-n)i\theta}d\theta$

$$=\frac{i}{e^{n-1}}\frac{1}{(1-n)i}e^{(1-n)i\theta}\Big|_0^{2\pi}=0.$$

若 $n=1$，$\oint_{C_1}\frac{dz}{(z-a)}=i\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi i.$

(b) 当 $n=0, -1, -2, -3, \cdots$，被积函数为 $1,(z-a),(z-a)^2,\cdots$ 在 C_1 内(包括 $z=a$)处处解析，由柯西定理，积分值为零.

14. 计算 $\oint_C\frac{dz}{z-3}$，其中 C 是(a)圆 $|z|=1$；(b) $|z+i|=4$.

解 ☞　(a) 由于 $z=3$ 在 $|z|=1$ 的外面，因而积分值为零(习题 11).

(b) $z=3$ 在 $|z+i|=4$ 内，积分值为 $2\pi i$(习题 13).

15. 若 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上及 C 内处处解析，a 是 C 内任一点，证明：$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz$.

证明 ☞　根据习题 12 及习题 13 的图 17-5，有

$$\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz=\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-a}dz.$$

设 $z-a=\varepsilon e^{i\theta}$，上式中的后一个积分为

$$\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-a}dz=i\int_0^{2\pi}f(a+\varepsilon e^{i\theta})d\theta.$$

因为 $f(z)$ 是解析的，因而是连续的，于是

$$\lim_{\varepsilon\to0}i\int_0^{2\pi}f(a+\varepsilon e^{i\theta})d\theta=i\int_0^{2\pi}\lim_{\varepsilon\to0}f(a+\varepsilon e^{i\theta})d\theta$$

$$=i\int_c^{2\pi}f(a)d\theta=2\pi if(a),$$

即　$\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz=2\pi if(a)$，

所以

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz.$$

16. 计算：(a) $\oint_C\frac{\cos z}{z-\pi}dz$，(b) $\oint_C\frac{e^z}{z(z+1)}dz$. 其中 C 是正向圆 $|z-1|=3$.

解 ☞　(a) 由于 $z=\pi$ 在 C 内，利用习题 15，取 $f(z)=\cos z$，$a=\pi$，于是

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\cos z}{z-\pi}dz=\cos\pi=-1.$$

因此

$$\oint_C\frac{\cos z}{z-\pi}dz=-2\pi i.$$

(b) 由于 $z=0$，$z=1$ 均在 C 内，由例 15，得

$$\oint_C\frac{e^z}{z(z+1)}dz=\oint_C e^z\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}\right]dz=\oint_C\frac{e^z}{z}dz-\oint_C\frac{e^z}{z+1}dz$$

$$=2\pi ie^0-2\pi ie^{-1}=2\pi i(1-e^{-1}).$$

17. 计算 $\oint_C\frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz$，其中 C 是包含 $z=1$ 的任意取正向的简单闭曲线.

解法 1

由柯西积分公式　$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$，当 $n=2$，$f(z)=5z^2-3z+2$ 时，则 $f''(1)=10$，因此，

$$10=\frac{2!}{2\pi i}\oint_C\frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz,$$

即　$\oint_C\frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^2}dz=10\pi i$.

解法 2

$$5z^2-3z+2=5(z-1)^2+7(z-1)+4,$$

于是　$\oint_C\frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz=\oint_C\frac{5(z-1)^2+7(z-1)+4}{(z-1)^3}dz=5\oint_C\frac{dz}{z-1}+7\oint_C\frac{dz}{(z-1)^2}+4\oint_C\frac{dz}{(z-1)^3}$.

由习题 13，得

$$\oint_C\frac{dz}{z-1}=2\pi i,\ \oint_C\frac{dz}{(z-1)^2}=0,\ \oint_C\frac{dz}{(z-1)^3}=0,$$

因而　$\oint_C\frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz=5\times2\pi i+7\times0+4\times0=10\pi i$.

级数和奇点

18. 当 z 取何值时，下列级数收敛：

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2 2^n}$，(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}$，(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{3^n}$.

解 ☞　(a) 级数的第 n 项 $u_n=z^n/n^2 2^n$，于是

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2\cdot2^{n+1}}\cdot\frac{n^2 2^n}{z^n}\right|=\frac{|z|}{2}.$$

由级数收敛的比值审敛法，可知当 $|z|<2$ 时，级数收敛；当 $|z|>2$，级数发散，当 $|z|=2$，收敛法失效. 但由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^2 2^n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n^2 2^n}$，当 $|z|=2$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的，因此，当 $|z|\leqslant2$ 时，级数绝对收敛.

(b) $\lim\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot z^{2n-1}}{(2n-1)!}=z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots$，

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{-z^2}{2n(2n+1)}\right|=0$. 因而该级数对任意的 z 均收敛，实际上级数和为 $\sin z$.

(c) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(z-i)^{n+1}}{3^{n+1}}\cdot\frac{z^n}{(z-i)^n}\right|=\frac{(z-i)}{3}$，当 $|z-i|<3$，级数收敛；当 $|z-i|>3$，级数发散. 若 $|z-i|-3$，则取 $z-i=3e^{i\theta}$，因而此级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{in\theta}$，由丁该级数的一般项当 $n\to\infty$ 时不趋于零，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{in\theta}$ 发散.

因此，级数在圆 $|z-i|=3$ 内收敛，但不包括边界.

19. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n z^n$ 在 $|z|\leqslant R$ 内绝对收敛，证明该级数对满足 $|z|\leqslant R$ 内的 z 一致收敛.

证明 ☞　复变量级数的定义、定理和证明都类似于实变量级数. 因此，我们有

$$|a_n z^n|\leqslant|a_n|R^n=M_n.$$

由假定，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 收敛，由魏尔斯特拉斯 M 法则，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 在 $|z|\leqslant R$ 内一致收敛.

20. 找出下列函数在有限 z 平面上的所有奇点以及奇点的类型(如果有的话)：

(a) $\dfrac{z^2}{(z+1)^3}$, (b) $\dfrac{2z^3-z+1}{(z-4)^2(z-i)(z-1+2i)}$, (c) $\dfrac{\sin mz}{z+2z+2}$, $m\neq0$,

(d) $\dfrac{1-\cos z}{z}$, (e) $e^{-\frac{1}{(z-1)^2}}$, (f) e^z.

解☞ (a) $z=-1$ 是三阶极点.

(b) $z=4$ 是二阶极点(双极点);$z=i$ 和 $z=1-2i$ 是一阶极点(单级点).

(c) 当 $z=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\dfrac{-2\pm2i}{2}=-1\pm i$ 时,$z^2+2z+2=0$,于是 $z^2+2z+2=\{z-(-1+i)\}\{z-(-1-i)\}=(z+1-i)(z+1+i)$,因此,函数有二个单极点:$z=-1+i$, $z=-1-i$.

(d) $z=0$ 显然是奇点,但由于$\lim\limits_{z\to0}\dfrac{1-\cos z}{z}=0$.所以,$z=0$ 是可去奇点.

另解:由于$\dfrac{1-\cos z}{z}=\dfrac{1}{z}\left\{1-\left(1-\dfrac{1}{2!}z^2+\dfrac{z^4}{4!}-\dfrac{z^6}{6!}+\cdots\right)\right\}$

$$=\frac{z}{2!}-\frac{1}{4!}z^3+\cdots,$$

可以看出,$z=0$ 是可去奇点.

(e) $e^{-\frac{1}{(z-1)^2}}=1-\dfrac{1}{(z-1)^2}+\dfrac{1}{2!\ (z-1)^4}\cdots$,洛朗级数中其主要部分有无穷多个负幂项,因此,$z=1$ 是本性奇点.

(f) 该函数没有有限奇点,但取 $z=\dfrac{1}{u}$后,该函数为 $e^{\frac{1}{u}}$, $u=0$ 为本性奇点,因此,$z=\infty$是本性奇点.

一般地,为了确定 $f(z)$在无穷远的奇点性质,取变换 $z=\dfrac{1}{u}$,检验 $f(\dfrac{1}{u})$在 $u=0$ 的奇点性质.

21. 若 $f(z)$在圆心为 a,半径为 R 的圆上及圆内处处解析,且 $a+h$ 为C 内的任一点,证明泰勒定理

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f'''(a)+\cdots.$$

证明☞ 由柯西积分公式(习题 15),有

$$f(a+h)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a-h}dz, \tag{1}$$

把 1 和 $z-a-h$ 相除,有

$$\frac{1}{z-a-h}=\frac{1}{(z-a)\left[1-\dfrac{h}{z-a}\right]}=\frac{1}{z-a}\left\{1+\frac{h}{z-a}+\frac{h^2}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{h^n}{(z-a)^n}\right.$$

$$\left.+\frac{h^{n+1}}{(z-a)^n(z-a-h)}\right\}. \tag{2}$$

把(2)式代入(1)式,并利用柯西积分公式,得

$$f(a+h)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz+\frac{h}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz+\cdots+\frac{h^n}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz+R_n$$

$$=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n,$$

其中
$$R_n=\frac{h^{n+1}}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}dz.$$

当 z 在C 上时,$\left|\dfrac{f(z)}{z-a-h}\right|\leqslant M$, $|z-a|=R$,由 p.313 的(4)式,

$$|R_n|=\frac{|h|^{n+1}M}{2\pi R^{n+1}}\cdot2\pi R,$$

其中 $2\pi R$ 为C 的长度.

当 $n\to\infty$时,$|R_n|\to0$,于是 $R_n\to0$,定理得证.

若 $f(z)$ 在圆环区域 $r_1\leqslant|z-a|\leqslant r_2$ 内处处解析，我们可以把泰勒级数推广到洛朗级数(见习题92)，因此，在某些场合中，正如下例将要看到的，通过利用已知的泰勒级数来求出洛朗级数.

22. 求出下列函数在给定奇点处的洛朗级数，并给出奇点的类型及每个级数的收敛区域：

(a) $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$, $z=1$;　　(b) $z\cos\dfrac{1}{z}$, $z=0$;

(c) $\dfrac{\sin z}{z-\pi}$, $z=\pi$;　　(d) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$, $z=-1$;

(e) $\dfrac{1}{z(z+2)^3}$, $z=0,\ -2$.

解 (a) 设 $z-1=u$，则 $z=1+u$.

$$\frac{e^z}{(z-1)^2}=\frac{e^{1+u}}{u^2}=e\frac{e^u}{u^2}=\frac{e}{u^2}\left\{1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^4}{4!}+\cdots\right\}$$

$$=\frac{e}{(z-1)^2}+\frac{e}{z-1}+\frac{e}{2!}+\frac{e(z-1)}{3!}+\frac{e(z-1)^2}{4!}+\cdots,$$

$z=1$ 是二阶极点或双极点，当 $\neq1$ 时，级数收敛.

(b) $$z\cos\frac{1}{z}=z\left[1-\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z^4}-\frac{1}{6!}\frac{1}{z^6}+\cdots\right]$$

$$=z-\frac{1}{2!\,z}+\frac{1}{4!\,z^3}-\frac{1}{6!\,z^5}+\cdots,$$

$z=0$ 是本性奇点，当 $z\neq0$ 时，级数收敛.

(c) 设 $z-\pi=u$，则 $z=\pi+u$，

$$\frac{\sin z}{z-\pi}=\frac{\sin(u+\pi)}{u}=-\frac{\sin u}{u}=-\frac{1}{u}\left(u-\frac{u^3}{3!}+\frac{1}{5!}u^5-\cdots\right)$$

$$=-1+\frac{1}{3!}u^2-\frac{1}{5!}u^4+\cdots$$

$$=-1+\frac{1}{3!}(z-\pi)^2-\frac{1}{5!}(z-\pi)^4+\cdots,$$

$z=\pi$ 为可去奇点，级数对任意 z 均收敛.

(d) 设 $z+1=u$，则

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{u-1}{u(u+1)}=\frac{u-1}{u}(1-u+u^2-u^3+u^4-\cdots)$$

$$=-\frac{1}{u}+2-2u+2u^2-2u^3+\cdots$$

$$=-\frac{1}{z+1}+2-2(z+1)+2(z+1)^2+\cdots,$$

$z=-1$ 是一阶极点(单极点)，级数在 $0<|z+1|<1$ 内收敛.

(e) 对 $z=0$，利用二项式定理，

$$\frac{1}{z(z+2)^3}=\frac{1}{8z(1+\frac{z}{2})^3}=\frac{1}{8z}\left\{1+(-3)\frac{z}{2}+\frac{(-3)(-4)}{2!}\left(\frac{z}{2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{(-3)(-4)(-5)}{3!}\left(\frac{z}{2}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{8z}-\frac{3}{16}+\frac{3}{16}z-\frac{5}{32}z^2+\cdots,$$

$z=0$ 是一阶极点(单极点)，级数在 $0<|z|<2$ 内收敛.

对 $z=-2$，设 $z+2=u$，则

$$\frac{1}{z(z+2)^3}=\frac{1}{u^3(u-2)}=\frac{1}{-2u^3\left(1-\frac{u}{2}\right)}=-\frac{1}{2u^3}\left\{1+\frac{u}{2}+\left(\frac{u}{2}\right)^2+\left(\frac{u}{2}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$= -\frac{1}{2u^3} - \frac{1}{4u^2} - \frac{1}{8u} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32}u - \cdots$$

$$= -\frac{1}{2(z+2)^3} - \frac{1}{4(z+2)^3} - \frac{1}{8(z+2)} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32}(z+2) - \cdots,$$

$z=-2$ 是三阶极点，级数在 $0<|z+2|<2$ 内收敛.

留数和留数定理

23. 若 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上及 C 内除 $z=a$ 外处处解析，$z=a$ 为 n 阶极点，也就是

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots,$$

其中 $a_{-n} \neq 0$，证明：

(a) $\oint_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}$，

(b) $a_{-1} = \lim_{z\to a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}$.

证明 ☞　(a) 利用习题13，积分得

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}dz + \cdots + \oint_C \frac{a_{-1}}{(z-a)}dz + \oint_C \{a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots\}dz$$

$$= 2\pi i a_{-1}.$$

由于仅有包含 a_{-1} 的项保留下来，因此，我们把 a_{-1} 称为 $f(z)$ 在 $z=a$ 的留数.

(b) 两边同乘以 $(z-a)^n$，就得到泰勒级数

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + \cdots,$$

两边同时对上式求 $(n-1)$ 阶导数，再令 $z\to a$，就有

$$(n-1)!a_{-1} = \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}.$$

因此结论成立.

24. 求下列函数在给定极点处的留数：

(a) $\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$, $z=2,\ i,\ -i$;　　(b) $\frac{1}{z(z+2)^3}$, $z=0,\ -2$;

(c) $\frac{ze^{zt}}{(z-3)^2}$, $z=3$;　　(d) $\cot z$, $z=5\pi$.

解 ☞

(a) $z=2,\ i,\ -i$ 均为一阶极点.

在 $z=2$ 的留数，$\lim_{z\to 2}(z-2)\left\{\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}\right\} = \frac{4}{5}$.

在 $z=i$ 的留数：$\lim_{z\to i}(z-i)\left\{\frac{z^2}{(z-2)(z+i)(z-i)}\right\} = \frac{i^2}{(i-2)(2i)} = \frac{1-2i}{10}$.

在 $z=-i$ 的留数：$\lim_{z\to -i}(z+i)\left\{\frac{z^2}{(z-2)(z-i)(z+i)}\right\} = \frac{i^2}{(-i-2)(-2i)} = \frac{1+2i}{10}$.

(b) $z=0$ 为一阶极点，$z=2$ 为三阶极点.

在 $z=0$，留数为 $\lim_{z\to 0} z \frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{8}$.

在 $z=-2$，留数为 $\lim_{z\to -2} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left\{(z+2)^3 \frac{1}{z(z+2)^3}\right\} = \lim_{z\to -2} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to -2}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{z^3}\right) = -\frac{1}{8}$.

在 $z=0, -2$ 处的留数也可以通过求各自洛朗级数的 $\frac{1}{z}$ 和 $\frac{1}{z+2}$ 的系数得到（见习题22(e)）.

(c) $z=2$ 为二阶极点（双极点），于是在 $z=2$ 的留数为

$$\lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}\left\{(z-3)^2 \frac{ze^{zt}}{(z-3)^2}\right\} = \lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}(ze^{zt}).$$

$$= \lim_{z\to 3}(e^{zt} + zte^{zt}) = e^{3t} + 3te^{3t}.$$

(d) $z=5\pi$ 为一阶极点,在该点的留数为

$$\lim_{z\to 5\pi}(z-5\pi)\frac{\cos z}{\sin z} = \left(\lim_{z\to 5\pi}\frac{z-5\pi}{\sin z}\right)(\lim_{z\to 5\pi}\cos z).$$

$$= \left(\lim_{z\to 5\pi}\frac{1}{\cos z}\right)(-1) = (-1)(-1) = 1.$$

在上面的计算中使用了洛必达法则,该法则也可用于复变函数中.

25. 若 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 内除极点 $a,\ b,\ c,\cdots$ 外处处解析,证明:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\{f(z)\text{ 在极点 } a,\ b,\ c\cdots \text{ 的留数之和}\}$$(见图 17-6).

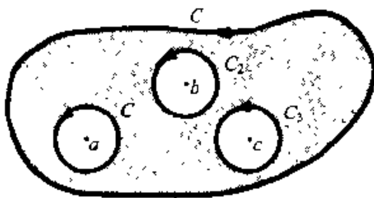


图 17-6

证明 ☞　用与习题 2 相似的方法(即在 $C,\ C_1,C_2,C_3\cdots$ 构造横截线),有

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \cdots,$$

对极点 a,

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots,$$

如例 23 所述

$$\oint_{C_1} f(z)dz = 2\pi i a_{-1}.$$

类似地,对极点 b,有

$$f(z) = \frac{b_{-n}}{(z-b)^n} + \cdots + \frac{b_{-1}}{(z-b)} + b_0 + b_1(z-b) + \cdots,$$

因此,

$$\oint_{C_2} f(z)dz = 2\pi i b_{-1}.$$

对其他极点也有类似的结果.因此

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + \cdots) = 2\pi i\{\text{留数之和}\}.$$

26. 计算 $\oint_C \frac{e^z dz}{(z-1)(z+3)^2}$,其中 C 为:(a) $|z|=3/2$;(b) $|z|=10$.

解 ☞　$z=1$ 为一阶极点,在该点留数为

$$\lim_{z\to 1}\left\{(z-1)\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\right\} = \frac{e}{10}.$$

$z=-3$ 为二阶极点,在该点的留数为

$$\lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}\left\{(z+3)^2\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\right\} = \lim_{z\to -3}\frac{(z-1)e^z - e^z}{(z-1)^2} = \frac{-5}{16}e^{-3}.$$

(a) 圆 $|z|=3/2$ 仅含有极点 $z=1$,因而

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz = 2\pi i\left(\frac{e}{16}\right) = \frac{\pi i}{8}e.$$

(b) 圆 $|z|=10$ 含有极点 $z=1$ 和 $z=-3$,因此

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz = 2\pi i\left(\frac{e}{16} - \frac{5e^{-3}}{16}\right) = \frac{\pi i(e-5e^{-3})}{8}.$$

定积分计算

27. 若当 $z=Re^{i\theta}$ 时,$|f(z)|\leqslant\frac{M}{R^k}$,其中 $k>1$,M 为常数.证明 $\lim_{k\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz=0$,$\Gamma$ 是半径为

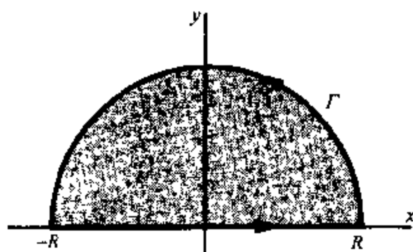


图 17-7

R 的上半圆弧(见图 17-7).

证明 ☞ 利用 p.341 的结论(4),有

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leqslant \int_\Gamma |f(z)||dz| \leqslant \frac{M}{R^k}\pi R = \frac{M}{R^{k-1}},$$

其中圆弧的周长 $L=\pi R$.于是

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| = 0 \quad 即 \lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

28. 若 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^4}$,证明对 $z=Re^{i\theta}$,有 $|f(z)|\leqslant\dfrac{M}{R^k}$, 其中 $k>1$.

证明 ☞ 由 $z=Re^{i\theta}$,有

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{1+R^4e^{4i\theta}}\right| \leqslant \frac{1}{|R^4e^{4i\theta}|-1} = \frac{1}{R^4-1}.$$

取 R 充分大(比如 $R>2$),则 $\dfrac{1}{R^4-1}\leqslant\dfrac{2}{R^4}$.因此,取 $M=2,k=4$, 即得 $|f(z)|\leqslant\dfrac{M}{R^k}$.

在上面的证明中;对 $z_1=R^4e^{4i\theta}$ 和 $z_2=1$ 用到了不等式 $|z_1+z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|$.

29. 计算 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$.

解 ☞ 考虑 $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z^4+1}$,其中 C 是由 x 轴上 $-R$ 到 R 的直线段和上半圆 Γ 组成的正向闭回路.

当 $z=e^{\frac{\pi}{4}i},e^{\frac{3\pi}{4}i},e^{\frac{5\pi}{4}i},e^{\frac{7\pi}{4}i}$ 时,$z^4+1=0$, 这些奇点均为 $\dfrac{1}{z^4+1}$ 的一阶极点,但只有 $e^{\frac{\pi}{4}i}$ 和 $e^{\frac{3}{4}\pi i}$ 在 C 内.由洛必达法则,在 $e^{\frac{\pi}{4}i}$ 的留数为

$$\lim_{z\to e^{\frac{\pi}{4}i}}\left\{(z-e^{\frac{\pi}{4}i})\frac{1}{z^4+1}\right\} = \lim_{z\to e^{\frac{\pi}{4}i}}\frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4}e^{-\frac{3}{4}\pi i}.$$

在 $e^{\frac{3}{4}\pi i}$ 处的留数为

$$\lim_{z\to e^{\frac{3}{4}\pi i}}\left\{(z-e^{\frac{3}{4}\pi i})\frac{1}{z^4+1}\right\} = \lim_{z\to e^{\frac{3}{4}\pi i}}\frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4}e^{-\frac{9}{4}\pi i},$$

因此

$$\oint_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\left\{\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{4}\pi i}+\frac{1}{4}e^{-\frac{9}{4}\pi i}\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi, \tag{1}$$

即

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{x^4+1} + \int_\Gamma \frac{dz}{z^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \tag{2}$$

在(2)式两边取极限,令 $R\to\infty$,利用习题 28 的结论,有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{dx}{x^4+1} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

由于 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$,因此 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

30. 证明 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{7}{50}\pi$.

证明 ☞ 用习题 27 同样的封闭回路 C,$\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$ 有二个极点在 C 内,$z=i$ 为二阶极点,$z=-1+i$ 为一阶极点.

在 $z=i$ 的留数为

$$\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{(z-i)^2\frac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2(z^2+2z+2)}\right\} = \frac{9i-12}{100},$$

在 $z=-1+i$ 的留数为

$$\lim_{z\to -1+i}(z+1-i)\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+1-i)(z+1+i)}=\frac{3-4i}{25},$$

因此 $$\oint_C \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+z+2)}dz=2\pi i\left\{\frac{9i-12}{100}+\frac{3-4i}{25}\right\}=\frac{7}{50}\pi$$

或 $$\int_{-R}^{R}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}+\int_\Gamma\frac{z^2dz}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}=\frac{7}{50}\pi.$$

由习题 27 知，第二个积分当 $R\to\infty$ 时极限为零，于是

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}=\frac{7\pi}{50},$$

31. 计算 $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\sin\theta}$.

解 ☞　设 $z=e^{i\theta}$，则 $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{z-z^{-1}}{2i}$，$dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta$. 因此

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\sin\theta}=\oint_C\frac{dz/iz}{5+3\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)}=\oint_C\frac{2}{3z^2+10iz-3}dz,$$

其中 C 是圆心在原点的单位圆周. 如图 17-8 所示.

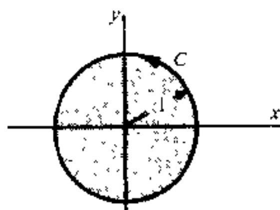


图 17-8

$\frac{2}{3z^2+10iz-3}$ 的极点都是一阶极点，它们是 $z=\frac{-10i\pm\sqrt{-100+36}}{6}=\frac{-10i\pm 8i}{6}=-3i,\ -\frac{i}{3}$，但仅有 $-\frac{i}{3}$ 在 C 内. 在 $-\frac{i}{3}$ 处的留数为

$$\lim_{z\to -i/3}\left(z+\frac{i}{3}\right)\left(\frac{2}{3z^2+10iz-3}\right)=\lim_{z\to -i/3}\frac{2}{6z+10i}=\frac{1}{4i},$$

因此 $$\oint_C\frac{2}{3z^2+10iz-3}dz=2\pi i\left(\frac{1}{4i}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

32. 证明 $\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\frac{\pi}{12}$.

证明 ☞　设 $z=e^{i\theta}$，$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}$，$\cos 3\theta=\frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2}=\frac{z^3+z^{-3}}{2}$，$dz=izd\theta$，则

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\oint_C\frac{(z^3+z^{-3})/2}{5-4\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)}\frac{dz}{iz}=-\frac{1}{2i}\oint_C\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}dz,$$

其中 C 是习题 31 中的闭回路.

被积函数有两个奇点在 C 内，其中 $z=0$ 为三阶极点，$z=1/2$ 为单极点. 在 $z=0$ 的留数为

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left\{z^3\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\right\}=\frac{21}{8},$$

在 $z=\frac{1}{2}$ 的留数为

$$\lim_{z\to 1/2}\left\{\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\right\}=-\frac{65}{24},$$

因此 $$-\frac{1}{2i}\oint_C\frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}=-\frac{1}{2i}\cdot 2\pi i\left\{\frac{21}{8}-\frac{65}{24}\right\}=\frac{\pi}{12}.$$

33. 设 $z=e^{i\theta}$，若 $|f(z)|\leqslant\frac{M}{R^k}$，$k>0$，$M$ 为常数，证明 $\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma e^{imz}f(z)dz=0$，其中 Γ 是习题 27 中的半圆弧，m 为正数.

证明 ☞　由 $z=Re^{i\theta}$，有

$$\int_\Gamma e^{imz}f(z)dz=\int_0^\pi e^{imRe^{i\theta}}f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta,$$

于是，$$\left|\int_0^\pi e^{imRe^{i\theta}}f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta\right|\leqslant\int_0^\pi\left|e^{imRe^{i\theta}}f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}\right|d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left| e^{imR\cos\theta - mR\sin\theta} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} \right| d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta} \mid f(Re^{i\theta}) \mid R d\theta$$

$$\leqslant \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta} d\theta = \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\theta} d\theta.$$

当 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ 时，有 $\sin\theta \geqslant \frac{2\theta}{\pi}$（见第四章习题 77），有

$$\frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\theta} d\theta \leqslant \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi M}{mR^k}(1 - e^{-mR}).$$

当 $R \to \infty$，由于 m, k 为正整，因此 $\frac{\pi M}{mR^k}(1 - e^{-mR}) \to 0$. 由此得 $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\Gamma} e^{imz} f(z) dz = 0$.

34. 证明 $\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}, \ m > 0.$

证明 ☞ 考虑积分 $\oint_C \frac{e^{imz}}{1+z^2} dz$，其中 C 是习题 27 所示的闭曲线，被积函数有两个单极点 $z = \pm i$，但仅 $z = i$ 在 C 内. 在 $z = i$ 的留数为

$$\lim_{z\to i} \left\{ (z - i) \frac{e^{imz}}{(z - i)(z + i)} \right\} = \frac{1}{2i} e^{-m},$$

因此
$$\oint_C \frac{e^{imz}}{1 + z^2} dz = 2\pi i \left(\frac{e^{-m}}{2i} \right) = \pi e^{-m}$$

或
$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{imx}}{x^2 + 1} dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{imz}}{1 + z^2} dz = \pi e^{-m},$$

即
$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx + i \int_{-R}^{R} \frac{\sin mx}{x^2 + 1} dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} dz = \pi e^{-m}.$$

于是，
$$2\int_0^{R} \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} dz = \pi e^{-m}.$$

当 $R \to \infty$ 时，两边取极限，由习题 33 知

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} dz = 0,$$

因此得到
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}.$$

35. 证明 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

证明 ☞ 与习题 34 的解题方法类似，考虑函数 $\frac{e^{iz}}{z}$ 沿习题 27 中闭回路的积分. 但由于 $z = 0$ 在积分回路上，为使积分回路不通过奇点，我们调整回路，使其绕过原点，如图 17-9 所示，得到的回路用 C' 或 $ABDEFGHJA$ 表示.

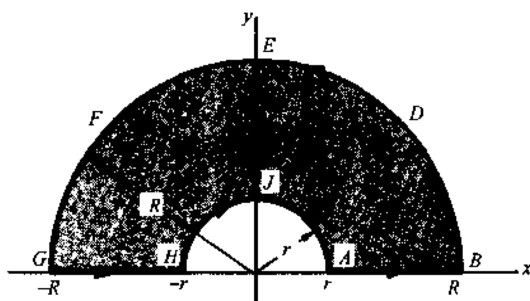


图 17-9

由于 $z = 0$ 不在 C' 内，因而有

$$\int_{C'} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0,$$

或

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

在第一个积分中，把 x 换成 $-x$，再与第三个积分合并，有

$$\int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx + \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0,$$

或
$$2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}dx = -\int_{HJA}\frac{e^{iz}}{z}dz - \int_{BDEFG}\frac{e^{iz}}{z}dz.$$

当 $r\to 0, R\to\infty$，由习题33，右端的第二个积分趋于零，而第一个积分取极限为
$$-\lim_{r\to 0}\int_\pi^0 \frac{e^{ire^{i\theta}}}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}d\theta = -\lim_{r\to 0}\int_\pi^0 ie^{ire^{i\theta}}d\theta = \pi i,$$
此时极限号与积分号可以交换.

因此，$\lim\limits_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}} 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}dx = \pi i$，即 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

杂例

36. 设 $w = z^2$ 是由 z 平面（xy 平面）到 w 平面（uv 平面）上的一个变换，考虑 z 平面上的三角形，顶点为 $A(2,1), B(4,1), C(4,3)$.（a）说明该三角形的像是 uv 平面上的曲边三角形；（b）求出曲边三角形的夹角和对应的原三角形的角度.

解 （a）由于 $w = z^2$，因此变换方程为 $u = x^2 - y^2, v = 2xy$，点 $A(2,1)$ 的像点为 $A'(3,4)$（见图 17-10(b)），类似地，点 B, C 的像点分别为 B', C'，构成三角形 ABC 的线段 AC, BC, AC 的像分别构成曲面三角形的抛物线段 $A'C', B'C', A'B'$. 它们的方程见 17-10(a)，(b).

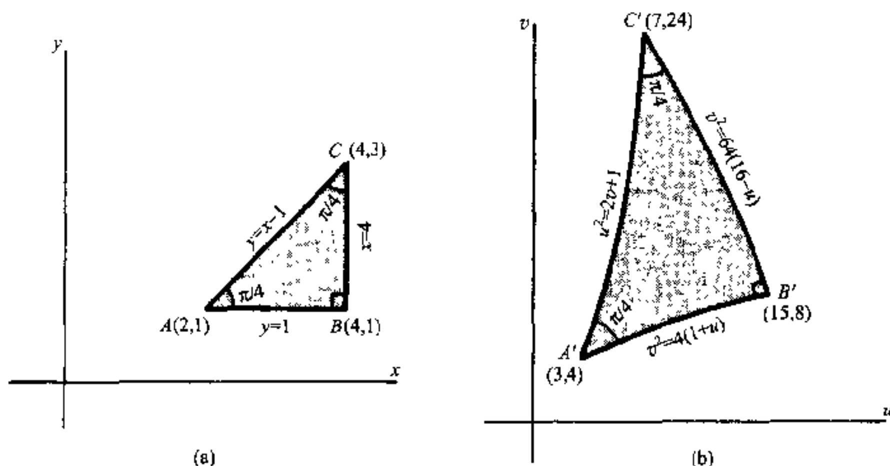


图 17-10

（b）曲线 $v^2 = 4(1+u)$ 在 $(3,4)$ 的切线斜率为
$$m_1 = \left.\frac{dv}{du}\right|_{(3,4)} = \left.\frac{2}{v}\right|_{(3,4)} = \frac{1}{2},$$
而曲线 $u^2 = 2v + 1$ 在 $(3,4)$ 的切线斜率为
$$m_2 = \left.\frac{dv}{du}\right|_{(3,4)} = u\Big|_{(3,4)} = 3,$$
则两条曲线在 A' 点之间的夹角为
$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3\times\left(\frac{1}{2}\right)} = 1, \text{ 即 } \theta = \pi/4.$$

类似地，$A'C'$ 和 $B'C'$ 之间的夹角为 $\pi/4$，而 $A'B'$ 和 $B'C'$ 之间的夹角为 $\pi/2$. 因此，曲边三角形三个夹角与原三角形的三个夹角相等. 一般地，若 $w = f(z)$ 是一个变换，而 $f(z)$ 是解析的，只要 $f'(z_0)\neq 0$，则 z 平面交于点 $z = z_0$ 的两条曲线之间的夹角与它们对应的像曲线之间的夹角在大小和方向上相同，这个性质称为解析函数的共形性质. 正因为如此，变换 $w = f(z)$ 也常常称为共形变换或共形映射函数.

37. 设 $w = \sqrt{z}$ 是一个从 z 平面到 w 平面上的变换，一个点沿圆周 $|z| = 1$ 逆时针移动，说明：当它第一次返回到其初始位置时，它的像点还未到达其初始位置；当点第二次回到初始位

置时，它的像点才第一次回到初始位置.

解 设 $z=e^{i\theta}$，则 $w=\sqrt{z}=e^{i\theta/2}$，$\theta=0$ 对应初始位置，此时，$z=1$ 时，$w=1$(图 17-11(a)，(b)上为 A 点和 P 点).

当 z 平面上的点从点 A 沿圆绕一周回到初始位置时，$\theta=2\pi$，$z=1$，但是 $w=e^{i\theta/2}=e^{i\pi}=-1$. 因此，像点还没有回到它的初始位置.

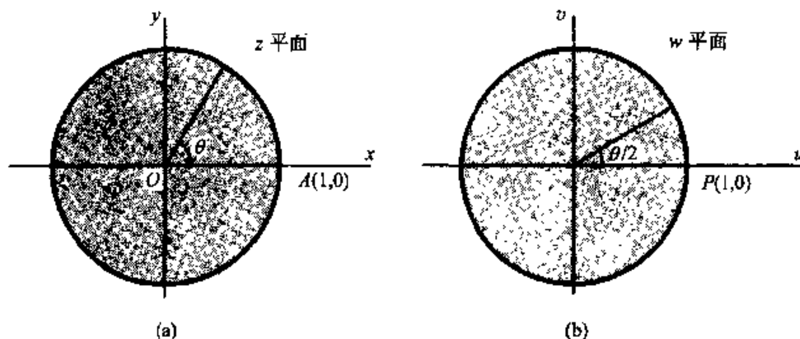


图 17-11

但当 z 平面上的点从点 A 沿圆绕二周时，$\theta=2\pi$，$z=1$，$w=e^{i\theta/2}=e^{2\pi i}=1$，即像点首次回到它的初始位置.

由上述分析，我们看到 w 并不是 z 的单值函数，而是 z 的双值函数，即对每一个 z 值，有 w 的二个值与之对应. 如果限制 θ 的取值范围，就可把该函数看作单值函数. 例如，限制 θ 在 $[0,2\pi)$ 内，它就对应双值函数 $w=\sqrt{z}$ 的一个分支，而 $2\pi\leqslant\theta<4\pi$ 对应另一分支. 点 $z=0$ 称为分支点，当绕 $z=0$ 时，就从第一分支跃入第二分支. 如果我们不越过 x 轴的正向(称为分支线)，则可保证 $f(z)=\sqrt{z}$ 是一个单值函数.

38. 证明 $\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}$，$0<p<1$.

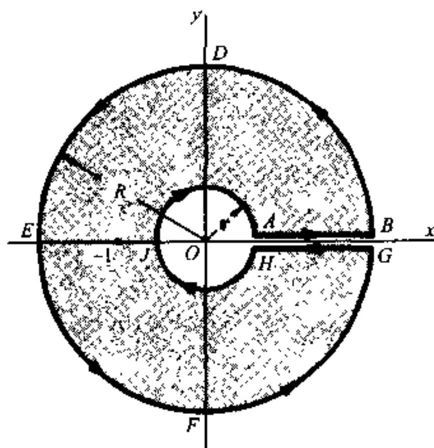


图 17-12

证明 考虑积分 $\oint_C\frac{z^{p-1}}{1+z}dz$，由于 $z=0$ 是分支点，取闭回路 C 如图 17-12 所示，其中 AB 和 GH 在 x 轴上实际上是重合线段，只是为了使读者能够分辨而在图上分开了.

被积函数有一个极点 $z=-1$ 在 C 内. 在 $z=-1$ 的留数为

$$\lim_{z\to-1}(z+1)\frac{z^{p-1}}{1+z}=(e^{\pi i})^{p-1}=e^{(p-1)\pi i}.$$

因此，

$$\oint_C\frac{z^{p-1}}{1+z}dz=2\pi ie^{(p-1)\pi i}.$$

为了书写方便，略去被积函数，于是

$$\int_{AB}+\int_{BDEFG}+\int_{GH}+\int_{HJA}=2\pi ie^{(p-1)\pi i},$$

因此，有

$$\int_r^R\frac{x^{p-1}}{1+x}dx+\int_0^{2\pi}\frac{(Re^{i\theta})^{p-1}iRe^{i\theta}d\theta}{1+Re^{i\theta}}$$

$$+\int_R^r\frac{(xe^{2\pi i})^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}}dx+\int_{2\pi}^0\frac{(re^{i\theta})^{p-1}ire^{i\theta}}{1+re^{i\theta}}d\theta=2\pi ie^{(p-1)\pi i},$$

其中由于当 z 绕着圆周 $BDEFG$ 运动到 G 时，z 的辐角增大到 2π，所以沿线段 GH 积分时，取 $z=xe^{2\pi i}$.

当 $r\to0$，$R\to\infty$，注意到第二、四个积分的极限为零，因此有

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx+\int_{\infty}^0\frac{e^{2\pi i(p-1)}x^{p-1}}{1+x}dx=2\pi e^{(p-1)\pi i},$$

或

$$(1-e^{2\pi i(p-1)})\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=2\pi ie^{(p-1)\pi i},$$

所以
$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{2\pi i e^{(p-1)\pi i}}{1-e^{2\pi i(p-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{p\pi i}-e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

补充习题

函数,极限,连续性

39. 描述下列等式所表示的点的轨迹,并画图:

(a) $|z+2-3i|=5$,　(b) $|z+2|=2|z-1|$,

(c) $|z+5|-|z-5|=6$.

40. 描出由下列不等式所确定的区域:

(a) $|z-2+i|\geqslant 4$,　(b) $|z|\leqslant 3$, $0\leqslant \arg z\leqslant \frac{\pi}{4}$,

(c) $|z-3|+|z+3|<10$.

41. 把下列函数表示成 $u(x,y)+iv(x,y)$ 的形式,其中 u, v 是实函数:

(a) z^3+2iz, (b) $z/(z+3)$, (c) e^{z^2}, (d) $\ln(1+z)$.

42. 证明:(a) $\lim\limits_{z\to z_0} z^2=z_0^2$; (b) 利用定义证明 $f(z)=z^2$ 在 z_0 的连续性.

43. (a) 若 $z=\omega$ 是 $z^5=1$ 的根,且 $\omega\neq 1$,证明 $z^5=1$ 的所有根为 $1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4$.

(b) 证明 $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$.

(c) 把(a)、(b)的结论推广到方程 $z^n=1$.

导数,柯西 黎曼方程

44. (a)若 $w=f(z)=z+\frac{1}{z}$,利用导数定义求$\frac{dw}{dz}$.

(b) 在哪些点 z 处 $f(z)$是不解析的.

45. 已知函数 $w=z^4$; (a) 求 $w=u+iv$ 的实部和虚部;(b)证明对 z 平面上的任一点,柯西-黎曼方程成立;

(c)证明 u 和 v 是调和函数;(d) 求$\frac{dw}{dz}$.

46. 证明 $f(z)=z|z|$ 处处不解析.

47. 证明 $f(z)=\frac{1}{z-2}$在 z 平面除$z=2$ 外处处解析.

48. 若解析函数的虚部是 $2x(1-y)$, 确定:(a)实部;(b)解析函数的表达式.

49. 求解析函数 $f(z)$,它的实部是 $e^{-x}(x\cos y+y\sin y)$且满足 $f(0)=1$.

50. 证明:不存在解析函数其虚部为 x^2-2y.

51. 求 $f(z)$使得 $f'(z)=4z-3$ 且满足 $f(1+i)=-3i$.

积分,柯西定理,柯西积分公式

52. 计算$\int_{1-2i}^{3+i}(2z+3)dz$

(a) 沿路径 $x=2t+1$, $y=4t^2-t-2$, $0\leqslant t\leqslant 1$;

(b) 沿连接 $1-2i$ 和 $3+i$ 的直线段;

(c) 沿连接 $1-2i$ 和 $1+i$ 的直线和再沿连接 $1+i$ 和 $3+i$ 的直线所组成的折线.

53. 计算$\int_C(z^2-z+2)dz$, 其中 C 是上半单位圆,方向为逆时针.

54. 计算$\oint_C\frac{z}{2z-5}dz$, 其中 C 是圆(a)$|z|=2$; (b)$|z-3|=2$.

55. 计算$\oint_C\frac{z^2dz}{(z+2)(z-1)}$,其中 C 为(a)顶点为 $-1-i$, $-1+i$, $-3+i$, $-3-i$ 的正方形;(b)圆$|z+i|=3$; (c)$|z|=\sqrt{2}$.

56. 计算:(a)$\oint_C\frac{\cos\pi z}{z-1}dz$; (b)$\oint_C\frac{e^z+z}{(z-1)^4}dz$,

其中 C 是包含 $z=1$ 的任一简单闭曲线.

57. 证明柯西积分公式

(提示:利用导数的定义,再利用数学归纳法).

级数和奇点

58. 下列级数在何处收敛:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{n!}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-i)^n}{n+1}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(z^2+2z+2)^{2n}$.

59. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)}$在$|z|\leqslant 1$中是(a)绝对收敛;(b)一致收敛.

60. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{2^n}$在半径$R$满足$|z+i|<R<2$的任意圆中一致收敛.

61. 求下列函数在有限 z 平面上的所有奇点,并确定奇点的类型:

(a) $\frac{z-2}{(2z+1)^4}$; (b) $\frac{z}{(z-1)(z+2)^2}$; (c) $\frac{z^2+1}{z^2+2z+2}$; (d) $\cos\frac{1}{z}$;

(e) $\frac{\sin(z-\pi/3)}{3z-\pi}$; (f) $\frac{\cos z}{(z^2+4)^2}$.

62. 求下列函数在指定奇点的洛朗级数,并由此判断奇点的类型及找出级数的收敛域:

(a) $\frac{\cos z}{z-\pi}$, $z=\pi$; (b) $z^2e^{-\frac{1}{z}}$, $z=0$;

(c) $\frac{z^2}{(z-1)^2(z+3)}$, $z=1$.

留数和留数定理

63. 求下列函数在极点处的留数:

(a) $\frac{2z+3}{z^2-4}$; (b) $\frac{z-3}{z^3+5z^2}$; (c) $\frac{e^{3t}}{(z-2)^3}$; (d) $\frac{z}{(z^2+1)^2}$.

64. 求函数 $e^{z}\tan z$ 在一阶极点 $z=\frac{3\pi}{2}$处的留数.

65. 计算$\oint_C\frac{dz}{(z+1)(z+3)}$,其中 C 是包含所有极点的简单闭曲线.

66. 若 C 是含有 $z=\pm i$ 的简单闭曲线,证明

$$\oint_C\frac{ze^{zt}}{(z^2+1)^2}dz=\frac{1}{2}t\sin t.$$

67. 若 $f(z)=P(z)/Q(z)$, 其中 $P(z)$, $Q(z)$是多项式,且 $Q(z)$的次数至少比 $P(z)$的次数高二次,证明:对含有 $f(z)$的所有极点的闭曲线 C,有$\oint_C f(z)dz=0$.

定积分计算

利用围道积分法验证下列积分:

68. $\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

69. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^6+a^6}=\frac{2\pi}{3a^5}, a>0$.

70. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2}=\frac{\pi}{32}$.

71. $\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^3+1}dx=\frac{\pi}{3}$.

72. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^4+a^4)^2}=\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}a^{-7}(a>0)$.

73. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}=\frac{\pi}{9}$.

74. $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2-\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

75. $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}=\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$.

76. $\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\frac{\pi}{8}$

77. $\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}=\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$.

78. $\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta=\frac{2\pi a^n}{1-a^2}, n=0,1,2,3,\cdots,0<a<1$.

79. $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^3}=\frac{(2a^2+b^2)\pi}{(a^2-b^2)^{5/2}}, a>|b|$.

80. $\int_0^{\infty}\frac{x\sin 2x}{x^2+4}dx=\frac{\pi}{4}e^{-4}$.

81. $\int_0^{\infty}\frac{\cos 2\pi x}{x^4-4}dx=\frac{\pi e^{-\pi}}{8}$.

82. $\int_0^{\infty}\frac{x\sin\pi x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{\pi^2e^{-\pi}}{4}$.

83. $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx=\frac{\pi(2e-3)}{4e}$.

84. $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$.

85. $\int_0^{\infty}\frac{\sin^3x}{x^3}dx=\frac{3\pi}{8}$.

86. $\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{\cosh x}dx=\frac{\pi}{2\cosh(\pi/2)}$(提示:考虑积分$\oint_C\frac{e^{iz}}{\cosh z}dz$，其中 C 是顶点为$(-R,0),(R,0),(R,\pi),(-R,\pi)$的矩形,再取 $R\to\infty$).

杂题

87. 若 $z=\rho e^{i\phi}$, $f(z)=u(\rho,\phi)+iv(\rho,\phi)$，其中 ρ,ϕ 为极坐标,证明柯西-黎曼方程为

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\phi},\ \frac{\partial v}{\partial\rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\phi}.$$

88. 若 $w=f(z)$为从 z 平面到 w 平面的一个变换,其中 $f(z)$是解析函数,$z=x+iy$, $w=u+iv$,证明变换的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=|f'(z)|.$$

89. 设变换 $w=f(z)$把函数 $F(x,y)$变为函数 $G(u,v)$,证明若$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}=0$,则对任一点 z,只要 $f'(z)\neq 0$,就有$\frac{\partial^2G}{\partial u^2}+\frac{\partial^2G}{\partial v^2}=0$.

90. 证明 z 平面的圆经过双线性变换 $w=\frac{az+b}{cz+d}(ad-bc\neq0)$得到的 w 平面上的像曲线仍为圆.

91. 若 $f(z)$在圆$|z-a|=R$ 上及 R 内处处解析,且 $f(z)$在圆上满足$|f(z)|\leqslant M$,证明柯西不等式

$$|f^{(n)}(a)|\leqslant\frac{n!M}{R^n}.$$

(提示:利用柯西积分公式).

92. 设 C_1,C_2 为圆心均在 $z=a$,半径分别为 r_1,r_2 的同心圆$(r_1<r_2)$,若 $a+h$ 是C_1,C_2 为边界的圆环内的任一点,$f(z)$在该圆环内处处解析,证明洛朗定理:

$$f(a+h)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_nh^n,$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,$$

这里 C 是圆环域中围绕C_1 的任一条闭曲线.

$\left(\text{提示}:f(a+h)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-a-h}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-(a+h)}dz,\text{把}\frac{1}{z-a-h}\text{按二种不同方法展开}\right).$

93. 求函数 $f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}$在圆环域 $1<|z|<2$ 的洛朗级数.

$\left(\text{提示}:\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{-1}{z+1}+\frac{2}{z+2}=\frac{-1}{z[1+1/z]}+\frac{1}{1+z/2}\right).$

94. 设$\int_0^{\infty}e^{-st}F(t)dt=f(s)$,其中 $f(s)$是一个有理函数,且分母的次数高于分子的次数,若 C 是包含 $f(s)$的所有极点的简单闭曲线,则可以证明 $F(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_Ce^{zt}f(z)dz$ 等于 $e^{st}f(t)$在 C 中所有极点的留数之和.设 $f(s)$为(a)$\frac{s}{s^2+1}$; (b) $\frac{1}{s^2+2s+5}$; (c) $\frac{s^2+1}{s(s-2)^2}$, (d) $\frac{1}{(s^2+1)^2}$，利用上式,求 $F(t)$,并检验结果.

注:$f(s)$称为 $F(t)$的拉氏变换,$F(t)$称为 $f(s)$的拉氏逆变换(见第十二章),上式可以推广到 $f(s)$的其他类型函数.

补充习题答案

第 一 章

35. (a) 2200, (b) 32, (c) $-51/41$, (d) 1.

36. (a) 2, (b) 6, -4, (c) -1, 1, (d) $-\frac{1}{2}$.

38. (a) $0.\dot{4}2857\dot{1}$, (b) 2.2360679….

44. (a) 3, -2, 3/2, (b) 8/3, $-2\pm\sqrt{5}$, (c) $\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{17})$, $\frac{1}{2}(-5\pm\sqrt{17})$.

47. (a) $0<x\leqslant\frac{1}{2}$, (b) $-6\leqslant x\leqslant 4$, (c) $x<3/2$, (d) $x>3$, $-1<x<-\frac{1}{3}$或$x<-2$.

55. (a) 64, (b) 7/4, (c) 50,000, (d) 1/25, (e) $-7/144$.

58. (b) C. 连续统的基数.

59. (b) χ.

63. (c) C.

64. (a) 是的,(b) 上确界(l.u.b.) = 1.1, 下确界(g.l.b.) = 0.9, (c) 1, (d) 是的.

65. (a) 是的,(b) l.u.b. = 1, g.l.b. = -1,(c) 1, -1, (d) 不是的.

73. (a) $1-4i$, (b) $-9-46i$, (c) $\frac{11}{5}-\frac{2}{5}i$, (d) -1, (e) $\frac{10}{37}$, (f) $\frac{16}{5}-\frac{2}{5}i$.

76. 3, $\frac{1}{2}$, $-1\pm i$.

79. (a) $6\text{cis}\pi/6$, (b) $2\sqrt{2}\text{cis}5\pi/4$, (c) $2\text{cis}5\pi/3$, (d) $5\text{cis}0$, (e) $5\text{cis}3\pi/2$.

80. (a) $-5\sqrt{2}+5\sqrt{2}i$, (b) $-2i$.

81. (a) 2cis15°, 2cis135°, 2cis255°.

(b) cis36°, cis108°, cis180° = -1, cis252°, cis324°.

(c) $\sqrt[3]{2}$cis110°, $\sqrt[3]{2}$cis230°, $\sqrt[3]{2}$cis350°.

(d) cis225°, cis112.5°, cis202.5°, cis292.5°.

96. (a) 1010111, (b) 2101, (c) 2338.

97. (a) 110001, (b) 61.

99. (a) 0.1010101…, (b) 0.2 或 0.2000…, (c) 0.5252…, (d) 0.6666….

100. 3.28125.

101. 5.

102. $2e5t$.

103. 18/11.

104. 428571.

第 二 章

35. (a) $-2\leqslant x\leqslant 3$, (b) $x\neq\pm 2$, (c) $2m\pi/3\leqslant x\leqslant(2m+1)\pi/3$, $m=0$, ±1, ±2, …,(d) $x>3$, $-2<x<2$.

36. (a) $\frac{61}{18}$, (b) $\frac{1}{25}$, (c) $\frac{6x-8}{2x-5}$, $x\neq 0$, $\frac{5}{2}$, 2, (d) $\frac{5}{2}$, $x\neq 0$, 2,(e) $\frac{7}{2h-4}$, $h\neq 0,2$, (f) $\frac{10x+1}{x+5}$, $x\neq -5$, 2.

37. (a) 8, (b) 0.

44. (a) $-\pi/3$, (b) $\pi/2$, (c) $-\pi/3$, (d) $\ln(1+\sqrt{2})$, (e) $3/4$, (f) $\pi/2$, (g) $\pi/2-2x$, (h) $2x-3\pi/2$, (i) $\dfrac{|x|}{x\sqrt{9x^2+1}}$, (j) $\dfrac{1-x^4}{1+x^4}$.

45. (a) $-\sqrt{2}/2$, (b) $\ln 2$.

51. (a) 2, (b) $-\dfrac{1}{7}$, (c) 4, (d) $-\dfrac{1}{4}$, (e) 32, (f) $\dfrac{1}{2}$.

52. (b) 9, (c) -10, (d) 5, (e) -1, (f) 不存在.

53. (a) 2, (b) 3.

56. (a) $\dfrac{1}{2}$, (b) -1, (c) 不存在.

57. (a) 1, (b) -1.

62. (a) 2, (b) 1/6, (c) 2, (d) 1/6, (e) 不存在.

63. (a) 0, (b) 1.

67. (a) $-8/21$, (b) 3/10, (c) 1, (d) 1/32.

68. 1/12.

70. (a) 3, (b) 0, (c) 1/2, (d) $-1/\pi$, (e) $\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$, (f) 2/7, (g) -1, (h) $4\pi^2$.

75. (a) 连续,(b) 连续,(c) 连续,(d) 不连续.

82. (a) $x=2, 4$, (b) 无,(c) 无,(d) $x=7\pi/6\pm2m\pi,\ 11\pi/6\pm2m\pi, m=0,1,2,\cdots$.

88. (c) 近似于4.49.

第 三 章

32. (a) $\dfrac{\sqrt{1}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{\sqrt{4}}{5}$, (b) $\dfrac{1}{1!}, -\dfrac{1}{2!}, \dfrac{1}{3!}, -\dfrac{1}{4!}$,

(c) $\dfrac{1}{1^5}, \dfrac{2x}{3^5}, \dfrac{4x^2}{5^5}, \dfrac{8x^3}{7^5}$, (d) $\dfrac{-x}{1}, \dfrac{x^3}{1\cdot3}, \dfrac{-x^5}{1\cdot3\cdot5}, \dfrac{x^7}{1\cdot3\cdot5\cdot7}$.

(e) $\dfrac{\cos x}{x^2+1^2}, \dfrac{\cos 2x}{x^2+2^2}, \dfrac{\cos 3x}{x^2+3^2}, \dfrac{\cos 4x}{x^2+4^2}$.

33. (a) $\dfrac{(-1)^n(2n-1)}{(3n+2)}$, (b) $\dfrac{1-(-1)^n}{2}$, (c) $\dfrac{(n+3)}{(n+5)}\cdot\dfrac{1-(-1)^n}{2}$.

34. (a) 1,1,2,3,5,8.

36. (a) 502, (b) 5002, (c) 50002.

45. (a) $-3/2$, (b) $-1/2$, (c) $\sqrt{3}/2$, (d) -15, (e) 1/2, (f) 3.

51. (a) $\dfrac{1}{3}, -1, 0, 0$, (b) $1, -1, 1, -1$, (c) 无,无,$+\infty, -\infty$,(d) 无,$1, +\infty, 1$.

53. 2.

54. $\dfrac{1}{6}$.

74. (a) $\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{3+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{5+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2}$, (b) $1+\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{2+}\cdots$,

(c) $2+\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{4+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{4+}\cdots$, (d) $3+\dfrac{1}{7+}\dfrac{1}{15+}\dfrac{1}{1+}\dfrac{1}{25+}\dfrac{1}{7+}\dfrac{1}{4}$.

76. (b) 26/15.

78. (a) 与34题相同, (b) $u_n=2(3)^{n-1}+(-1)^{n-1}$, (c) $u_n=M\cdot2^n$.

第 四 章

41. (a) 17/25, (b) 2, (c) $\dfrac{1}{4}$, (d) $\dfrac{1}{2}$.

43. (a) 是的;(b) 是的,0.

47. (a) 0; (b) 0; (c) 是的,0.

51. (b) $y=5x-6$, $y=6x-7$; (c) $(1,-1)$; (d) $3x^2-2x+5$, $6x-2$, $6,0,0,\cdots$.

55. (a) 0.0501, (b) 0.05, (c) 5.01, (d) 5, (e) 0.01.

56. (a) 0.515, (b) 0.12, (c) 2.0125.

59. (a) 3ln4, (b) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

62. $x^x(1+\ln x)$.

63. $\left(\frac{\pi}{4\ln 2}+\frac{2\ln\ln 2}{\sqrt{3}}\right)(\ln 2)^{\pi/6}$.

65. (a) $y^2(1-xy)$, (b) $(3y^3-2xy^4)/(1-xy)^3$, 假定 $xy\neq 1$.

67. (a) $\sqrt{2}$, (b) -1, (c) $3\sqrt{2}$.

79. (b) 0.09531, 误差小于 2.10^{-6}.

80. (a) 0.438, (b) 0.197, (c) 1.543, (d) 0.741.

85. (a) $\frac{1}{6}$, (b) -1, (c) $-4/\pi$, (d) 0, (e) 0, (f) ln3/2, (g) e^{-6}, (h) 1, (i) 0, (j) 1, (k) $\frac{2}{3}$, (l) $\frac{1}{3}$, (m) 6, (n) $e^{-1/6}$, (o) e^2, (p) e.

90. 当 $x=e^{-1}$ 时 $f(x)$ 有极小值.

96. (a) 3.268, (b) 1.131.

第 五 章

36. (b) $\frac{1}{4}$.

37. (a) 8, (b) 9.

53. (a) $\frac{1}{3}e^{\sin x^3}+c$, (b) $\pi^2/32$, (c) $\pi/3$, (d) $-2\coth\sqrt{u}+c$, (e) $\frac{1}{4}\ln 3$.

56. $\sqrt{x^2+2x+5}-\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}|+c$.

58. (a) $-2/9$, (b) $-\frac{1}{8}e^{-2x}(4x^3+6x^2+6x+3)+c$.

60. (c) $\pi^4-12\pi^2-48$.

67. (a) 0.322, (b) 1.105.

68. (a) 2, (b) π^2-4.

69. $\frac{1}{3}M$, 其中 M 为这区域的质量.

73. $\pi^2/2$.

75. (b) a^2.

76. (b) $8a$.

80. (a) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, (b) 3, (c) 不存在.

81. $e/2\pi$.

87. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

92. 9.

93. 3.

第 六 章

47. (a) $-\frac{1}{4}$, (b) $\frac{11}{5(3h+5)}$, (c) $\frac{2x+2y+xy}{1-x^2y-xy^2}$.

48. (a) -1, (b) $x^2-x-2-yz^2+z^2+3xy+3y$, (c) $x^2y^2-x^2z-xyz+3x^2yz$.

49. (a) $x^2+y^2\neq 1$, (b) $x+y>0$, (c) $\left|\dfrac{2x-y}{x+y}\right|\leqslant 1$.

50. (a) $x+y+z\leqslant 1$, $x^2+y^2+z^2<1$ 和 $x+y+z\geqslant 1$, $x^2+y^2+z^2>1$.

51. (a) 平面,(b) 旋转抛物面,(c) 双曲抛物面,(d) 正圆锥面,(e) 球面,(f) 双叶双曲面,(g) 正圆柱,(h) 平面,(i) 抛物柱面,(j) 中心为(2, −3, −1)、半径为 4 的球面.

58. (a) 4, (b) 不存在,(c) $8\sqrt{2}$, (d) 0, (e) 0, (f) 不存在, (g) 0, (h) 1/3.

61. (a) 连续,(b) 不连续,(c) 连续.

64. (a) −2, (b) −4.

65. (a) 1, (b) 0.

67. (a) $\dfrac{1}{2}(\pi+\sqrt{3})$, (b) $\dfrac{1}{6}(2\pi-3\sqrt{3})$, (c) $\dfrac{3}{2}(\pi\sqrt{3}-2)$, (d) $\dfrac{2}{3}(\pi\sqrt{3}+3)$,

(e) $\dfrac{1}{2}(2\pi\sqrt{3}+1)$, (f) $\dfrac{1}{2}(2\pi\sqrt{3}+1)$.

73. (a) −11.658, (b) −12.3, (c) $\Delta z=-66$, $dz=-123$.

74. 2.01.

75. (a) $(3x^2y-4y^2)dx+(x^3-8xy+24y^2)dy$,

(b) $(8y^2z^3-6xyz)dx+(16xyz^3-3x^2z)dy+(24xy^2z^2-3x^2y)dz$,

(c) $\{y^2\ln(y/x)-y^2\}dx+\{2xy\ln(y/x)+xy\}dy$.

77. (a) $x^2y^2+y\sin 3x+c$, (b) 不是, (c) $xz^3+4y^3-3xy+c$.

78. (a) 24, (b) $\left(\dfrac{36t^2y+12t+9x^2-6t^2+6x^2t+18}{6x^2y+2}\right)\cos(3x-y)$.

79. (a) 7, (b) −14, (c) 21, (d) 112, (e) −49.

85. (a) $(y-x^2)/(y^2-x)$, (b) $-2xy/(y^2-x)^3$.

86. (a) $\dfrac{v^3-3xu^2v^2+4}{6x^2uv^2+2y}$, (b) $\dfrac{2xu^2+3y^3}{3x^2uv^2+y}$.

90. $24u^2v+16uv^2-3v^3$.

91. 10.

93. $H^2-G-2F=0$.

96. (a) $\dfrac{1}{1+8xyz}$, (b) $\dfrac{16x^2y-8yz-32x^2z^2}{(1+8xyz)^3}$, (c) $\dfrac{16y^2z-8xz-32x^2y^2}{(1+8xyz)^3}$.

98. (b) −7.

100. (b) $\sin^2u\cosh^2v+\cos^2u\sinh^2v$, (c) $(\sin^2u\cosh^2v+\cos^2u\sinh^2v)^{-1}$.

101. (b) 1.

102. (a) 球面,(b) 圆锥面,(c) 平面.

105. $1-\dfrac{1}{8}\pi^2(x-1)^2-\dfrac{1}{2}\pi(x-1)\left(y-\dfrac{1}{2}\pi\right)-\dfrac{1}{2}\left(y-\dfrac{1}{2}\pi\right)^2$.

106. $1-3(x-1)-2(y+1)+6(x-1)^2+6(x-1)(y+1)+(y+1)^2$.

$$-\frac{10(x-1)^3[1-\theta(y+1)]^2+12(x-1)^2(y+1)[1+\theta(x-1)][1-\theta(y+1)]+3(x-1)(y+1)^2[1+\theta(x-1)]^2}{[1+\theta(x-1)]^6},$$

其中 $0<\theta<1$.

第 七 章

47. 33.6 公里,由东向北 13.2°.

52. $(6\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k})/\sqrt{89}$.

53. 24.

55. $a=-4/3$.

56. 17/3.

57. (a) $\frac{1}{2}\sqrt{26}$, (b) $\cos^{-1}\sqrt{91}/14$.

60. $25\sqrt{3}$.

61. $\pm(2j+k)/\sqrt{5}$.

63. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

64. 2.

65. (a) 20, (b) 20, (c) $8i-19j-k$, (d) $25i-15j-10k$.

67. $2x+y-3z=9$.

68. $\frac{4}{3}$.

70. (a) $\sqrt{3}e^{-t}$, (b) $\sqrt{5}e^{-t}$.

72. $(i+2j+3k)/\sqrt{14}$.

74. (a) $-4i+8j$, (b) $8dx$.

75. $16\sqrt{5}$.

77. (a) 25, (b) 2, (c) $56i-30j+47k$.

81. $\pm(3i+4j-6k)/\sqrt{61}$.

82. $-6xi+(6z-1)k$.

85. (a) $\frac{\partial\Phi}{\partial r}e_1+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}e_2+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}e_3$,

(b) $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_1)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_2)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_3}{\partial\phi}$,其中 $A=A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3$,

(c) $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$.

86. (b) $ds^2=(u^2+v^2)du^2+(u^2+v^2)dv^2+dz^2$, $h_1=h_2=\sqrt{u^2+v^2}$, $h_3=1$.

(c) u^2+v^2, $(u^2+v^2)dudvdz$.

87. (a) $\nabla^2\Phi=\frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$.

(b) $\mathrm{div}A=\frac{1}{u^2+v^2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{u^2+v^2}A_1)+\frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{u^2+v^2}A_2)\right\}+\frac{\partial A_3}{\partial z}$.

93. $\frac{6\sin\theta\cos\phi(4-5\sin^2\theta)}{r^4}$.

94. (a) $A+B\ln\rho$, (b) $A+B/r$, (c) $A+B\ln(\csc\theta-\cot\theta)$,其中 A 和 B 是任意常数.

96. (b) $2\sqrt{2}$.

第 八 章

31. (a) $x-2y-z=5$, (b) $\frac{x-2}{1}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-5}{-1}$.

35. $2x-\pi y+2\pi z=0$.

36. (a) $\frac{x-3\sqrt{2}}{3}=\frac{y+2\sqrt{2}}{-6}=\frac{z+\sqrt{2}}{-5}$, (b) $3x-6y-5z=26\sqrt{2}$.

37. (a) $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$, (b) $3x-y-2z=0$.

38. (a) $x^2=4y$, (b) $x+y=\pm1$, $x-y=\pm1$.

39. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

40. $x^2=-y^3/(2y+1)$.

41. $8(y-1)^3=27x^2$.

42. (a) $4z=(x-y)^2$, (b) $y^2=z^2+2xz$.

44. (a) $4z=x^2+y^2$, (b) $x^2+y^2+z^2=a^2$.

45. (a) 10/3, (b) $-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, (c) $2\sqrt{6}$.

46. (a) $12\sqrt{3}-6$; (b) 与 x 轴正向夹角为 $\pi\quad\tan^{-1}2$ 的方向,或 $-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$ 的方向;(c) $12\sqrt{5}$.

48. $-\int_{\sqrt{\alpha}}^{1/\alpha}x^2\sin\alpha x^2\,dx-\frac{1}{\alpha^2}\cos\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\cos\alpha^2$.

49. (a) $2\alpha\tan^{-1}\alpha-\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+1)$.

58. 在(1,2,3)点,极大值为 108.

59. $64\sqrt{3}$.

60. 极大值为 70,极小值为 20.

64. 极大值为 5,极小值为 −5.

67. $64\pi\sqrt{2}/3$.

68. (a) 1.70, (b) 1.5%.

69. (a) 2.501, 3.21%; (b) 0.287, 2.08%.

71. (a) $4x-(\pi^2+4\pi)y+(4\pi-\pi^2)z=-\pi^2\sqrt{2}$, (b) $\frac{x}{-4}=\frac{y-\sqrt{2}/2}{\pi^2+4\pi}=\frac{z-\sqrt{2}/2}{\pi^2-4\pi}$.

72. (b) 6.

79. (1, −2, 5).

80. 极小值 = 0.

第 九 章

19. (b) $\frac{2}{3}$; (c) $48\sigma/35=72M/35$,其中 M 为 $\mathscr{R}$ 的质量.

20. $\bar{x}=\frac{4}{5}$, $\bar{y}=1$.

21. (b) $\int_{x=1}^{2}\int_{y=0}^{4\ x^2}(x+y)\,dy\,dx$, (c) 241/60.

23. $abc/6$.

24. $8a^4/3$.

25. (a) $\frac{112}{45}a^6\sigma=\frac{14}{15}Ma^2$,其中 M 为质量;(b) $\bar{x}=\bar{y}=0,\bar{z}=\frac{7}{15}a^2$.

26. $\frac{2}{3}\pi a^3$.

27. $\pi(1-e^{-a^2})$.

29. 2ln3.

31. $\frac{1}{8}$.

33. (a) $\frac{3}{8}$.

34. (a) $abc/6$; (b) $\bar{x}=a/4$, $\bar{y}=b/4$, $\bar{z}=c/4$.

35. (a) $M(a^2+b^2)/10$, (b) $\sqrt{(a^2+b^2)/10}$.

36. 4/3.

37. $\pi/2$.

38. 8π.

39. $\bar{x}=\bar{y}=0$, $\bar{z}=\frac{4}{3}$.

40. $27\pi(2\sqrt{2}-1)/2$.

42. $\frac{3}{5}Ma^2$.

43. (a) $4\pi\ln(a/b)$.

44. $\frac{4}{3}\pi a^3(1-\cos^4\alpha)$.

45. 取 z 轴为对称轴:(a) $\bar{x}=\bar{y}=0$, $\bar{z}=\frac{3}{8}(a^4-b^4)/(a^3-b^3)$;

(b) $\bar{x}=\bar{y}=0$, $\bar{z}=\frac{5}{8}(a^6-b^6)/(a^5-b^5)$.

46. $\frac{1}{6}\pi a^2 bk(9a^2+2b^2)$,其中 k 为比例常数.

47. (a) $\frac{1}{3}\pi(2a^3-3a^2b+b^3)$; (b) $\bar{x}=\bar{y}=0$, $\bar{z}=\frac{3}{4}(a+b)^2/(2a+b)$.

50. $2\pi^2a^2b$.

51. 64.

52. $\frac{1}{4}\pi^2 abc$.

第 十 章

35. (a) 34/3; (b) 11; (c) 14; (d) 32/3.

36. 12.

37. 64π.

38. (a) 124/15.

39. 15.

40. (a) 23/15; (b) 5/3; (c) 0; (d) 13/15.

42. 公共值=8;

44. (b) $a_2=b_1$.

45. $3\pi a^2/8$.

47. 公共值$=120\pi$.

48. (b) 5.

49. $\pi^2/4$.

50. 0.

51. (b) $\phi=e^{y/x}(x^2+2xy)+c$,(c) $x^2+2xy+ce^{-y/x}=0$.

52. (a) 9π.

53. (a) 9; (b) 24π.

54. $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-1)$.

55. 6π.

56. $16a^2$.

57. (a) $2\pi a^2(1-\cos\alpha)$, (b) $2\pi a^2$(考虑取极限 $\alpha\to\pi/2$).

58. $2Ma^2$,其中质量 $M=4\pi a^2 6$.

59. (a) $\frac{1}{2}a(1+\cos\alpha)$,(b) $a/2$.

60. 公共值=27.

61. 16.

62. 108π.

63. 81π.

64. 3/2.

68. 公共值$=9\pi$.

69. 公共值为(a) -6; (b) -9; (c) -18.

70. 12π.

72. (b) $\phi=x^2y-4yz+3x+c$(c为常数); (c) 6.

74. $\int_a^b rf(r)dr$.

75. (a) ϕ不存在;(b) $\phi=x^2e^{-y}+y\cos z+c$(c为常数).

76. $xz^3-2x^2y+3y^2+z=c$(c为常数).

79. (a) $u=e^{\int f(x)dx}$;(b) $y=cx^3-x$,其中c为任意常数.

80. $2\pi a$.

第十一章

53. (b) 1/12.

58. (a) 收敛,(b) 发散,(c) 发散,(d) 收敛,(e) 发散, (f) 收敛.

59. (a) 收敛, (b) 发散.

63. (a) 收敛, (b) 发散, (c) 发散,(d) 发散.

65. (a) 发散.

66. (a) 发散, (b) 收敛,(c) 收敛,(d) 收敛,(e) 发散,(f) 发散.

69. 收敛.

71. (a) 收敛,(b) 收敛,(c) 发散,(d) 收敛,(e) 发散.

72. 8项.

73. (b) 至少100项.

74. (a) 绝对收敛,(b) 条件收敛,(c) 条件收敛,(d) 发散,(e) 绝对收敛,(f) 绝对收敛.

78. (a) (绝对)收敛,(b) 收敛,(c) 发散,(d) (绝对)收敛,(e) 发散.

84. (a) 发散,(b) 收敛.

86. (a) $-1\leqslant x\leqslant 1$, (b) $-1\leqslant x\leqslant 3$, (c) 一切$x\neq 0$, (d) $x>0$, (e) $x\leqslant 0$.

88. 在包含$x=0$的任意区间上不一致收敛,在其他区间上一致收敛.

90. (a) 当$|x|<3$时收敛,当$|x|\leqslant r<3$时一致收敛. (b) 对一切x一致收敛. (c) 当$x\geqslant 0$时收敛;当$x\geqslant 0$时不一致收敛,但当$x\geqslant r>0$时一致收敛.

98. (a) 0.461, (b) 0.486.

99. (a) 0.643, (b) 0.423, (c) 0.213.

127. (b) $B_1=-\frac{1}{2}$, $B_2=\frac{1}{6}$, $B_3=0$, $B_4=-\frac{1}{30}$, $B_5=0$, $B_6=\frac{1}{42}$.

第十二章

37. (a) 收敛,(b) 发散,(c) 收敛,(d) 收敛, (e) 收敛, (f) 发散,(g) 收敛,(h) 发散,(i) 收敛.

39. (a) 收敛,(b) 收敛,(c) 发散.

40. (a) 绝对收敛,(b) 绝对收敛,(c) 条件收敛,(d) 发散,(e) 绝对收敛.

42. (a) 收敛,(b) 发散, (c) 发散,(d) 收敛,(e) 收敛,(f) 收敛,(g) 发散,(h) 发散,(i) 收敛,(j) 收敛.

43. (b) ln4.

44. (a) 绝对收敛,(b) 条件收敛, (c) 发散.

46. (a) 收敛,(b) 发散,(c) 收敛.

47. (a) 收敛, (b) 当$a>2$收敛,当$0<a\leqslant 2$发散.

49. (a) 条件收敛, (b) 绝对收敛.

50. (c) $\pi/2$.

75. (a) $\sqrt{\pi/s}$, $s>0$, (b) $\frac{s}{s^2-a^2}$, $s>|a|$, (c) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$, $s>0$.

76. (b) $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $s>a$.

77. (b) $\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$, $s>0$.

79. (a) $Y(x)=6e^{-x}-3e^{-2x}$, (b) $Y(x)=4-2e^{x}-\frac{1}{2}x^2-x$,

(c) $Y(x)=1-e^{-x}(\sin x+\cos x)$.

82. (a) $\frac{1}{2}(\sin x-x\cos x)$, (b) $Y(x)=\int_0^x R(u)\sin(x-u)du$, (c) $Y(x)=x+x^3/6$.

85. $\pi/4$.

第十三章

28. (a) 30, (b) 16/105, (c) $\frac{3}{8}\pi^{3/2}$.

29. (a) 24, (b) 80/243, (c) $\sqrt{2\pi}/16$.

30. (a) $\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$, (*b*) $3\sqrt{\pi}/2$, (c) $\Gamma(4/5)/5\sqrt[5]{16}$.

33. (a) 24, (b) $-3/128$, (c) $\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$.

34. (a) $16\sqrt{\pi}/105$, (b) $-3\Gamma(2/3)$.

38. (a) 1/105, (b) 4/15, (c) $2\pi/\sqrt{3}$.

39. (a) 1/60, (b) $\pi/2$, (c) 3π.

40. (a) 12π, (6) π.

42. (a) $3\pi/256$, (b) $5\pi/8$.

43. (a) 16/15, (b) 8/105.

49. $\pi/24$.

50. $\frac{\pi abck}{30}(a^2+b^2+c^2)$, k 为比例系数.

51. $4\pi/35$.

52. $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=21/128$.

56. (a) π, (b) $2\{\Gamma(1/4)\}^2/3\sqrt{\pi}$.

68. (a) $\frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$, (b) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}\Gamma(1/3)}$.

第十四章

29. (a) $\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos n\pi)}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$, (b) $2-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n^2}\cos\frac{n\pi}{4}x$, (c) $20-\frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}$,

(d) $\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{6(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}-\frac{6\cos n\pi}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right\}$.

30. (a) $x=0,\pm2,\pm4,\cdots,\theta$, (b) 没有不连续点, (c) $x=0,\pm10,\pm20,\cdots,20$,

(d) $x=\pm3,\pm9,\pm v,\cdots,3$.

31. $\frac{16}{\pi^2}\left\{\cos\frac{\pi x}{4}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{4}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{4}+\cdots\right\}$.

32. (a) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{4n^2-1}$, (b) $f(0)=f(\pi)=0$.

33. 与习题 32 相同.

34. (a) $\frac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{8}$, (b) $\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\cos n\pi/2-\cos n\pi-1}{n^2}\right)\cos\frac{n\pi x}{8}$.

45. (a) $u(x,\ t)=3e^{-2\pi^2 t}\sin\pi x-2e^{-50\pi^2 t}\sin5\pi x$.

46. $u(x,\ t)=\sum_{m=1}^{\infty}2\left[\frac{1-\cos(m\pi/3)}{m\pi}\right]e^{-m^2\pi^2 t/36}\sin\frac{m\pi}{6}x$.

48. (a) $Y(x,\ t)=0.1\sin x\cos2t+0.01\sin4x\cos8t$.

49. (a) $Y(x,\ t)=\frac{1.6}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}\cos\frac{3(2n-1)\pi t}{2}$.

50. $u(x,\ t)=1+\frac{2x}{\pi}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4\cos m\pi}{m+1}e^{-m^2 t}\sin mx$.

52. $Y(x,\ t)=\frac{3.2}{3\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}\sin\frac{3(2n-1)\pi t}{2}$.

第 十 五 章

16. (a) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\alpha\varepsilon}{\alpha\varepsilon}$, (b) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

17. (a) $2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\alpha\cos\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3}\right)$, (b) $\frac{3\pi}{16}$.

18. (a) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{-\cos\alpha}{\alpha}\right)$, (b) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

19. (a) $\sqrt{2/\pi}[\alpha/(1+\alpha^2)]$.

20. $Y(x)=(2+2\cos x-4\cos2x)/\pi x$.

21. (a) $\pi/4$, (b) $\pi/4$.

24. $u(x,\ t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda e^{-2\lambda^2 t}\sin\lambda x}{1+\lambda^2}d\lambda$.

25. $u(x,\ t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\lambda}{\lambda}+\frac{\cos\lambda-1}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda^2 t}\cos\lambda x d\lambda$.

第 十 六 章

28. (a) 1.3506, (b) 1.8541, (c) 1.4675, (d) 2.1565.

30. 15.865.

31. $\frac{1}{\sqrt{2}}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

32. $\frac{1}{\sqrt{3}}F\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \phi\right)$,其中 $\phi=\arcsin(\sqrt{3}\sin t)$.

34. $\sqrt{2}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

35. $\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{F\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\ \frac{\pi}{3}\right)-F\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\ \frac{\pi}{4}\right)\right\}$.

37. (a) $\frac{1}{5}K\left(\frac{4}{5}\right)$, (b) $\frac{1}{5}K\left(\frac{4}{5}\right)$, (c) $\sqrt{3}E\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, (d) $\frac{1}{10}K\left(\frac{3}{5}\right)$.

38. (a) $F(\sqrt{2}/2,\ \arctan\sqrt{2}/2)$, (b) $\frac{1}{4}F(\sqrt{2}/2,\ \pi/2)-\frac{1}{12}\pi\left(\sqrt{2}/2,\ -\frac{2}{3},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

41. (a) $\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{F\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\ \frac{\pi}{4}\right)+F\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\ \arctan\frac{3}{5}\right)\right\}$, (b) $\frac{1}{\sqrt{6}}\left\{F\left(\sqrt{\frac{5}{6}},\ \frac{\pi}{4}\right)+F\left(\sqrt{\frac{5}{6}},\ \frac{\pi}{2}\right)\right\}$.

46. (a) $(\mathrm{cn}^2u-\mathrm{sn}^2u)\mathrm{dn}u$, (b) $-3k^2\mathrm{dn}^2u\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u$.

47. (a) $\frac{\mathrm{dn}u}{\mathrm{cn}^2u}$, (b) $\frac{\mathrm{cn}u}{\mathrm{sn}u}$.

第十七章

39. (a) 以$(-2,3)$为圆心,半径为5的圆$(x+2)^2+(y-3)^2=5$,(b) 以$(2,0)$为圆心,半径为2的圆$(x-2)^2+y^4=4$,(c) 双曲线中$x\geqslant 3$的一支.

40. (a) 圆$(x-2)^2+(y+1)^2=16$的外部(包括圆),

(b) 由$x^2+y^2=9$, x轴和直线$y=x$所确定的第一象限区域,

(c) 椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的内部.

41. (a) $u=x^3-3xy^2-2y$, $v=3x^2y-y^3+2x$,

(b) $u=\frac{x^2+3x+y^2}{x^2+6x+y^2+9}$, $v=\frac{3y}{x^2+6x+y^2+9}$,

(c) $u=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$, $v=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$,

(d) $u=\frac{1}{2}\ln|(1+x^2)+y^2|$, $v=\arctan\frac{y}{1+x}+2k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$.

44. (a) $1-\frac{1}{z^2}$, (b) $z=0$.

45. (a) $u=x^4-6x^2y^2+y^4$, $v=4x^3y-4xy^3$, (d) $4z^3$.

48. (a) y^2-x^2-2y+c, (b) $2iz-z^2+c$, 其中c是实数.

49. $ze^{-z}+1$.

51. $f(z)=2z^2-3z+3-4i$.

52. $17+19i$.

53. $-14/3$.

54. (a) 0, (b) $5\pi i/2$.

55. (a) $-8\pi i/3$, (b) $-2\pi i$, (c) $2\pi i/3$.

56. (a) $-2\pi i$, (b) $\pi ie/3$.

58. (a) z平面, (b) $|z-i|<1$, (c) $z=\ \ 1\pm i$.

61. (a) $z=-\frac{1}{2}$为四阶极点,(b) $z=1$是一阶极点,$z=-2$为二阶极点,(c) $z=-1\pm i$为一阶极点,(d) $z=0$为本性奇点,(e) $z=\pi/3$是可去奇点,(f) $z=\pm 2i$为二阶极点.

62. (a) $-\frac{1}{z-\pi}+\frac{z-\pi}{2!}-\frac{(z-\pi)^3}{4!}+\frac{(z-\pi)^5}{6!}-\cdots$,一阶极点收敛域为$z$平面除去$z=\pi$,

(b) $z^2-z+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!\ z}+\frac{1}{4!\ z^2}-\frac{1}{5!\ z^3}+\cdots$,本性奇点收敛域为$z$平面除去$z=0$,

(c) $\frac{1}{4(z-1)^2}+\frac{7}{16(z-1)}+\frac{9}{64}-\frac{9(z-1)}{256}+\cdots$,二阶极点,收敛域为$0<|z-1|<4$.

63. (a) $z=2$, $7/4$, $z=-2$, $1/4$, (b) $z=0$, $8/25$, $z=-5$, $-8/25$, (c) $z=2$, $\frac{1}{2}t^2e^{2t}$, (d) $z=i$, 0; $z=-i$, 0.

64. $-e^{3\pi i/2}$.

65. $-8\pi i$.

93. $-\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\cdots$.

94. (a) $\cos t$, (b) $\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$, (c) $\frac{1}{4}+\frac{5}{2}te^{2t}+\frac{3}{4}e^{2t}$, (d) $\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$.

第十七章

39. (a) 以$(-2,3)$为圆心,半径为5的圆$(x+2)^2+(y-3)^2=5$,(b) 以$(2,0)$为圆心,半径为2的圆$(x-2)^2+y^4=4$,(c) 双曲线中 $x\geqslant 3$ 的一支.

40. (a) 圆$(x-2)^2+(y+1)^2=16$的外部(包括圆),

(b) 由 $x^2+y^2=9$, x 轴和直线$y=x$ 所确定的第一象限区域,

(c) 椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的内部.

41. (a) $u=x^3-3xy^2-2y,\ v=3x^2y-y^3+2x$,

(b) $u=\frac{x^2+3x+y^2}{x^2+6x+y^2+9},\ v=\frac{3y}{x^2+6x+y^2+9}$,

(c) $u=e^{x^2-y^2}\cos 2xy,\ v=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$,

(d) $u=\frac{1}{2}\ln\{(1+x^2)+y^2\},\ v=\arctan\frac{y}{1+x}+2k\pi,\ k=0,\ \pm 1,\pm 2,\cdots$.

44. (a) $1-\frac{1}{z^2}$, (b) $z=0$.

45. (a) $u=x^4-6x^2y^2+y^4,\ v=4x^3y-4xy^3$, (d) $4z^3$.

48. (a) y^2-x^2-2y+c, (b) $2iz-z^2+c$, 其中 c 是实数.

49. $ze^{-z}+1$.

51. $f(z)=2z^2-3z+3-4i$.

52. $17+19i$.

53. $-14/3$.

54. (a) 0, (b) $5\pi i/2$.

55. (a) $-8\pi i/3$, (b) $-2\pi i$, (c) $2\pi i/3$.

56. (a) $-2\pi i$, (b) $\pi ie/3$.

58. (a) z 平面, (b) $|z-i|<1$, (c) $z=\ \ 1\pm i$.

61. (a) $z=-\frac{1}{2}$为四阶极点,(b) $z=1$ 是一阶极点,$z=-2$ 为二阶极点,(c) $z=-1\pm i$ 为一阶极点,(d) $z=0$为本性奇点,(e) $z=\pi/3$ 是可去奇点,(f) $z=\pm 2i$ 为二阶极点.

62. (a) $-\frac{1}{z-\pi}+\frac{z-\pi}{2!}-\frac{(z-\pi)^3}{4!}+\frac{(z-\pi)^5}{6!}-\cdots$,一阶极点收敛域为 z 平面除去$z=\pi$,

(b) $z^2-z+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!\ z}+\frac{1}{4!\ z^2}-\frac{1}{5!\ z^3}+\cdots$,本性奇点收敛域为 z 平面除去$z=0$,

(c) $\frac{1}{4(z-1)^2}+\frac{7}{16(z-1)}+\frac{9}{64}-\frac{9(z-1)}{256}+\cdots$,二阶极点,收敛域为$0<|z-1|<4$.

63. (a) $z=2,\ 7/4,\ z=-2,\ 1/4$, (b) $z=0,\ 8/25,\ z=-5,\ -8/25$, (c) $z=2,\ \frac{1}{2}t^2e^{2t}$, (d) $z=i,\ 0;\ z=-i,\ 0$.

64. $-e^{3\pi i/2}$.

65. $-8\pi i$.

93. $-\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\cdots$.

94. (a) $\cos t$, (b) $\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$, (c) $\frac{1}{4}+\frac{5}{2}te^{2t}+\frac{3}{4}e^{2t}$, (d) $\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$.

第十七章

39. (a) 以$(-2,3)$为圆心,半径为5的圆$(x+2)^2+(y-3)^2=5$,(b) 以$(2,0)$为圆心,半径为2的圆$(x-2)^2+y^4=4$,(c) 双曲线中$x\geqslant3$的一支.

40. (a) 圆$(x-2)^2+(y+1)^2=16$的外部(包括圆),

(b) 由$x^2+y^2=9$, x轴和直线$y=x$所确定的第一象限区域,

(c) 椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的内部.

41. (a) $u=x^3-3xy^2-2y$, $v=3x^2y-y^3+2x$,

(b) $u=\frac{x^2+3x+y^2}{x^2+6x+y^2+9}$, $v=\frac{3y}{x^2+6x+y^2+9}$,

(c) $u=e^{x^2-y^2}\cos2xy$, $v=e^{x^2-y^2}\sin2xy$,

(d) $u=\frac{1}{2}\ln|(1+x^2)+y^2|$, $v=\arctan\frac{y}{1+x}+2k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$.

44. (a) $1-\frac{1}{z^2}$, (b) $z=0$.

45. (a) $u=x^4-6x^2y^2+y^4$, $v=4x^3y-4xy^3$, (d) $4z^3$.

48. (a) y^2-x^2-2y+c, (b) $2iz-z^2+c$, 其中c是实数.

49. $ze^{-z}+1$.

51. $f(z)=2z^2-3z+3-4i$.

52. $17+19i$.

53. $-14/3$.

54. (a) 0, (b) $5\pi i/2$.

55. (a) $-8\pi i/3$, (b) $-2\pi i$, (c) $2\pi i/3$.

56. (a) $-2\pi i$, (b) $\pi ie/3$.

58. (a) z平面, (b) $|z-i|<1$, (c) $z=\ \ 1\pm i$.

61. (a) $z=-\frac{1}{2}$为四阶极点,(b) $z=1$是一阶极点,$z=-2$为二阶极点,(c) $z=-1\pm i$为一阶极点,(d) $z=0$为本性奇点,(e) $z=\pi/3$是可去奇点,(f) $z=\pm2i$为二阶极点.

62. (a) $-\frac{1}{z-\pi}+\frac{z-\pi}{2!}-\frac{(z-\pi)^3}{4!}+\frac{(z-\pi)^5}{6!}-\cdots$,一阶极点收敛域为$z$平面除去$z=\pi$,

(b) $z^2-z+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!\ z}+\frac{1}{4!\ z^2}-\frac{1}{5!\ z^3}+\cdots$,本性奇点收敛域为$z$平面除去$z=0$,

(c) $\frac{1}{4(z-1)^2}+\frac{7}{16(z-1)}+\frac{9}{64}-\frac{9(z-1)}{256}+\cdots$,二阶极点,收敛域为$0<|z-1|<4$.

63. (a) $z=2$, $7/4$, $z=-2$, $1/4$, (b) $z=0$, $8/25$, $z=-5$, $-8/25$, (c) $z=2$, $\frac{1}{2}t^2e^{2t}$, (d) $z=i$, 0; $z=-i$, 0.

64. $-e^{3\pi i/2}$.

65. $-8\pi i$.

93. $-\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\cdots$.

94. (a) $\cos t$, (b) $\frac{1}{2}e^{-t}\sin2t$, (c) $\frac{1}{4}+\frac{5}{2}te^{2t}+\frac{3}{4}e^{2t}$, (d) $\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$.

第十七章

39. (a) 以$(-2,3)$为圆心,半径为5的圆$(x+2)^2+(y-3)^2=5$,(b) 以$(2,0)$为圆心,半径为2的圆$(x-2)^2+y^4=4$,(c) 双曲线中 $x\geqslant 3$ 的一支.

40. (a) 圆$(x-2)^2+(y+1)^2=16$的外部(包括圆),

(b) 由 $x^2+y^2=9$, x 轴和直线$y=x$ 所确定的第一象限区域,

(c) 椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的内部.

41. (a) $u=x^3-3xy^2-2y$, $v=3x^2y-y^3+2x$,

(b) $u=\frac{x^2+3x+y^2}{x^2+6x+y^2+9}$, $v=\frac{3y}{x^2+6x+y^2+9}$,

(c) $u=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$, $v=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$,

(d) $u=\frac{1}{2}\ln\{(1+x^2)+y^2\}$, $v=\arctan\frac{y}{1+x}+2k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$.

44. (a) $1-\frac{1}{z^2}$, (b) $z=0$.

45. (a) $u=x^4-6x^2y^2+y^4$, $v=4x^3y-4xy^3$, (d) $4z^3$.

48. (a) y^2-x^2-2y+c, (b) $2iz-z^2+c$, 其中 c 是实数.

49. $ze^{-z}+1$.

51. $f(z)=2z^2-3z+3-4i$.

52. $17+19i$.

53. $-14/3$.

54. (a) 0, (b) $5\pi i/2$.

55. (a) $-8\pi i/3$, (b) $-2\pi i$, (c) $2\pi i/3$.

56. (a) $-2\pi i$, (b) $\pi ie/3$.

58. (a) z 平面, (b) $|z-i|<1$,(c) $z=\quad 1\pm i$.

61. (a) $z=-\frac{1}{2}$为四阶极点,(b) $z=1$ 是一阶极点,$z=-2$ 为二阶极点,(c) $z=-1\pm i$ 为一阶极点,(d) $z=0$为本性奇点,(e) $z=\pi/3$ 是可去奇点,(f) $z=\pm 2i$ 为二阶极点.

62. (a) $-\frac{1}{z-\pi}+\frac{z-\pi}{2!}-\frac{(z-\pi)^3}{4!}+\frac{(z-\pi)^5}{6!}-\cdots$,一阶极点收敛域为 z 平面除去$z=\pi$,

(b) $z^2-z+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!\ z}+\frac{1}{4!\ z^2}-\frac{1}{5!\ z^3}+\cdots$,本性奇点收敛域为 z 平面除去$z=0$,

(c) $\frac{1}{4(z-1)^2}+\frac{7}{16(z-1)}+\frac{9}{64}-\frac{9(z-1)}{256}+\cdots$,二阶极点,收敛域为$0<|z-1|<4$.

63. (a) $z=2$, $7/4$, $z=-2$, $1/4$, (b) $z=0$, $8/25$, $z=-5$, $-8/25$, (c) $z=2$, $\frac{1}{2}t^2e^{2t}$, (d) $z=i$, 0; $z=-i$, 0.

64. $-e^{3\pi t/2}$.

65. $-8\pi i$.

93. $-\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\cdots$.

94. (a) $\cos t$, (b) $\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$, (c) $\frac{1}{4}+\frac{5}{2}te^{2t}+\frac{3}{4}e^{2t}$,(d) $\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$.

第十七章

39. (a) 以$(-2,3)$为圆心,半径为5的圆$(x+2)^2+(y-3)^2=5$,(b) 以$(2,0)$为圆心,半径为2的圆$(x-2)^2+y^4=4$,(c) 双曲线中$x\geqslant 3$的一支.

40. (a) 圆$(x-2)^2+(y+1)^2=16$的外部(包括圆),

(b) 由$x^2+y^2=9$, x轴和直线$y=x$所确定的第一象限区域,

(c) 椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的内部.

41. (a) $u=x^3-3xy^2-2y$, $v=3x^2y-y^3+2x$,

(b) $u=\frac{x^2+3x+y^2}{x^2+6x+y^2+9}$, $v=\frac{3y}{x^2+6x+y^2+9}$,

(c) $u=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$, $v=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$,

(d) $u=\frac{1}{2}\ln|(1+x^2)+y^2|$, $v=\arctan\frac{y}{1+x}+2k\pi$, $k=0,\ \pm1,\pm2,\cdots$.

44. (a) $1-\frac{1}{z^2}$, (b) $z=0$.

45. (a) $u=x^4-6x^2y^2+y^4$, $v=4x^3y-4xy^3$, (d) $4z^3$.

48. (a) y^2-x^2-2y+c, (b) $2iz-z^2+c$, 其中c是实数.

49. $ze^{-z}+1$.

51. $f(z)=2z^2-3z+3-4i$.

52. $17+19i$.

53. $-14/3$.

54. (a) 0, (b) $5\pi i/2$.

55. (a) $-8\pi i/3$, (b) $-2\pi i$, (c) $2\pi i/3$.

56. (a) $-2\pi i$, (b) $\pi ie/3$.

58. (a) z平面, (b) $|z-i|<1$,(c) $z=\ \ 1\pm i$.

61. (a) $z=-\frac{1}{2}$为四阶极点,(b) $z=1$是一阶极点,$z=-2$为二阶极点,(c) $z=-1\pm i$为一阶极点,(d) $z=0$为本性奇点,(e) $z=\pi/3$是可去奇点,(f) $z=\pm 2i$为二阶极点.

62. (a) $-\frac{1}{z-\pi}+\frac{z-\pi}{2!}-\frac{(z-\pi)^3}{4!}+\frac{(z-\pi)^5}{6!}-\cdots$,一阶极点收敛域为$z$平面除去$z=\pi$,

(b) $z^2-z+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!\ z}+\frac{1}{4!\ z^2}-\frac{1}{5!\ z^3}+\cdots$,本性奇点收敛域为$z$平面除去$z=0$,

(c) $\frac{1}{4(z-1)^2}+\frac{7}{16(z-1)}+\frac{9}{64}-\frac{9(z-1)}{256}+\cdots$,二阶极点,收敛域为$0<|z-1|<4$.

63. (a) $z=2$, $7/4$, $z=-2$, $1/4$, (b) $z=0$, $8/25$, $z=-5$, $-8/25$, (c) $z=2$, $\frac{1}{2}t^2e^{2t}$, (d) $z=i$, 0; $z=-i$, 0.

64. $-e^{3\pi i/2}$.

65. $-8\pi i$.

93. $-\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\cdots$.

94. (a) $\cos t$, (b) $\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$, (c) $\frac{1}{4}+\frac{5}{2}te^{2t}+\frac{3}{4}e^{2t}$,(d) $\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$.

第十七章

39. (a) 以$(-2,3)$为圆心，半径为5的圆$(x+2)^2+(y-3)^2=5$，(b) 以$(2,0)$为圆心，半径为2的圆$(x-2)^2+y^4=4$，(c) 双曲线中$x\geqslant 3$的一支.

40. (a) 圆$(x-2)^2+(y+1)^2=16$的外部(包括圆)，

(b) 由$x^2+y^2=9$，x轴和直线$y=x$所确定的第一象限区域，

(c) 椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的内部.

41. (a) $u=x^3-3xy^2-2y$，$v=3x^2y-y^3+2x$，

(b) $u=\frac{x^2+3x+y^2}{x^2+6x+y^2+9}$，$v=\frac{3y}{x^2+6x+y^2+9}$，

(c) $u=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$，$v=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$，

(d) $u=\frac{1}{2}\ln|(1+x^2)+y^2|$，$v=\arctan\frac{y}{1+x}+2k\pi$，$k=0,\ \pm1,\pm2,\cdots$.

44. (a) $1-\frac{1}{z^2}$，(b) $z=0$.

45. (a) $u=x^4-6x^2y^2+y^4$，$v=4x^3y-4xy^3$，(d) $4z^3$.

48. (a) y^2-x^2-2y+c，(b) $2iz-z^2+c$，其中c是实数.

49. $ze^{-z}+1$.

51. $f(z)=2z^2-3z+3-4i$.

52. $17+19i$.

53. $-14/3$.

54. (a) 0，(b) $5\pi i/2$.

55. (a) $-8\pi i/3$，(b) $-2\pi i$，(c) $2\pi i/3$.

56. (a) $-2\pi i$，(b) $\pi ie/3$.

58. (a) z平面，(b) $|z-i|<1$，(c) $z=\ \ 1\pm i$.

61. (a) $z=-\frac{1}{2}$为四阶极点，(b) $z=1$是一阶极点，$z=-2$为二阶极点，(c) $z=-1\pm i$为一阶极点，(d) $z=0$为本性奇点，(e) $z=\pi/3$是可去奇点，(f) $z=\pm 2i$为二阶极点.

62. (a) $-\frac{1}{z-\pi}+\frac{z-\pi}{2!}-\frac{(z-\pi)^3}{4!}+\frac{(z-\pi)^5}{6!}-\cdots$，一阶极点收敛域为$z$平面除去$z=\pi$，

(b) $z^2-z+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!\ z}+\frac{1}{4!\ z^2}-\frac{1}{5!\ z^3}+\cdots$，本性奇点收敛域为$z$平面除去$z=0$，

(c) $\frac{1}{4(z-1)^2}+\frac{7}{16(z-1)}+\frac{9}{64}-\frac{9(z-1)}{256}+\cdots$，二阶极点，收敛域为$0<|z-1|<4$.

63. (a) $z=2$，$7/4$，$z=-2$，$1/4$，(b) $z=0$，$8/25$，$z=-5$，$-8/25$，(c) $z=2$，$\frac{1}{2}t^2e^{2t}$，(d) $z=i$，0；$z=-i$，0.

64. $-e^{3\pi i/2}$.

65. $-8\pi i$.

93. $-\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\cdots$.

94. (a) $\cos t$，(b) $\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$，(c) $\frac{1}{4}+\frac{5}{2}te^{2t}+\frac{3}{4}e^{2t}$，(d) $\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$.

第十七章

39. (a) 以$(-2,3)$为圆心,半径为 5 的圆$(x+2)^2+(y-3)^2=5$,(b) 以$(2,0)$为圆心,半径为 2 的圆$(x-2)^2+y^4=4$,(c) 双曲线中 $x\geqslant 3$ 的一支.

40. (a) 圆$(x-2)^2+(y+1)^2=16$ 的外部(包括圆),

(b) 由 $x^2+y^2=9$, x 轴和直线 $y=x$ 所确定的第一象限区域,

(c) 椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的内部.

41. (a) $u=x^3-3xy^2-2y$, $v=3x^2y-y^3+2x$,

(b) $u=\frac{x^2+3x+y^2}{x^2+6x+y^2+9}$, $v=\frac{3y}{x^2+6x+y^2+9}$,

(c) $u=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$, $v=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$,

(d) $u=\frac{1}{2}\ln|(1+x^2)+y^2|$, $v=\arctan\frac{y}{1+x}+2k\pi$, $k=0,\ \pm1,\pm2,\cdots$.

44. (a) $1-\frac{1}{z^2}$, (b) $z=0$.

45. (a) $u=x^4-6x^2y^2+y^4$, $v=4x^3y-4xy^3$, (d) $4z^3$.

48. (a) y^2-x^2-2y+c, (b) $2iz-z^2+c$, 其中 c 是实数.

49. $ze^{-z}+1$.

51. $f(z)=2z^2-3z+3-4i$.

52. $17+19i$.

53. $-14/3$.

54. (a) 0, (b) $5\pi i/2$.

55. (a) $-8\pi i/3$, (b) $-2\pi i$, (c) $2\pi i/3$.

56. (a) $-2\pi i$, (b) $\pi ie/3$.

58. (a) z 平面, (b) $|z-i|<1$, (c) $z=\ \ 1\pm i$.

61. (a) $z=-\frac{1}{2}$为四阶极点,(b) $z=1$ 是一阶极点, $z=-2$ 为二阶极点,(c) $z=-1\pm i$ 为一阶极点,(d) $z=0$为本性奇点,(e) $z=\pi/3$ 是可去奇点,(f) $z=\pm 2i$ 为二阶极点.

62. (a) $-\frac{1}{z-\pi}+\frac{z-\pi}{2!}-\frac{(z-\pi)^3}{4!}+\frac{(z-\pi)^5}{6!}-\cdots$,一阶极点收敛域为 z 平面除去 $z=\pi$,

(b) $z^2-z+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!\ z}+\frac{1}{4!\ z^2}-\frac{1}{5!\ z^3}+\cdots$,本性奇点收敛域为 z 平面除去 $z=0$,

(c) $\frac{1}{4(z-1)^2}+\frac{7}{16(z-1)}+\frac{9}{64}-\frac{9(z-1)}{256}+\cdots$,二阶极点,收敛域为 $0<|z-1|<4$.

63. (a) $z=2$, $7/4$, $z=-2$, $1/4$, (b) $z=0$, $8/25$, $z=-5$, $-8/25$, (c) $z=2$, $\frac{1}{2}t^2e^{2t}$, (d) $z=i$, 0; $z=-i$, 0.

64. $-e^{3\pi i/2}$.

65. $-8\pi i$.

93. $-\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\cdots$.

94. (a) $\cos t$, (b) $\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$, (c) $\frac{1}{4}+\frac{5}{2}te^{2t}+\frac{3}{4}e^{2t}$, (d) $\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$.

第十七章

39. (a) 以$(-2,3)$为圆心，半径为5的圆$(x+2)^2+(y-3)^2=5$，(b) 以$(2,0)$为圆心，半径为2的圆$(x-2)^2+y^4=4$，(c) 双曲线中 $x\geqslant 3$ 的一支.

40. (a) 圆$(x-2)^2+(y+1)^2=16$的外部(包括圆)，

(b) 由 $x^2+y^2=9$，x 轴和直线$y=x$ 所确定的第一象限区域，

(c) 椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的内部.

41. (a) $u=x^3-3xy^2-2y$，$v=3x^2y-y^3+2x$，

(b) $u=\frac{x^2+3x+y^2}{x^2+6x+y^2+9}$，$v=\frac{3y}{x^2+6x+y^2+9}$，

(c) $u=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$，$v=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$，

(d) $u=\frac{1}{2}\ln|(1+x^2)+y^2|$，$v=\arctan\frac{y}{1+x}+2k\pi$，$k=0,\ \pm1,\pm2,\cdots$.

44. (a) $1-\frac{1}{z^2}$，(b) $z=0$.

45. (a) $u=x^4-6x^2y^2+y^4$，$v=4x^3y-4xy^3$，(d) $4z^3$.

48. (a) y^2-x^2-2y+c，(b) $2iz-z^2+c$，其中 c 是实数.

49. $ze^{-z}+1$.

51. $f(z)=2z^2-3z+3-4i$.

52. $17+19i$.

53. $-14/3$.

54. (a) 0，(b) $5\pi i/2$.

55. (a) $-8\pi i/3$，(b) $-2\pi i$，(c) $2\pi i/3$.

56. (a) $-2\pi i$，(b) $\pi ie/3$.

58. (a) z 平面，(b) $|z-i|<1$，(c) $z=\ \ 1\pm i$.

61. (a) $z=-\frac{1}{2}$为四阶极点，(b) $z=1$ 是一阶极点，$z=-2$ 为二阶极点，(c) $z=-1\pm i$ 为一阶极点，(d) $z=0$为本性奇点，(e) $z=\pi/3$ 是可去奇点，(f) $z=\pm 2i$ 为二阶极点.

62. (a) $-\frac{1}{z-\pi}+\frac{z-\pi}{2!}-\frac{(z-\pi)^3}{4!}+\frac{(z-\pi)^5}{6!}-\cdots$，一阶极点收敛域为 z 平面除去$z=\pi$，

(b) $z^2-z+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!\ z}+\frac{1}{4!\ z^2}-\frac{1}{5!\ z^3}+\cdots$，本性奇点收敛域为 z 平面除去$z=0$，

(c) $\frac{1}{4(z-1)^2}+\frac{7}{16(z-1)}+\frac{9}{64}-\frac{9(z-1)}{256}+\cdots$，二阶极点，收敛域为$0<|z-1|<4$.

63. (a) $z=2$，$7/4$，$z=-2$，$1/4$，(b) $z=0$，$8/25$，$z=-5$，$-8/25$，(c) $z=2$，$\frac{1}{2}t^2e^{2t}$，(d) $z=i$，0；$z=-i$，0.

64. $-e^{3\pi i/2}$.

65. $-8\pi i$.

93. $-\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\cdots$.

94. (a) $\cos t$，(b) $\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$，(c) $\frac{1}{4}+\frac{5}{2}te^{2t}+\frac{3}{4}e^{2t}$，(d) $\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$.

第十七章

39. (a) 以$(-2,3)$为圆心,半径为5的圆$(x+2)^2+(y-3)^2=5$,(b) 以$(2,0)$为圆心,半径为2的圆$(x-2)^2+y^4=4$,(c) 双曲线中 $x\geqslant3$ 的一支.

40. (a) 圆$(x-2)^2+(y+1)^2=16$的外部(包括圆),

(b) 由 $x^2+y^2=9$, x 轴和直线$y=x$ 所确定的第一象限区域,

(c) 椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的内部.

41. (a) $u=x^3-3xy^2-2y$, $v=3x^2y-y^3+2x$,

(b) $u=\frac{x^2+3x+y^2}{x^2+6x+y^2+9}$, $v=\frac{3y}{x^2+6x+y^2+9}$,

(c) $u=e^{x^2-y^2}\cos2xy$, $v=e^{x^2-y^2}\sin2xy$,

(d) $u=\frac{1}{2}\ln|(1+x^2)+y^2|$, $v=\arctan\frac{y}{1+x}+2k\pi$, $k=0,\ \pm1,\pm2,\cdots$.

44. (a) $1-\frac{1}{z^2}$, (b) $z=0$.

45. (a) $u=x^4-6x^2y^2+y^4$, $v=4x^3y-4xy^3$, (d) $4z^3$.

48. (a) y^2-x^2-2y+c, (b) $2iz-z^2+c$, 其中 c 是实数.

49. $ze^{-z}+1$.

51. $f(z)=2z^2-3z+3-4i$.

52. $17+19i$.

53. $-14/3$.

54. (a) 0, (b) $5\pi i/2$.

55. (a) $-8\pi i/3$, (b) $-2\pi i$, (c) $2\pi i/3$.

56. (a) $-2\pi i$, (b) $\pi ie/3$.

58. (a) z 平面, (b) $|z-i|<1$,(c) $z=\ \ 1\pm i$.

61. (a) $z=-\frac{1}{2}$为四阶极点,(b) $z=1$ 是一阶极点,$z=-2$为二阶极点,(c) $z=-1\pm i$ 为一阶极点,(d) $z=0$为本性奇点,(e) $z=\pi/3$是可去奇点,(f) $z=\pm2i$ 为二阶极点.

62. (a) $-\frac{1}{z-\pi}+\frac{z-\pi}{2!}-\frac{(z-\pi)^3}{4!}+\frac{(z-\pi)^5}{6!}-\cdots$,一阶极点收敛域为 z 平面除去$z=\pi$,

(b) $z^2-z+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!\ z}+\frac{1}{4!\ z^2}-\frac{1}{5!\ z^3}+\cdots$,本性奇点收敛域为 z 平面除去$z=0$,

(c) $\frac{1}{4(z-1)^2}+\frac{7}{16(z-1)}+\frac{9}{64}-\frac{9(z-1)}{256}+\cdots$,二阶极点,收敛域为$0<|z-1|<4$.

63. (a) $z=2$, $7/4$, $z=-2$, $1/4$, (b) $z=0$, $8/25$, $z=-5$, $-8/25$, (c) $z=2$, $\frac{1}{2}t^2e^{2t}$, (d) $z=i$, 0; $z=-i$, 0.

64. $-e^{3\pi i/2}$.

65. $-8\pi i$.

93. $-\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\cdots$.

94. (a) $\cos t$, (b) $\frac{1}{2}e^{-t}\sin2t$, (c) $\frac{1}{4}+\frac{5}{2}te^{2t}+\frac{3}{4}e^{2t}$,(d) $\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$.

第十七章

39. (a) 以$(-2,3)$为圆心,半径为5的圆$(x+2)^2+(y-3)^2=5$,(b) 以$(2,0)$为圆心,半径为2的圆$(x-2)^2+y^4=4$,(c) 双曲线中$x\geqslant 3$的一支.

40. (a) 圆$(x-2)^2+(y+1)^2=16$的外部(包括圆),

(b) 由$x^2+y^2=9$, x轴和直线$y=x$所确定的第一象限区域,

(c) 椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的内部.

41. (a) $u=x^3-3xy^2-2y$, $v=3x^2y-y^3+2x$,

(b) $u=\frac{x^2+3x+y^2}{x^2+6x+y^2+9}$, $v=\frac{3y}{x^2+6x+y^2+9}$,

(c) $u=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$, $v=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$,

(d) $u=\frac{1}{2}\ln|(1+x^2)+y^2|$, $v=\arctan\frac{y}{1+x}+2k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$.

44. (a) $1-\frac{1}{z^2}$, (b) $z=0$.

45. (a) $u=x^4-6x^2y^2+y^4$, $v=4x^3y-4xy^3$, (d) $4z^3$.

48. (a) y^2-x^2-2y+c, (b) $2iz-z^2+c$, 其中c是实数.

49. $ze^{-z}+1$.

51. $f(z)=2z^2-3z+3-4i$.

52. $17+19i$.

53. $-14/3$.

54. (a) 0, (b) $5\pi i/2$.

55. (a) $-8\pi i/3$, (b) $-2\pi i$, (c) $2\pi i/3$.

56. (a) $-2\pi i$, (b) $\pi ie/3$.

58. (a) z平面, (b) $|z-i|<1$, (c) $z=\ \ 1\pm i$.

61. (a) $z=-\frac{1}{2}$为四阶极点,(b) $z=1$是一阶极点,$z=-2$为二阶极点,(c) $z=-1\pm i$为一阶极点,(d) $z=0$为本性奇点,(e) $z=\pi/3$是可去奇点,(f) $z=\pm 2i$为二阶极点.

62. (a) $-\frac{1}{z-\pi}+\frac{z-\pi}{2!}-\frac{(z-\pi)^3}{4!}+\frac{(z-\pi)^5}{6!}-\cdots$,一阶极点收敛域为$z$平面除去$z=\pi$,

(b) $z^2-z+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!\ z}+\frac{1}{4!\ z^2}-\frac{1}{5!\ z^3}+\cdots$,本性奇点收敛域为$z$平面除去$z=0$,

(c) $\frac{1}{4(z-1)^2}+\frac{7}{16(z-1)}+\frac{9}{64}-\frac{9(z-1)}{256}+\cdots$,二阶极点,收敛域为$0<|z-1|<4$.

63. (a) $z=2$, $7/4$, $z=-2$, $1/4$, (b) $z=0$, $8/25$, $z=-5$, $-8/25$, (c) $z=2$, $\frac{1}{2}t^2e^{2t}$, (d) $z=i$, 0; $z=-i$, 0.

64. $-e^{3\pi i/2}$.

65. $-8\pi i$.

93. $-\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\cdots$.

94. (a) $\cos t$, (b) $\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$, (c) $\frac{1}{4}+\frac{5}{2}te^{2t}+\frac{3}{4}e^{2t}$, (d) $\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$.

第十七章

39. (a) 以$(-2,3)$为圆心，半径为 5 的圆$(x+2)^2+(y-3)^2=5$，(b) 以$(2,0)$为圆心，半径为 2 的圆$(x-2)^2+y^4=4$，(c) 双曲线中 $x\geqslant 3$ 的一支.

40. (a) 圆$(x-2)^2+(y+1)^2=16$的外部(包括圆)，

(b) 由 $x^2+y^2=9$，x 轴和直线$y=x$ 所确定的第一象限区域，

(c) 椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$的内部.

41. (a) $u=x^3-3xy^2-2y$，$v=3x^2y-y^3+2x$，

(b) $u=\dfrac{x^2+3x+y^2}{x^2+6x+y^2+9}$，$v=\dfrac{3y}{x^2+6x+y^2+9}$，

(c) $u=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$，$v=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$，

(d) $u=\dfrac{1}{2}\ln|(1+x^2)+y^2|$，$v=\arctan\dfrac{y}{1+x}+2k\pi$，$k=0, \pm1, \pm2, \cdots$.

44. (a) $1-\dfrac{1}{z^2}$，(b) $z=0$.

45. (a) $u=x^4-6x^2y^2+y^4$，$v=4x^3y-4xy^3$，(d) $4z^3$.

48. (a) y^2-x^2-2y+c，(b) $2iz-z^2+c$，其中 c 是实数.

49. $ze^{-z}+1$.

51. $f(z)=2z^2-3z+3-4i$.

52. $17+19i$.

53. $-14/3$.

54. (a) 0，(b) $5\pi i/2$.

55. (a) $-8\pi i/3$，(b) $-2\pi i$，(c) $2\pi i/3$.

56. (a) $-2\pi i$，(b) $\pi ie/3$.

58. (a) z 平面，(b) $|z-i|<1$，(c) $z=\ \ 1\pm i$.

61. (a) $z=-\dfrac{1}{2}$为四阶极点，(b) $z=1$ 是一阶极点，$z=-2$ 为二阶极点，(c) $z=-1\pm i$ 为一阶极点，(d) $z=0$为本性奇点，(e) $z=\pi/3$ 是可去奇点，(f) $z=\pm 2i$ 为二阶极点.

62. (a) $-\dfrac{1}{z-\pi}+\dfrac{z-\pi}{2!}-\dfrac{(z-\pi)^3}{4!}+\dfrac{(z-\pi)^5}{6!}-\cdots$，一阶极点收敛域为 z 平面除去$z=\pi$，

(b) $z^2-z+\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!\ z}+\dfrac{1}{4!\ z^2}-\dfrac{1}{5!\ z^3}+\cdots$，本性奇点收敛域为 z 平面除去$z=0$，

(c) $\dfrac{1}{4(z-1)^2}+\dfrac{7}{16(z-1)}+\dfrac{9}{64}-\dfrac{9(z-1)}{256}+\cdots$，二阶极点，收敛域为$0<|z-1|<4$.

63. (a) $z=2$，$7/4$，$z=-2$，$1/4$，(b) $z=0$，$8/25$，$z=-5$，$-8/25$，(c) $z=2$，$\dfrac{1}{2}t^2e^{2t}$，(d) $z=i$，0；$z=-i$，0.

64. $-e^{3\pi i/2}$.

65. $-8\pi i$.

93. $-\dfrac{1}{z^5}+\dfrac{1}{z^4}-\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{z}+1-\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{4}-\dfrac{z^3}{8}+\cdots$.

94. (a) $\cos t$，(b) $\dfrac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$，(c) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{2}te^{2t}+\dfrac{3}{4}e^{2t}$，(d) $\dfrac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$.

第十七章

39. (a) 以$(-2,3)$为圆心,半径为 5 的圆$(x+2)^2+(y-3)^2=5$,(b) 以$(2,0)$为圆心,半径为 2 的圆$(x-2)^2+y^4=4$,(c) 双曲线中 $x\geqslant 3$ 的一支.

40. (a) 圆$(x-2)^2+(y+1)^2=16$的外部(包括圆),

(b) 由 $x^2+y^2=9$, x 轴和直线$y=x$ 所确定的第一象限区域,

(c) 椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$的内部.

41. (a) $u=x^3-3xy^2-2y$, $v=3x^2y-y^3+2x$,

(b) $u=\dfrac{x^2+3x+y^2}{x^2+6x+y^2+9}$, $v=\dfrac{3y}{x^2+6x+y^2+9}$,

(c) $u=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$, $v=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$,

(d) $u=\dfrac{1}{2}\ln|(1+x^2)+y^2|$, $v=\arctan\dfrac{y}{1+x}+2k\pi$, $k=0,\ \pm1,\pm2,\cdots$.

44. (a) $1-\dfrac{1}{z^2}$, (b) $z=0$.

45. (a) $u=x^4-6x^2y^2+y^4$, $v=4x^3y-4xy^3$, (d) $4z^3$.

48. (a) y^2-x^2-2y+c, (b) $2iz-z^2+c$, 其中 c 是实数.

49. $ze^{-z}+1$.

51. $f(z)=2z^2-3z+3-4i$.

52. $17+19i$.

53. $-14/3$.

54. (a) 0, (b) $5\pi i/2$.

55. (a) $-8\pi i/3$, (b) $-2\pi i$, (c) $2\pi i/3$.

56. (a) $-2\pi i$, (b) $\pi ie/3$.

58. (a) z 平面, (b) $|z-i|<1$,(c) $z=\ \ 1\pm i$.

61. (a) $z=-\dfrac{1}{2}$为四阶极点,(b) $z=1$ 是一阶极点,$z=-2$ 为二阶极点,(c) $z=-1\pm i$ 为一阶极点,(d) $z=0$为本性奇点,(e) $z=\pi/3$ 是可去奇点,(f) $z=\pm 2i$ 为二阶极点.

62. (a) $-\dfrac{1}{z-\pi}+\dfrac{z-\pi}{2!}-\dfrac{(z-\pi)^3}{4!}+\dfrac{(z-\pi)^5}{6!}-\cdots$,一阶极点收敛域为 z 平面除去$z=\pi$,

(b) $z^2-z+\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!\ z}+\dfrac{1}{4!\ z^2}-\dfrac{1}{5!\ z^3}+\cdots$,本性奇点收敛域为 z 平面除去$z=0$,

(c) $\dfrac{1}{4(z-1)^2}+\dfrac{7}{16(z-1)}+\dfrac{9}{64}-\dfrac{9(z-1)}{256}+\cdots$,二阶极点,收敛域为$0<|z-1|<4$.

63. (a) $z=2$, $7/4$, $z=-2$, $1/4$, (b) $z=0$, $8/25$, $z=-5$, $-8/25$, (c) $z=2$, $\dfrac{1}{2}t^2e^{2t}$, (d) $z=i$, 0; $z=-i$, 0.

64. $-e^{3\pi i/2}$.

65. $-8\pi i$.

93. $-\dfrac{1}{z^5}+\dfrac{1}{z^4}-\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{z}+1-\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{4}-\dfrac{z^3}{8}+\cdots$.

94. (a) $\cos t$, (b) $\dfrac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$, (c) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{2}te^{2t}+\dfrac{3}{4}e^{2t}$,(d) $\dfrac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$.

第十七章

39. (a) 以$(-2,3)$为圆心,半径为5的圆$(x+2)^2+(y-3)^2=5$,(b) 以$(2,0)$为圆心,半径为2的圆$(x-2)^2+y^4=4$,(c) 双曲线中 $x\geqslant3$ 的一支.

40. (a) 圆$(x-2)^2+(y+1)^2=16$的外部(包括圆),

(b) 由 $x^2+y^2=9$, x 轴和直线$y=x$ 所确定的第一象限区域,

(c) 椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的内部.

41. (a) $u=x^3-3xy^2-2y$, $v=3x^2y-y^3+2x$,

(b) $u=\frac{x^2+3x+y^2}{x^2+6x+y^2+9}$, $v=\frac{3y}{x^2+6x+y^2+9}$,

(c) $u=e^{x^2-y^2}\cos2xy$, $v=e^{x^2-y^2}\sin2xy$,

(d) $u=\frac{1}{2}\ln|(1+x^2)+y^2|$, $v=\arctan\frac{y}{1+x}+2k\pi$, $k=0,\ \pm1,\pm2,\cdots$.

44. (a) $1-\frac{1}{z^2}$, (b) $z=0$.

45. (a) $u=x^4-6x^2y^2+y^4$, $v=4x^3y-4xy^3$, (d) $4z^3$.

48. (a) y^2-x^2-2y+c, (b) $2iz-z^2+c$, 其中 c 是实数.

49. $ze^{-z}+1$.

51. $f(z)=2z^2-3z+3-4i$.

52. $17+19i$.

53. $-14/3$.

54. (a) 0, (b) $5\pi i/2$.

55. (a) $-8\pi i/3$, (b) $-2\pi i$, (c) $2\pi i/3$.

56. (a) $-2\pi i$, (b) $\pi ie/3$.

58. (a) z 平面, (b) $|z-i|<1$,(c) $z=\ \ 1\pm i$.

61. (a) $z=-\frac{1}{2}$为四阶极点,(b) $z=1$ 是一阶极点,$z=-2$ 为二阶极点,(c) $z=-1\pm i$ 为一阶极点,(d) $z=0$为本性奇点,(e) $z=\pi/3$ 是可去奇点,(f) $z=\pm2i$ 为二阶极点.

62. (a) $-\frac{1}{z-\pi}+\frac{z-\pi}{2!}-\frac{(z-\pi)^3}{4!}+\frac{(z-\pi)^5}{6!}-\cdots$,一阶极点收敛域为 z 平面除去$z=\pi$,

(b) $z^2-z+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!\ z}+\frac{1}{4!\ z^2}-\frac{1}{5!\ z^3}+\cdots$,本性奇点收敛域为 z 平面除去$z=0$,

(c) $\frac{1}{4(z-1)^2}+\frac{7}{16(z-1)}+\frac{9}{64}-\frac{9(z-1)}{256}+\cdots$,二阶极点,收敛域为$0<|z-1|<4$.

63. (a) $z=2$, $7/4$, $z=-2$, $1/4$, (b) $z=0$, $8/25$, $z=-5$, $-8/25$, (c) $z=2$, $\frac{1}{2}t^2e^{2t}$, (d) $z=i$, 0; $z=-i$, 0.

64. $-e^{3\pi i/2}$.

65. $-8\pi i$.

93. $-\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\cdots$.

94. (a) $\cos t$, (b) $\frac{1}{2}e^{-t}\sin2t$, (c) $\frac{1}{4}+\frac{5}{2}te^{2t}+\frac{3}{4}e^{2t}$,(d) $\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$.

第十七章

39. (a) 以$(-2,3)$为圆心,半径为5的圆$(x+2)^2+(y-3)^2=5$,(b) 以$(2,0)$为圆心,半径为2的圆$(x-2)^2+y^4=4$,(c) 双曲线中$x\geqslant 3$的一支.

40. (a) 圆$(x-2)^2+(y+1)^2=16$的外部(包括圆),

(b) 由$x^2+y^2=9$, x轴和直线$y=x$所确定的第一象限区域,

(c) 椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的内部.

41. (a) $u=x^3-3xy^2-2y$, $v=3x^2y-y^3+2x$,

(b) $u=\frac{x^2+3x+y^2}{x^2+6x+y^2+9}$, $v=\frac{3y}{x^2+6x+y^2+9}$,

(c) $u=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$, $v=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$,

(d) $u=\frac{1}{2}\ln|(1+x^2)+y^2|$, $v=\arctan\frac{y}{1+x}+2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

44. (a) $1-\frac{1}{z^2}$, (b) $z=0$.

45. (a) $u=x^4-6x^2y^2+y^4$, $v=4x^3y-4xy^3$, (d) $4z^3$.

48. (a) y^2-x^2-2y+c, (b) $2iz-z^2+c$, 其中c是实数.

49. $ze^{-z}+1$.

51. $f(z)=2z^2-3z+3-4i$.

52. $17+19i$.

53. $-14/3$.

54. (a) 0, (b) $5\pi i/2$.

55. (a) $-8\pi i/3$, (b) $-2\pi i$, (c) $2\pi i/3$.

56. (a) $-2\pi i$, (b) $\pi ie/3$.

58. (a) z平面, (b) $|z-i|<1$,(c) $z=\ \ 1\pm i$.

61. (a) $z=-\frac{1}{2}$为四阶极点,(b) $z=1$是一阶极点,$z=-2$为二阶极点,(c) $z=-1\pm i$为一阶极点,(d) $z=0$为本性奇点,(e) $z=\pi/3$是可去奇点,(f) $z=\pm 2i$为二阶极点.

62. (a) $-\frac{1}{z-\pi}+\frac{z-\pi}{2!}-\frac{(z-\pi)^3}{4!}+\frac{(z-\pi)^5}{6!}-\cdots$,一阶极点收敛域为$z$平面除去$z=\pi$,

(b) $z^2-z+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!\ z}+\frac{1}{4!\ z^2}-\frac{1}{5!\ z^3}+\cdots$,本性奇点收敛域为$z$平面除去$z=0$,

(c) $\frac{1}{4(z-1)^2}+\frac{7}{16(z-1)}+\frac{9}{64}-\frac{9(z-1)}{256}+\cdots$,二阶极点,收敛域为$0<|z-1|<4$.

63. (a) $z=2$, $7/4$, $z=-2$, $1/4$, (b) $z=0$, $8/25$, $z=-5$, $-8/25$, (c) $z=2$, $\frac{1}{2}t^2e^{2t}$, (d) $z=i$, 0; $z=-i$, 0.

64. $-e^{3\pi i/2}$.

65. $-8\pi i$.

93. $-\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\cdots$.

94. (a) $\cos t$, (b) $\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$, (c) $\frac{1}{4}+\frac{5}{2}te^{2t}+\frac{3}{4}e^{2t}$,(d) $\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$.

第十七章

39. (a) 以$(-2,3)$为圆心,半径为5的圆$(x+2)^2+(y-3)^2=5$,(b) 以$(2,0)$为圆心,半径为2的圆$(x-2)^2+y^4=4$,(c) 双曲线中$x\geqslant3$的一支.

40. (a) 圆$(x-2)^2+(y+1)^2=16$的外部(包括圆),

(b) 由$x^2+y^2=9$, x轴和直线$y=x$所确定的第一象限区域,

(c) 椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的内部.

41. (a) $u=x^3-3xy^2-2y$, $v=3x^2y-y^3+2x$,

(b) $u=\frac{x^2+3x+y^2}{x^2+6x+y^2+9}$, $v=\frac{3y}{x^2+6x+y^2+9}$,

(c) $u=e^{x^2-y^2}\cos2xy$, $v=e^{x^2-y^2}\sin2xy$,

(d) $u=\frac{1}{2}\ln|(1+x^2)+y^2|$, $v=\arctan\frac{y}{1+x}+2k\pi$, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$.

44. (a) $1-\frac{1}{z^2}$, (b) $z=0$.

45. (a) $u=x^4-6x^2y^2+y^4$, $v=4x^3y-4xy^3$, (d) $4z^3$.

48. (a) y^2-x^2-2y+c, (b) $2iz-z^2+c$, 其中c是实数.

49. $ze^{-z}+1$.

51. $f(z)=2z^2-3z+3-4i$.

52. $17+19i$.

53. $-14/3$.

54. (a) 0, (b) $5\pi i/2$.

55. (a) $-8\pi i/3$, (b) $-2\pi i$, (c) $2\pi i/3$.

56. (a) $-2\pi i$, (b) $\pi ie/3$.

58. (a) z平面, (b) $|z-i|<1$,(c) $z=\ 1\pm i$.

61. (a) $z=-\frac{1}{2}$为四阶极点,(b) $z=1$是一阶极点,$z=-2$为二阶极点,(c) $z=-1\pm i$为一阶极点,(d) $z=0$为本性奇点,(e) $z=\pi/3$是可去奇点,(f) $z=\pm2i$为二阶极点.

62. (a) $-\frac{1}{z-\pi}+\frac{z-\pi}{2!}-\frac{(z-\pi)^3}{4!}+\frac{(z-\pi)^5}{6!}-\cdots$,一阶极点收敛域为$z$平面除去$z=\pi$,

(b) $z^2-z+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!\ z}+\frac{1}{4!\ z^2}-\frac{1}{5!\ z^3}+\cdots$,本性奇点收敛域为$z$平面除去$z=0$,

(c) $\frac{1}{4(z-1)^2}+\frac{7}{16(z-1)}+\frac{9}{64}-\frac{9(z-1)}{256}+\cdots$,二阶极点,收敛域为$0<|z-1|<4$.

63. (a) $z=2$, $7/4$, $z=-2$, $1/4$, (b) $z=0$, $8/25$, $z=-5$, $-8/25$, (c) $z=2$, $\frac{1}{2}t^2e^{2t}$, (d) $z=i$, 0; $z=-i$, 0.

64. $-e^{3\pi i/2}$.

65. $-8\pi i$.

93. $-\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\cdots$.

94. (a) $\cos t$, (b) $\frac{1}{2}e^{-t}\sin2t$, (c) $\frac{1}{4}+\frac{5}{2}te^{2t}+\frac{3}{4}e^{2t}$,(d) $\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$.